TESTE N.º 5 – Proposta de resolução

Grupo I

1. Opção (B)

Pela Lei dos Cossenos:

$$3{,}8^2 = 5^2 + 3{,}2^2 - 2 \times 5 \times 3{,}2 \times \cos\alpha \Leftrightarrow 25 + 10{,}24 - 14{,}44 = 32\cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{20{,}8}{32}$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{13}{20}$$

Logo, $\cos\ (180° + \alpha) = -\cos\alpha = -\frac{13}{20}$.

2. Opção (B)

$$\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{(\|\vec{u} - \vec{v}\|)^2} =$$

$$= \sqrt{(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})} =$$

$$= \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v}} =$$

$$= \sqrt{\|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2} =$$

$$= \sqrt{3^2 - 2 \times (-1) + 5^2} =$$

$$= \sqrt{9 + 2 + 25} =$$

$$= \sqrt{36} =$$

$$= 6$$

3. Opção (A)

$u_9 = u_3 \times r^{9-3} \Leftrightarrow 64 = 8r^6 \Leftrightarrow r^6 = 8$

Como a razão desta progressão geométrica é positiva, então $r = \sqrt[6]{8} = \sqrt{2}$.

$u_3 = u_1 \times r^{3-1} \Leftrightarrow 8 = u_1 \times \left(\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow u_1 = \frac{8}{2} \Leftrightarrow u_1 = 4$

Então:

$$S_{10} = 4 \times \frac{1-\left(\sqrt{2}\right)^{10}}{1-\sqrt{2}} = 4 \times \frac{1-32}{1-\sqrt{2}} =$$

$$= -124 \times \frac{1}{1-\sqrt{2}} \times \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} =$$

$$= -124 \times \frac{1+\sqrt{2}}{1-2} =$$

$$= 124\left(1 + \sqrt{2}\right)$$

4. Opção (D)

$\lim x_n = \lim \frac{2n-1}{n} = \lim\left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2^-$

Assim, $\lim u_n = \lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$.

5. Opção (C)

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-\infty}{0^-} = +\infty$

$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{-\infty} = 0$ e $\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{+\infty} = 0$, logo $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

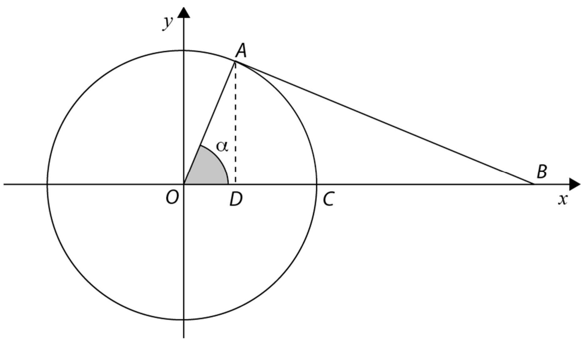
$\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g(0)}{0^-} = -\infty$ (pois $g(0) > 0$) e $\lim_{x\to 0^-} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g(0)}{0^+} = +\infty$ (pois $\mathrm{g}(0) > 0$), logo não existe $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{f(x)}$.

$\lim_{x\to 2^-} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g(2)}{0^+} = -\infty$ (pois $g(2) < 0$).

Grupo II

1.

1.1. Seja D a projeção ortogonal de A sobre o eixo Ox.



$\overline{OD} = \cos\alpha$

$\overline{AD} = \sin\alpha$

$A\hat{B}O = \frac{\pi}{2} - \alpha$

$\tan\left(A\hat{B}O\right) = \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} \Leftrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\sin\alpha}{\overline{DB}}$

$\Leftrightarrow \overline{DB} = \frac{\sin\alpha}{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}}$

$\Leftrightarrow \overline{DB} = \frac{\sin\alpha \times \sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\Leftrightarrow \overline{DB} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$

Assim:

$A_{[ABO]} = \frac{\overline{OB}\times\overline{AD}}{2} = \frac{\left(\cos\alpha + \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\right)\times\sin\alpha}{2} =$

$= \frac{1}{2} \times \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos\alpha} \times \sin\alpha =$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\cos\alpha} \times \sin\alpha =$

$= \frac{1}{2}\tan\alpha$

1.2. $\sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{16} \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{7}{16}$

Como $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, tem-se que $\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$

Assim, $A\left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{7}}{4}\right)$.

$C(1,0)$

O declive da reta AC é $\frac{0-\frac{\sqrt{7}}{4}}{1-\frac{3}{4}} = -\sqrt{7}$.

A equação reduzida da reta AC é do tipo $y = -\sqrt{7}x + b$.

Como o ponto C pertence à reta AC, vem que :

$0 = -\sqrt{7} + b \Leftrightarrow b = \sqrt{7}$

Logo, a equação reduzida da reta AC é $y = -\sqrt{7}x + \sqrt{7}$.

