

exame

MATEMÁTICA A

12

Daniela Raposo
Luzia Gomes

REVISÃO CIENTÍFICA
Filipe Carvalho
Universidade do Minho

ATUAL E COMPLETO

LIVRO + ONLINE 

De acordo com
Aprendizagens Essenciais

Explicação de todos os conteúdos

2400 questões com resposta detalhada

Simulador de exames online

Mais de 100 minutos de vídeos tutoriais

Teste diagnóstico
com feedback online imediato

Últimas provas oficiais
e respostas online

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n) :

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Complexos

$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ ($k \in \{0, \dots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u v)' = u' v + u v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' v - u v'}{v^2}$

$(u^n)' = n u^{n-1} u'$ ($n \in \mathbb{R}$)

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' e^u$

$(a^u)' = u' a^u \ln a$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

Limites notáveis

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ ($n \in \mathbb{N}$)

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ ($p \in \mathbb{R}$)

TEMA 1 – GEOMETRIA ANALÍTICA NO PLANO E NO ESPAÇO

1.1. Cálculo vetorial no plano e no espaço	6
1.2. Geometria analítica	12
Exercícios resolvidos	19
Exercícios propostos	26
Itens de seleção	26
Itens de construção	33

TEMA 2 – CÁLCULO COMBINATÓRIO E PROBABILIDADES

2.1. Operações com conjuntos	44
2.2. Princípios fundamentais de contagem	45
2.3. Cálculo combinatório	47
2.4. Triângulo de Pascal	50
2.5. Binômio de Newton	50
Exercícios resolvidos	51
Exercícios propostos	58
Itens de seleção	58
Itens de construção	61
2.6. Espaço amostral e experiência aleatória	66
2.7. Espaço de probabilidade	66
2.8. Acontecimentos e regra de Laplace	66
2.9. Probabilidade condicionada	68
2.10. Acontecimentos independentes	68
Exercícios resolvidos	69
Exercícios propostos	80
Itens de seleção	80
Itens de construção	85

TEMA 3 – SUCESSÕES

3.1. Sucessão	98
3.2. Representação gráfica de uma sucessão	99
3.3. Sucessões monótonas	99
3.4. Majorantes e minorantes de um conjunto	100
3.5. Sucessões definidas por recorrência	101
3.6. Progressões aritméticas	101
3.7. Progressões geométricas	102
3.8. Limites de sucessões	104
Exercícios resolvidos	107
Exercícios propostos	118
Itens de seleção	118
Itens de construção	120

TEMA 4 – FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL

4.1. Generalidades sobre funções	126
4.2. Estudo elementar de algumas funções	133

4.3. Operações algébricas com funções	138
Exercícios resolvidos	139
Exercícios propostos	146
Itens de seleção	146
4.4. Limites de funções reais de variável real	152
4.5. Levantamento de indeterminações	157
Exercícios resolvidos	158
4.6. Continuidade de funções reais de variável real	165
Exercícios resolvidos	166
4.7. Alguns teoremas envolvendo funções contínuas	169
Exercícios resolvidos	170
4.8. Assíntotas ao gráfico de uma função	173
Exercícios resolvidos	174
4.9. Derivadas de funções reais de variável real	179
Exercícios resolvidos	185
Exercícios propostos	200
Itens de seleção	200
Itens de construção	206

TEMA 5 – FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

5.1. Número de Neper	218
Exercício resolvido	218
5.2. Funções exponenciais	220
Exercícios resolvidos	222
5.3. Funções logarítmicas	224
Exercícios resolvidos	227
5.4. Derivadas de funções exponenciais e logarítmicas	235
Exercícios resolvidos	235
5.5. Limites	244
Exercícios resolvidos	244
5.6. Modelação	257
Exercícios propostos	258
Itens de seleção	258
Itens de construção	262

TEMA 6 – TRIGONOMETRIA E FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

6.1. Conceitos básicos de trigonometria	282
Exercícios resolvidos	283
6.2. Lei dos senos, lei dos cossenos e resolução de triângulos	284
Exercício resolvido	286
6.3. Ângulos orientados, ângulos generalizados e rotações	287
6.4. Razões trigonométricas de ângulos generalizados	288
Exercícios resolvidos	290
6.5. Funções trigonométricas	292
Exercício resolvido	295
6.6. Equações trigonométricas	297
Exercícios resolvidos	298
6.7. Inequações trigonométricas	301
Exercício resolvido	301

6.8. Fórmulas de trigonometria	301
Exercícios resolvidos	302
6.9. Limites de funções trigonométricas	303
Exercício resolvido	303
6.10. Derivadas de funções trigonométricas	305
Exercícios resolvidos	305
6.11. Estudo de funções definidas por $f(x) = a \operatorname{sen}(bx + c) + d$, $f(x) = a \cos(bx + c) + d$ e $f(x) = a \operatorname{tg}(bx + c) + d$	312
Exercício resolvido	313
Exercícios propostos	314
Itens de seleção	314
Itens de construção	317

TEMA 7 – NÚMEROS COMPLEXOS

7.1. O corpo dos números complexos	328
7.2. Representação dos números complexos na forma $z = a + bi$	328
Exercícios resolvidos	333
7.3. Forma trigonométrica de um número complexo	334
Exercícios resolvidos	338
7.4. Raízes n -ésimas de números complexos	344
Exercícios resolvidos	344
7.5. Conjuntos de pontos definidos por condições sobre números complexos	352
Exercícios resolvidos	353
Exercícios propostos	356
Itens de seleção	356
Itens de construção	359

TEMA 8 – ESTATÍSTICA

8.1. Somatório	370
8.2. Conceitos fundamentais	370
8.3. Medidas de localização	371
8.4. Medidas de dispersão	372
8.5. Amostras bivariadas, coeficientes de correlação e retas de mínimos quadrados	372
Exercícios resolvidos	375
Exercícios propostos	384
Itens de seleção	384
Itens de construção	386

PROVAS-MODELO

Prova-Modelo 1	391
Prova-Modelo 2	395
Prova-Modelo 3	399
Prova-Modelo 4	403
Prova-Modelo 5	407
Prova-Modelo 6	411

SOLUÇÕES 415

5.2. FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Definição

A função definida por $f(x) = a^x$, em $\mathbb{R}$, com $a \in \mathbb{R}^+$, designa-se por **função exponencial de base a** .



Nota

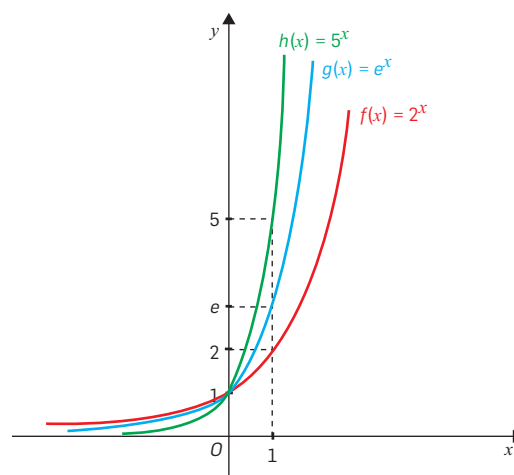
A função exponencial de base e designa-se simplesmente por **função exponencial** e representa-se também por **exp**.

Na figura estão representadas partes dos gráficos de três funções exponenciais de bases 2, e e 5, respetivamente:

Algumas propriedades das funções exponenciais de base maior que um

A função **exponencial de base $a > 1$** tem as seguintes propriedades principais:

- Domínio:** $\mathbb{R}$
- Contradomínio:** $\mathbb{R}^+$
- Zeros:** não tem zeros, isto é, $a^x = 0$ é uma equação impossível.
- Sinal:** é positiva em $\mathbb{R}$, isto é, $a^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Variação:** é crescente.
- Injetividade:** é injetiva.
- Continuidade:** é contínua.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$.
- Assíntotas:** a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico da função.

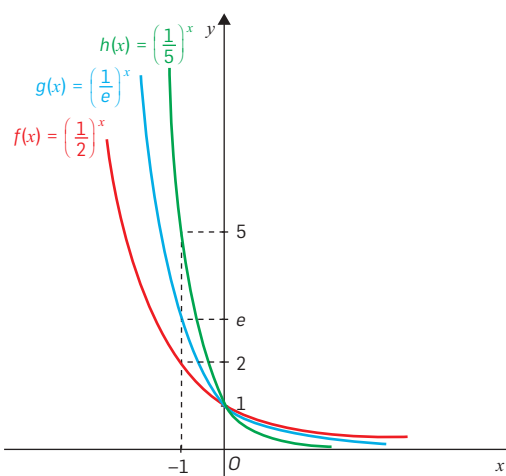


Na figura estão representadas partes dos gráficos de três funções exponenciais de bases $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{e}$ e $\frac{1}{5}$, respetivamente:

Algumas propriedades das funções exponenciais de base maior que zero e menor que um

A função **exponencial de base $0 < a < 1$** tem as seguintes propriedades principais:

- Domínio:** $\mathbb{R}$
- Contradomínio:** $\mathbb{R}^+$
- Zeros:** não tem zeros, isto é, $a^x = 0$ é uma equação impossível.
- Sinal:** é positiva em $\mathbb{R}$, isto é, $a^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Variação:** é decrescente.
- Injetividade:** é injetiva.
- Continuidade:** é contínua.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$.
- Assíntotas:** a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico da função.



As propriedades algébricas para potências de expoente racional permanecem válidas para potências de expoente irracional. Assim:

Propriedades

Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$ e $x, y \in \mathbb{R}$:

- $a^x \times a^y = a^{x+y}$
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $(ab)^x = a^x \times b^x$
- $\frac{1}{a^x} = a^{-x}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$
- $(a^x)^y = a^{x \times y}$

Propriedade

A função definida em $\mathbb{R}^+$ por $f(x) = x^b$, com $b \in \mathbb{R}$, é contínua.

Resolução de algumas equações e inequações exponenciais

Esquematizando / Resumindo

Na **resolução de uma equação exponencial**, devem seguir-se estes passos:

- 1º passo:** Sempre que possível, escrever as potências na mesma base, aplicando as regras operatórias das potências.
- 2º passo:** Obter uma igualdade do tipo $a^x = a^y$.
- 3º passo:** Aplicar $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$.
- 4º passo:** Resolver a equação obtida no passo anterior.
- 5º passo:** Apresentar o conjunto-solução.

Na **resolução de uma inequação exponencial**, devem seguir-se estes passos:

- 1º passo:** Sempre que possível, escrever as potências na mesma base, aplicando as regras operatórias das potências.
- 2º passo:** Obter uma desigualdade do tipo $a^x < a^y$ ou $a^x \leq a^y$ ou $a^x > a^y$ ou $a^x \geq a^y$.
- 3º passo:** Se $a > 1$, aplicar:

$a^x < a^y \Leftrightarrow x < y$	Se $0 < a < 1$, aplicar:
$a^x \leq a^y \Leftrightarrow x \leq y$	$a^x < a^y \Leftrightarrow x > y$
$a^x > a^y \Leftrightarrow x > y$	$a^x \leq a^y \Leftrightarrow x \geq y$
$a^x \geq a^y \Leftrightarrow x \geq y$	$a^x > a^y \Leftrightarrow x < y$
	$a^x \geq a^y \Leftrightarrow x \leq y$
- 4º passo:** Resolver a inequação obtida no passo anterior.
- 5º passo:** Apresentar o conjunto-solução.