2.

2.1. $\overrightarrow{AB} = (2, -3, -1) - (1, 2, -2) = (1, -5, 1)$

$$\begin{aligned}(1, -5, 1) \cdot (k^2 - 1, k, 1 - k) = 0 &\Leftrightarrow k^2 - 1 - 5k + 1 - k = 0\\ &\Leftrightarrow k^2 - 6k = 0\\ &\Leftrightarrow k(k-6) = 0\\ &\Leftrightarrow k = 0 \vee k = 6\end{aligned}$$

2.2. $\overrightarrow{AB}(1, -5, 1)$

$\overrightarrow{AC} = (-1, -2, 3) - (1, 2, -2) = (-2, -4, 5)$

Como $\frac{1}{-2} \neq \frac{-5}{-4} \neq \frac{1}{5}$, os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ não são colineares, ou seja, os pontos A, B e C não são colineares, pelo que definem um plano.

ABC: $(x, y, x) = (1, 2, -2) + s(1, -5, 1) + t(-2, -4, 5), s, t \in \mathbb{R}$

3.

3.1. Seja $P(n)$: $u_n = 2^n$

$P(1)$: $u_1 = 2^1 \Leftrightarrow 2 = 2$

Logo, $P(1)$ é uma proposição verdadeira.

Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $P(n)$ é uma proposição verdadeira.

Hipótese: $u_n = 2^n$

Tese: $u_{n+1} = 2^{n+1}$

Demonstração:

$u_{n+1} = u_n + 2^n = 2^n + 2^n = 2^n \times 2 = 2^{n+1}$

Provámos que $P(1)$ é uma proposição verdadeira e que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, se $P(n)$ é uma proposição verdadeira, então $P(n+1)$ é uma proposição verdadeira.

Fica assim provado, usando o método de indução matemática, que $u_n = 2^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

3.2. $v_n = \frac{u_n}{3^n} = \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1-n} = \frac{2}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$

Como $\frac{2}{3}$ é uma constante, (v_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{2}{3}$.

3.3. Como (v_n) é uma progressão geométrica de razão $r = \frac{2}{3}$ e primeiro termo $v_1 = \frac{2}{3}$, isto é, $0 < r < 1$ e $v_1 > 0$, então (v_n) é uma sucessão decrescente.

3.4. $S_n = \sum_{i=1}^{n} v_n = v_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} =$

$= \frac{2}{3} \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} =$

$= 2 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$

$\lim S_n = \lim \left[2 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)\right] = 2 \times (1-0) = 2$

4.

4.1. $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(k + \frac{2}{x-1}\right) = k - 2 = f(0)$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2-5x+6}{(x-2)^2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

Para que f seja contínua em $x = 0$, tem de se verificar $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$.

Assim:

$k - 2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow k = \frac{7}{2}$.

4.2. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x-1} = \frac{2}{-\infty} = 0$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \to -\infty$.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-5x+6}{(x-2)^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right)} = 1$

A reta de equação $y = 1$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.

4.3. Em $\mathbb{R}^+ \backslash \{2\}$:

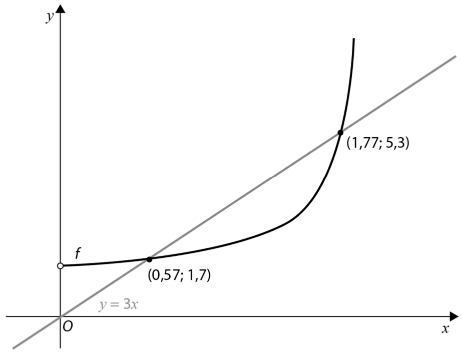
$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-5x+6}{(x-2)^2} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)^2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{x-2} > 0$$

x	0		2		3	$+\infty$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x-2$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{x-3}{x-2}$	$+$	$+$	n.d.	$-$	0	$+$

Logo, C.S. $=]0, 2[\cup]3, +\infty[$.

4.4. As soluções da equação $f(x) = 3x$, no intervalo $]0, 2[$, são 0,57 e 1,77.



5. Como a reta de equação $y = 3x - 2$ é assíntota ao gráfico de f, tem-se que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$ e $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - 3x] = -2$. Assim:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2}{f(x)}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{f(x)}{x}} = \frac{1}{3}$$

e:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(g(x) - \frac{1}{3}x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{f(x)} - \frac{1}{3}x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 - xf(x)}{3f(x)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x(3x - f(x))}{3f(x)} =$$

$$= -\frac{1}{3}\lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x}{f(x)} \times (f(x) - 3x)\right] =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} \times (-2)\right) =$$

$$= \frac{2}{9}$$

Portanto, a reta de equação $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}$ é assíntota ao gráfico de g.