EXERCÍCIO DE APLICAÇÃO

3. Resolva as equações seguintes:



3.1. $9^{x^2+x} - 27^{-2x-2} = 0$

3.2. $2^{2x-1} - 2^{x-1} = 1$

3.3. $5^{x+1} + 5^{1-x} - 1 = 25$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1

Resolva as equações seguintes:



1.1. $4^{x^2-1} - 8^x = 0$

1.2. $4^x - 2^x - 2 = 0$

1.3. $-3 \times 2^{-x+1} + 2^x = -1$

Sugestão de resolução

$$\begin{aligned} 1.1. \quad 4^{x^2-1} - 8^x = 0 &\Leftrightarrow 4^{x^2-1} = 8^x \Leftrightarrow (2^2)^{x^2-1} = (2^3)^x \\ &\Leftrightarrow 2^{2x^2-2} = 2^{3x} \Leftrightarrow 2x^2 - 2 = 3x \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 2 \times (-2)}}{4} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 5}{4} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -\frac{1}{2} \quad \text{C.S.} = \left\{ -\frac{1}{2}, 2 \right\} \end{aligned}$$

1.2. $4^x - 2^x - 2 = 0 \Leftrightarrow (2^2)^x - 2^x - 2 = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 2^x - 2 = 0$

Considerando a mudança de variável $2^x = y$, obtém-se a equação do 2º grau:

$$y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-2)}}{4}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = 2 \vee y = -1$$

Substituindo y por 2^x , vem que:

$$2^x = 2 \vee \underbrace{2^x = -1}$$

Equação impossível, pois $2^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow 2^x = 2^1$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{C.S.} = \{1\}$$

1.3. $-3 \times 2^{-x+1} + 2^x = -1 \Leftrightarrow -3 \times 2 \times 2^{-x} + 2^x = -1 \Leftrightarrow -\frac{6}{2^x} + 2^x = -1$

Considerando a mudança de variável $2^x = y$, obtém-se a equação fracionária:

$$-\frac{6}{y} + y = -1 \Leftrightarrow \frac{-6 + y^2 + y}{y} = 0 \Leftrightarrow y^2 + y - 6 = 0, \text{ pois } y \neq 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = 2 \vee y = -3$$

Substituindo y por 2^x , vem que:

$$2^x = 2 \vee \underbrace{2^x = -3}$$

Equação impossível, pois $2^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{C.S.} = \{1\}$$



2. Resolve as inequações seguintes:

2.1. $6^x - 3^x > 3^x$

2.2. $-4^x + 2^x \geq -2$

Sugestão de resolução

2.1. $6^x - 3^x > 3^x \Leftrightarrow 6^x - 2 \times 3^x > 0$
 $\Leftrightarrow 2^x \times 3^x - 2 \times 3^x > 0$
 $\Leftrightarrow 3^x \times (2^x - 2) > 0$
 $\Leftrightarrow 2^x - 2 > 0$, pois $3^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$
 $\Leftrightarrow 2^x > 2$
 $\Leftrightarrow x > 1$ C.S. = $]1, +\infty[$

2.2. $-4^x + 2^x \geq -2 \Leftrightarrow -(2^x)^2 + 2^x + 2 \geq 0$
 Considerando a mudança de variável $2^x = y$, obtém-se:
 $-y^2 + y + 2 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -1 \wedge y \leq 2$

Cálculo auxiliar
 $-y^2 + y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-2)}}{2}$
 $\Leftrightarrow y = \frac{1 \pm 3}{2}$
 $\Leftrightarrow y = 2 \vee y = -1$

Voltando à variável x , tem-se:

$\underbrace{2^x \geq -1}_{\text{Condição universal}} \wedge 2^x \leq 2$
 $\Leftrightarrow 2^x \leq 2$
 $\Leftrightarrow x \leq 1$ C.S. = $]-\infty, 1]$



3. Seja f a função definida por $f(x) = -3e^{-0,1x} + 4$. Mostra que esta função tem, pelo menos, um zero pertencente a $]-3, -2[$.

Em eventuais cálculos intermédios, sempre que procederes a arredondamentos, conserva duas casas decimais.

Sugestão de resolução

• A função f é contínua em $\mathbb{R}$, por se tratar da soma de duas funções contínuas (uma que é o produto de uma função constante pela composta de uma função exponencial com uma função afim, e a outra que é uma função constante). Em particular, f é contínua em $[-3, -2]$.

• $f(-3) = -3 \times e^{0,3} + 4 \approx -0,05$
 $f(-2) = -3 \times e^{0,2} + 4 \approx 0,34$

Ou seja, $f(-3) < 0 < f(-2)$.

Assim, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, concluímos que $\exists c \in]-3, -2[: f(c) = 0$, isto é, a função f tem pelo menos um zero pertencente a $]-3, -2[$.

EXERCÍCIO DE APLICAÇÃO

4. Resolve as inequações seguintes:

4.1. $3^{\frac{1}{x}} > 9$

4.2. $\frac{6^x - 2^x}{3^x - 3} \geq 0$

4.3. $-9^x + 4 \times 3^x \geq 3$

4.4. $2^{x-1} + 2^{2-x} > 3$

EXERCÍCIO DE APLICAÇÃO

5. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{x-1}{e^x + 1}$.

Mostra que esta função tem, pelo menos, um zero pertencente a $]0, 2[$.

5.3. FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

CONCEITO DE LOGARITMO

Definição

O **logaritmo** de um número positivo x numa dada base a , com $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, é o expoente a que é preciso elevar a base para obter esse número e representa-se por $\log_a(x)$.

$$\log_a(x) = y \Leftrightarrow x = a^y$$

Designa-se o logaritmo de base 10 por **logaritmo decimal**, representando-o também por **log**, e designa-se o logaritmo de base e por **logaritmo neperiano**, representando-o também por **ln**.

Propriedades

Seja a um número real positivo diferente de 1. Tem-se:

- $\log_a(a) = 1$
- $\log_a(1) = 0$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \log_a(a^x) = x$
- $\forall x \in \mathbb{R}^+, a^{\log_a(x)} = x$



Notas

As duas últimas propriedades podem também ser lidas da seguinte forma:

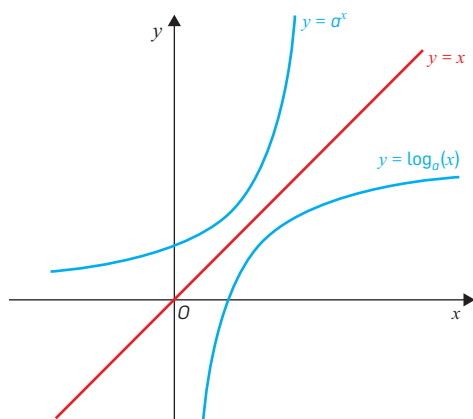
1. Todo o número real x pode ser representado na forma de um logaritmo numa qualquer base $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$:
 $\log_a(a^x) = x$.
2. Todo o número real positivo x pode representar-se na forma de uma potência com qualquer base $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$:
 $a^{\log_a(x)} = x$.

FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Definição

A função definida por $f(x) = \log_a(x)$, em $\mathbb{R}^+$, com $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, designa-se por **função logarítmica de base a** e representa-se por **$\log_a$** .

Graficamente, se $a > 1$, tem-se:



Recorda

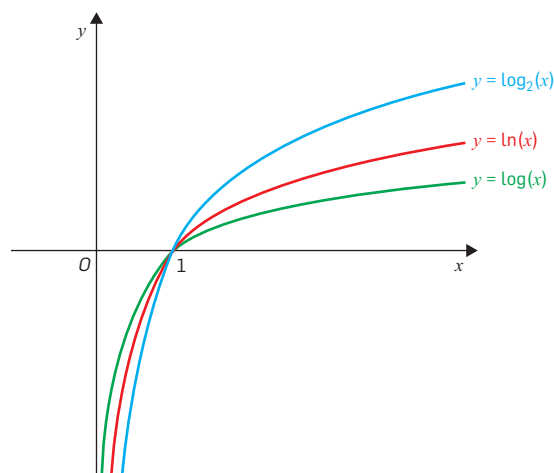
Os gráficos de duas funções inversas entre si, quando representados no mesmo referencial, são simétricos em relação à reta de equação $y = x$ (bissetriz dos quadrantes ímpares).

Observa em baixo as representações gráficas das funções logarítmicas de bases 2, e e 10:

Algumas propriedades das funções logarítmicas de base superior a um

A função **logarítmica de base $a > 1$** tem as seguintes propriedades principais:

- Domínio:** $\mathbb{R}^+$
- Contradomínio:** $\mathbb{R}$
- Variação:** é crescente.
- Zeros:** tem um único zero, isto é,
 $\log_a(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
- Sinal:** é positiva em $]1, +\infty[$, isto é,
 $\log_a(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$.
é negativa em $]0, 1[$, isto é,
 $\log_a(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.
- Injetividade:** é injetiva.
- Continuidade:** é contínua.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a(x) = -\infty$.
- Assíntotas:** a reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico da função.

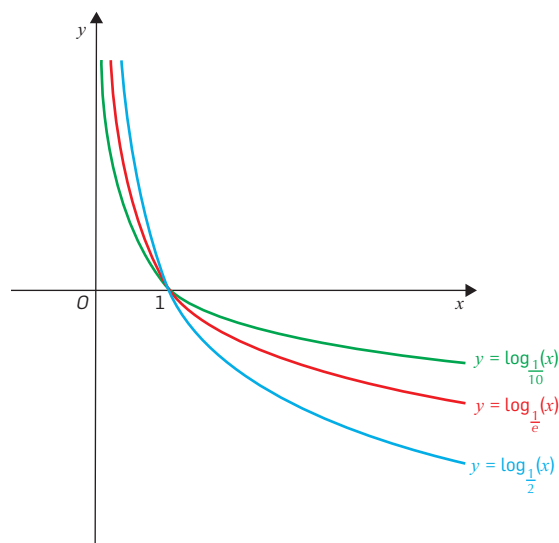


Observa, agora, as representações gráficas das funções logarítmicas de bases $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{e}$ e $\frac{1}{10}$:

Algumas propriedades das funções logarítmicas de base maior que zero e menor que um

A função **logarítmica de base $0 < a < 1$** tem as seguintes propriedades principais:

- Domínio:** $\mathbb{R}^+$
- Contradomínio:** $\mathbb{R}$
- Variação:** é decrescente.
- Zeros:** tem um único zero, isto é,
 $\log_a(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
- Sinal:** é positiva em $]0, 1[$, isto é,
 $\log_a(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.
é negativa em $]1, +\infty[$, isto é,
 $\log_a(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$.
- Injetividade:** é injetiva.
- Continuidade:** é contínua.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a(x) = +\infty$.
- Assíntotas:** a reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico da função.



Propriedades algébricas dos logaritmos

Dados $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $x, y \in \mathbb{R}^+$ e $p \in \mathbb{R}$:

- $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
- $\log_a(x^p) = p \log_a(x)$
- $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$
- $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$

Dados $a \in \mathbb{R}^+$ e $x \in \mathbb{R}$:

- $a^x = e^{x \ln(a)}$

Resolução de algumas equações e inequações logarítmicas

Esquematizando / Resumindo

Na **resolução de uma equação envolvendo logaritmos**, debes seguir estes passos:

- 1º passo:** Determinar o domínio da expressão que envolve logaritmos.
- 2º passo:** Caso haja logaritmos de bases diferentes, aplicar a regra de mudança de base e escrever todos os logaritmos na mesma base.
- 3º passo:** Utilizar as propriedades operatórias dos logaritmos, **com precaução**, de forma a obter uma expressão do tipo $\log_a(x) = \log_a(y)$ **ou** $\log_a(x) = z$.
- 4º passo:** Aplicar $\log_a(x) = \log_a(y) \Leftrightarrow x = y$ **ou** $\log_a(x) = z \Leftrightarrow x = a^z$.
- 5º passo:** Resolver a equação obtida no passo anterior.
- 6º passo:** Intersectar as soluções da equação anterior com o domínio da expressão inicial e apresentar o conjunto-solução.

Na **resolução de uma inequação envolvendo logaritmos**, debes seguir estes passos:

- 1º passo:** Determinar o domínio da expressão que envolve logaritmos.
- 2º passo:** Caso haja logaritmos de bases diferentes, aplicar a regra da mudança de base e escrever todos os logaritmos na mesma base.
- 3º passo:** Utilizar as propriedades operatórias dos logaritmos, **com precaução**, de forma a obter uma expressão do tipo $\log_a(x) > \log_a(y)$ **ou** $\log_a(x) < \log_a(y)$ **ou** $\log_a(x) > z$ **ou** $\log_a(x) < z$ (ou uma expressão do tipo das anteriores, mas com o sinal $\geq$ **ou** $\leq$).
- 4º passo:** Se $a > 1$ aplicar:

$\log_a(x) > \log_a(y) \Leftrightarrow x > y$	Se $0 < a < 1$ aplicar:
$\log_a(x) < \log_a(y) \Leftrightarrow x < y$	$\log_a(x) > \log_a(y) \Leftrightarrow x < y$
$\log_a(x) > z \Leftrightarrow x > a^z$	$\log_a(x) < \log_a(y) \Leftrightarrow x > y$
$\log_a(x) < z \Leftrightarrow x < a^z$	$\log_a(x) > z \Leftrightarrow x < a^z$
	$\log_a(x) < z \Leftrightarrow x > a^z$

Este esquema é válido se a inequação obtida no 3º passo envolver $\geq$ em vez de $>$ **ou** $\leq$ em vez de $<$.

- 5º passo:** Resolver a inequação obtida no passo anterior.
- 6º passo:** Intersectar o conjunto-solução da inequação anterior com o domínio da expressão inicial, e apresentar o conjunto-solução pretendido.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS



1. Resolve, em $\mathbb{R}$, as equações seguintes:

1.1. $\log_2(5x + 1) - 4 = 0$

1.2. $1 - \log(x + 1) = \log(x - 2)$

1.3. $\log_2(x) - \log_4(x) = -3$

1.4. $\ln(x^2) = 2 \ln(3)$

Sugestão de resolução

1.1. Como em $\mathbb{R}$ apenas os números positivos têm logaritmo, faz-se:

$$D = \{x \in \mathbb{R}: 5x + 1 > 0\} =$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R}: x > -\frac{1}{5}\right\} =$$

$$= \left]-\frac{1}{5}, +\infty\right[$$

$$\log_2(5x + 1) - 4 = 0 \Leftrightarrow \log_2(5x + 1) = 4$$

$$\Leftrightarrow 5x + 1 = 2^4 \wedge x > -\frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow 5x = 15 \wedge x > -\frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \wedge x > -\frac{1}{5}$$

$$\text{C.S.} = \{3\}$$

1.2. $D = \{x \in \mathbb{R}: x + 1 > 0 \wedge x - 2 > 0\} =$

$$= \{x \in \mathbb{R}: x > -1 \wedge x > 2\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R}: x > 2\} =$$

$$=]2, +\infty[$$

$$1 - \log(x + 1) = \log(x - 2) \Leftrightarrow \log(x - 2) + \log(x + 1) = 1$$

$$\Leftrightarrow \log[(x - 2) \times (x + 1)] = 1 \wedge x > 2$$

$$\Leftrightarrow (x - 2) \times (x + 1) = 10^1 \wedge x > 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 2x - 2 = 10 \wedge x > 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0 \wedge x > 2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-12)}}{2 \times 1} \wedge x > 2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 7}{2} \wedge x > 2$$

$$\Leftrightarrow (x = -3 \vee x = 4) \wedge x > 2$$

$$\text{C.S.} = \{4\}$$

EXERCÍCIO DE APLICAÇÃO



6. Resolve, em $\mathbb{R}$, as equações seguintes:

6.1. $\log_3(x - 4) - 1 = 0$

6.2. $1 - \log(x - 1) = \log(x + 2)$

6.3. $\log_9(x^2 - x) - \log_3(x) = -\frac{1}{2}$

6.4. $\ln(x^2) = 2 \ln(5)$

Sugestão de resolução (continuação)



ERRO TÍPICO

Observa um dos erros mais comuns na resolução do exercício anterior.

$$1 - \log(x+1) = \log(x-2) \Leftrightarrow \log(x-2) + \log(x+1) = 1$$

$$\Leftrightarrow \log[(x-2) \times (x+1)] = 1$$

$$\Leftrightarrow (x-2) \times (x+1) = 10^1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 2x - 2 = 10$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-12)}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 7}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \vee x = 4$$

$$\text{C.S.} = \{-3, 4\}$$

Conjunto-solução **ERRADO!**

Como o domínio da expressão $\log(x-2) + \log(x+1)$, que é $]2, +\infty[$, **está contido** no domínio de $\log[(x-2) \times (x+1)]$, que é $]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$, ao fazer a substituição da primeira expressão pela segunda estamos a “alargar” o domínio, o que faz com que as duas expressões **não sejam equivalentes**, para além de poder fazer com que surjam soluções em excesso.

Assim, torna-se imprescindível a interseção das soluções obtidas com o domínio da expressão inicial.

Repara que, nesta resolução, não foi determinado previamente o domínio, tendo o valor -3 surgido como uma solução, quando não faz parte do domínio.

$$1.3. \quad D = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\} =]0, +\infty[$$

$$\log_2(x) - \log_4(x) = -3 \Leftrightarrow \log_2(x) - \frac{\log_2(x)}{\log_2 4} = -3 \wedge x > 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x) - \frac{\log_2(x)}{2} = -3 \wedge x > 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \times \log_2(x) - \log_2(x) = -6 \wedge x > 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x) = -6 \wedge x > 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2^{-6} \wedge x > 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{64} \wedge x > 0$$

$$\text{C.S.} = \left\{ \frac{1}{64} \right\}$$

1.4. $D = \{x \in \mathbb{R}: x^2 > 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

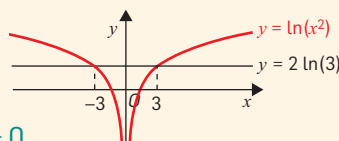
$$\ln(x^2) = 2 \ln(3) \Leftrightarrow \ln(x^2) = \ln(9)$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 9 \wedge x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (x = -3 \vee x = 3) \wedge x \neq 0$$

$$\text{C.S.} = \{-3, 3\}$$

Graficamente



ERRO TÍPICO

Um dos erros mais comuns na resolução do exercício anterior é:

$$\ln(x^2) = 2 \ln(3) \Leftrightarrow 2 \ln(x) = 2 \ln(3)$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) = \ln(3)$$

$$\Leftrightarrow x = 3$$

$$\text{C.S.} = \{3\}$$

Conjunto-solução **ERRADO!**

Ao fazer a substituição da expressão $\ln(x^2)$ pela expressão $2 \ln(x)$, estamos a passar de uma expressão com domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ para uma expressão de domínio $\mathbb{R}^+$, o que faz com que as duas expressões **não sejam equivalentes**, para além de poder provocar a perda de soluções. Assim, nunca se deve substituir uma expressão por outra de domínio “mais restrito”.

Repara que, nesta resolução, se perdeu a solução $x = -3$.

2

Resolve, em $\mathbb{R}$, as inequações seguintes:



2.1. $\log(2x) < \log(7)$

2.2. $\ln(3 - x) \geq -1$

2.3. $\log_{\frac{1}{2}}(x + 1) < 4$

2.4. $\log_2(x + 3) \leq 5 - \log_2(4 - x)$

2.5. $\log_2(x^2 + x) - \log_2(x) \leq 1$

Sugestão de resolução

2.1. $D = \{x \in \mathbb{R}: 2x > 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\} = \mathbb{R}^+$

$$\log(2x) < \log(7) \Leftrightarrow 2x < 7 \wedge x > 0$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{7}{2} \wedge x > 0$$

$$\text{C.S.} = \left]0, \frac{7}{2}\right[$$

EXERCÍCIO DE APLICAÇÃO

7. Resolve, em $\mathbb{R}$, as inequações seguintes:

7.1. $\log(3x) < \log(12)$

7.2. $\ln(1 - x) \geq -2$

7.3. $\log_{0,1}(x - 1) < 10$

7.4. $\log_3(3 - x) \leq 9 - \log_3(4 + x)$

7.5. $\log_2(-x^2 + x) - \log_2(x) > -1$

Sugestão de resolução (continuação)

$$\begin{aligned}
 2.2. \quad D &= \{x \in \mathbb{R}: 3 - x > 0\} = \\
 &= \{x \in \mathbb{R}: 3 > x\} = \\
 &=]-\infty, 3[
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \ln(3 - x) \geq -1 &\Leftrightarrow \ln(3 - x) \geq \ln(e^{-1}) \\
 &\Leftrightarrow 3 - x \geq e^{-1} \wedge x < 3 \\
 &\Leftrightarrow -x \geq \frac{1}{e} - 3 \wedge x < 3 \\
 &\Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{e} + 3 \wedge x < 3
 \end{aligned}$$

$$\text{C.S.} = \left] -\infty, 3 - \frac{1}{e} \right[$$

$$\begin{aligned}
 2.3. \quad D &= \{x \in \mathbb{R}: x + 1 > 0\} = \\
 &= \{x \in \mathbb{R}: x > -1\} = \\
 &=]-1, +\infty[
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \log_{\frac{1}{2}}(x + 1) < 4 &\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x + 1) < \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{16}\right) \\
 &\Leftrightarrow x + 1 > \frac{1}{16} \wedge x > -1, \text{ pois } y = \log_{\frac{1}{2}}(x + 1) \text{ é uma função estritamente} \\
 &\hspace{15em} \text{decrecente.} \\
 &\Leftrightarrow x > \frac{1}{16} - 1 \wedge x > -1 \\
 &\Leftrightarrow x > -\frac{15}{16} \wedge x > -1
 \end{aligned}$$

Outro processo

$$\begin{aligned}
 \log_{\frac{1}{2}}(x + 1) < 4 &\Leftrightarrow \frac{\log_2(x + 1)}{\log_2\left(\frac{1}{2}\right)} < \log_2(2^4) \\
 &\Leftrightarrow \frac{\log_2(x + 1)}{-1} < \log_2(16) \\
 &\Leftrightarrow \log_2(x + 1) > -\log_2(16) \\
 &\Leftrightarrow \log_2(x + 1) > \log_2\left(\frac{1}{16}\right) \\
 &\Leftrightarrow x + 1 > \frac{1}{16} \wedge x > -1 \\
 &\Leftrightarrow x > -\frac{15}{16} \wedge x > -1
 \end{aligned}$$

$$\text{C.S.} = \left] -\frac{15}{16}, +\infty \right[$$

$$2.4. D = \{x \in \mathbb{R}: x + 3 > 0 \wedge 4 - x > 0\} = \\ =]-3, 4[$$

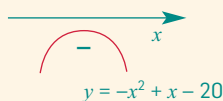
$$\begin{aligned} \log_2(x + 3) \leq 5 - \log_2(4 - x) &\Leftrightarrow \log_2(x + 3) + \log_2(4 - x) \leq 5 \\ &\Leftrightarrow \log_2[(x + 3) \times (4 - x)] \leq 5 \wedge -3 < x < 4 \\ &\Leftrightarrow \log_2(-x^2 + x + 12) \leq 5 \wedge -3 < x < 4 \\ &\Leftrightarrow -x^2 + x + 12 \leq 2^5 \wedge -3 < x < 4 \\ &\Leftrightarrow -x^2 + x - 20 \leq 0 \wedge -3 < x < 4 \end{aligned}$$

Condição universal em $\mathbb{R}$

Cálculo auxiliar

$$-x^2 + x - 20 = 0$$

Equação impossível



$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \wedge -3 < x < 4$$

$$\text{C.S.} =]-3, 4[$$

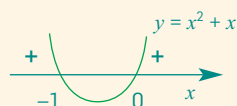
$$2.5. D = \{x \in \mathbb{R}: x^2 + x > 0 \wedge x > 0\} =$$

Cálculo auxiliar

$$x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$$



$$= \{x \in \mathbb{R}: (x < -1 \vee x > 0) \wedge x > 0\} =$$

$$= \mathbb{R}^+$$

$$\begin{aligned} \log_2(x^2 + x) - \log_2 x &\leq 1 \Leftrightarrow \log_2\left(\frac{x^2 + x}{x}\right) \leq 1 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \\ &\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{\cancel{x}(x + 1)}{\cancel{x}}\right) \leq \log_2(2) \wedge x \in \mathbb{R}^+ \\ &\Leftrightarrow \log_2(x + 1) \leq \log_2(2) \wedge x \in \mathbb{R}^+ \\ &\Leftrightarrow x + 1 \leq 2 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \\ &\Leftrightarrow x \leq 1 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

$$\text{C.S.} =]0, 1]$$

Itens de seleção

-  1. Numa cidade, o número de pessoas infectadas com um determinado vírus evoluiu em função do tempo t (expresso em dias), de acordo com a função $I(t) = 200 \times 2^{0,4t}$. O número de dias necessário para que o número de pessoas infectadas seja 204 800 é:
- (A) 23 (B) 24 (C) 25 (D) 26
-  2. A expressão $2 \ln(e^6)$ é igual a:
- (A) $\ln(2e^6)$ (B) e^{12} (C) 12 (D) 36
-  3. O conjunto-solução da equação $\ln(x) = -10$ é:
- (A) $\emptyset$ (B) $\{e^{10}\}$ (C) $\{-e^{10}\}$ (D) $\left\{\left(\frac{1}{e}\right)^{10}\right\}$
-  4. Seja g a função definida, em $\mathbb{R}$, por $g(x) = 2^x + \log(x)$. O teorema de Bolzano permite-nos afirmar que a equação $g(x) = e$ tem pelo menos uma solução no intervalo:
- (A) $]1, 2[$ (B) $]2, 3[$ (C) $]2, e[$ (D) $]e, 10[$
-  5. Seja k um número real positivo. Qual das seguintes expressões é igual a $e^{-\ln(k)} - 1$?
- (A) $-k - 1$ (B) $\frac{1}{k} - 1$ (C) $k^{-1} - k$ (D) $\frac{1}{k e}$
-  6. Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = 2^x - 2$. Para um certo número real k , o gráfico da função g definida por $g(x) = f(x + k)$ passa no ponto de coordenadas $\left(-4, -\frac{3}{2}\right)$. Qual é o valor de k ?
- (A) 3 (B) -3 (C) 4 (D) -4
-  7. Seja f a função definida, em $\mathbb{R}^+$, por $f(x) = \log_4(16\sqrt[3]{x})$. Então:
- (A) $f(x) = 16 \log_4(x)$ (B) $f(x) = 2 \log_4(\sqrt[3]{x})$ (C) $f(x) = \frac{6 + \log_4(x)}{3}$ (D) $f(x) = \frac{2 + \log_4(x)}{3}$
-  8. Sejam u e $v \in \mathbb{R}^+$. Qual das seguintes igualdades é equivalente a $\log(u) = -\log(v)$?
- (A) $u + v = 1$ (B) $u \times v = 1$ (C) $u = -v$ (D) $u = v$
-  9. Sendo $3y = \log_2(x)$, com $x \in \mathbb{R}^+$, então:
- (A) $x = 3y^2$ (B) $x = 8^y$ (C) $y = \left(\frac{x}{3}\right)^2$ (D) $y = 9^x$
-  10. Seja $\log(a) = m$. Então, o valor da expressão $\log\left(\sqrt{\frac{a^3\sqrt{a}}{3\sqrt{a}4\sqrt{a}}}\right)$ é igual a:
- (A) $\frac{41}{24}m$ (B) $\frac{3}{8}m$ (C) $\frac{32}{24}m$ (D) $\frac{35}{24}m$



11. Seja $\ln(x) = y \ln(3)$, com $x \in \mathbb{R}^+$. Então:

- (A) $\log_3(x) = y$ (B) $x = 3e^y$ (C) $\frac{\ln(x)}{\ln(y)} = 3$ (D) $x = y^3$



12. Em qual dos seguintes conjuntos é válida a igualdade $\ln(x^2) = 2 \ln(x)$?

- (A) $\mathbb{R}$ (B) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (C) $\mathbb{R}^+$ (D) $\mathbb{R}_0^+$



13. Seja D o domínio da função f definida por $f(x) = \frac{\log(x-2)}{e^x - 5 - 1}$. Então:

- (A) $D =]2, +\infty[$ (B) $D = \mathbb{R} \setminus \{5\}$ (C) $D =]2, 5[\cup]5, +\infty[$ (D) $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$



14. O conjunto-solução da equação $4^x = 5^x$ é igual a:

- (A) $\emptyset$ (B) $\{0\}$ (C) $\{0, 1 - \log_4(5)\}$ (D) $\{0, 1 - \log_5(4)\}$



15. O conjunto-solução da equação $\log_{\sqrt{x}}(3) = 1$ é:

- (A) $\{-3, 3\}$ (B) $\{9\}$ (C) $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ (D) $\emptyset$



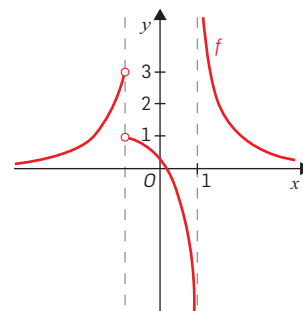
16. Numa cultura de bactérias, o número de bactérias triplica a cada 15 minutos. No instante inicial existem 1000 bactérias. A função P que dá o número de bactérias, em milhares, que existem na cultura, t horas após o instante inicial, é:

- (A) $P(t) = 100 \times 3^{4t}$ (B) $P(t) = 3^{4t}$ (C) $P(t) = 100 \times 3^t$ (D) $P(t) = 3^t$



17. Na figura está representada graficamente parte de uma função f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Seja (x_n) uma sucessão, $n \in \mathbb{N}$ tal que $\lim f(x_n) = -\infty$. Qual das expressões seguintes pode ser o termo geral da sucessão (x_n) ?

- (A) $\ln\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]$ (B) $-1 + \frac{1}{n}$ (C) $-1 - \frac{1}{n}$ (D) $1 + \frac{1}{n}$



18. Considera a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{se } x < 1 \\ \ln(x) + 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Seja (u_n) uma sucessão de números reais tal que $\lim f(u_n) = 3$. Qual das expressões seguintes pode definir o termo geral da sucessão?

- (A) $1 + \frac{(-1)^n}{n}$ (B) $\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$ (C) $\frac{1}{n}$ (D) $\frac{n^2 - n + 2}{n}$



19. Para um certo valor de a positivo, é contínua em $\mathbb{R}$ a função f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^x + 5 & \text{se } x \leq a \\ \ln(x) + e^x & \text{se } x > a \end{cases}$$

Qual é o valor de a ?

- (A) $\ln(5)$ (B) e^5 (C) 5 (D) $\frac{1}{5}$

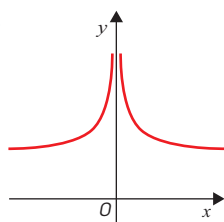
Itens de seleção

20.

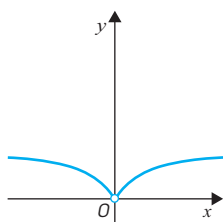


Uma representação gráfica da função f definida por $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$ pode ser:

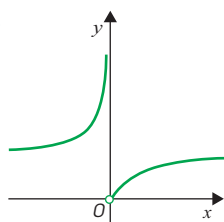
(A)



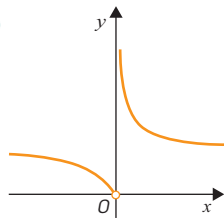
(B)



(C)



(D)



GAVE

21.

Seja f a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-3e^x + 3}{x} & \text{se } x < 0 \\ \frac{[\ln(2x+1)]^2 - \ln(2x+1)^3}{2x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

(B)

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -3$$

(C)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

(D)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \frac{[\ln(2x+1)]^2}{2x} \right] = -\infty$$

22.



Para um certo valor de k , existe derivada no ponto de abscissa 0 da função f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} (x^2 + kx + 1)e^x & \text{se } x < 0 \\ \ln(kx + e) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Qual é o valor de k ?

(A)

$$\frac{e}{1-e}$$

(B)

$$\frac{1}{1-e}$$

(C)

$$\frac{1-e}{e}$$

(D)

$$e$$

23.



Na figura estão representadas:

- parte do gráfico da função g , de domínio $\mathbb{R}^-$, definida por $g(x) = \ln(-x)$;
- uma reta t tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa a .

A inclinação da reta t é 135° . Indica o valor de a .

(A)

$$-1$$

(B)

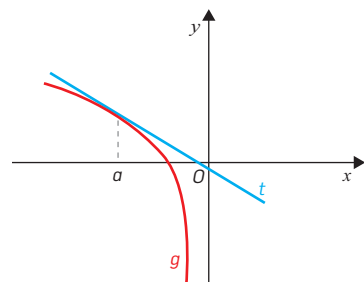
$$-\sqrt{3}$$

(C)

$$-\sqrt{2}$$

(D)

$$-\frac{1}{2}$$



24.



A reta de equação $y = e$ é tangente ao gráfico da função:

(A)

$$f(x) = e^{x^2+x}$$

(B)

$$g(x) = \ln(x)$$

(C)

$$h(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

(D)

$$i(x) = \frac{e^x}{x}$$

25.

Chamam-se cosseno hiperbólico de x e seno hiperbólico de x , e representam-se, respetivamente, por $\cosh x$ e $\sinh x$, às expressões $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ e $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. O valor de $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2$ é igual a:

(A)

$$-1$$

(B)

$$1$$

(C)

$$0$$

(D)

Nenhuma das opções anteriores.

26.



Sejam a e b números reais maiores do que um e c um número real positivo. Qual das expressões seguintes é igual a $a^{\frac{\log_b(c)}{\log_b(a)}}$?

- (A) c (B) $c \times a$ (C) $a^{\log_b(c)} - a^{\log_b(c)}$ (D) $\frac{c}{a}$

27.

Seja f a função definida por $f(x) = \log\left(\frac{x-2}{x-3}\right)$. Qual é o domínio de f ?

- (A) $]3, +\infty[$ (B) $]-\infty, 2[\cup]3, +\infty[$ (C) $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ (D) $\mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$

28.



Sabendo que $\ln(a) = k$ e que $g(x) = \ln((ex^3)^5)$, em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, o valor de $g(a)$ é:

- (A) $15k + 5$ (B) k^{15} (C) $15k$ (D) $15k + 15$

29.

Quanto zeros tem a função f definida por $f(x) = \log(x-5)^2 + \log(x+5)^2 - \log(25)$?

- (A) Um (B) Dois (C) Três (D) Quatro

30.



Sejam a e b dois números reais maiores do que 1 e tais que $\log_a(b) = 3$. O valor de $\log_b\left(\frac{a^4}{\sqrt[4]{b}}\right)$ é:

- (A) $\frac{13}{12}$ (B) $\frac{12}{13}$ (C) $\frac{47}{4}$ (D) $\frac{4}{47}$

31.

O gráfico da função f , definida por $f(x) = e^{2x}$, intersesta a reta de equação $y = a$, com $a > 0$, em:

- (A) dois pontos, de coordenadas $(-2, a)$ e $\left(\frac{a}{2}, a\right)$.
 (B) um ponto, de coordenadas $\left(\ln\left(\frac{a}{2}\right), a\right)$.
 (C) um ponto, de coordenadas $(\ln(\sqrt{a}), a)$.
 (D) nenhum ponto.

32.

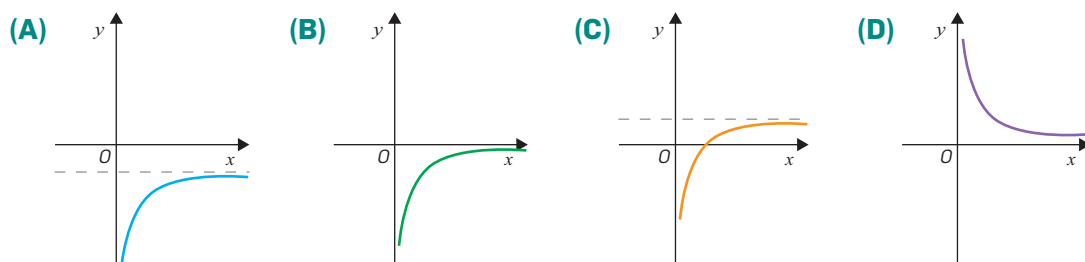
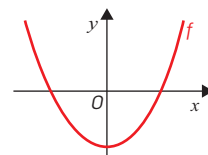
Considera a função g , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \log_2(x)$. Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$ tal que $f'(2) = \ln(2)$. Indica o valor de $(f \circ g)'(4)$.

- (A) $\frac{\ln(2)}{\ln(16)}$ (B) $\ln\left(\frac{1}{8}\right)$ (C) $\frac{1}{\ln(16)}$ (D) $\frac{1}{\ln(2)}$

33.



Na figura está representada graficamente, num referencial o.n. Oxy , parte da função quadrática f , de domínio $\mathbb{R}$. Seja h a função definida por $h(x) = f(x) + \ln(x)$. Em qual das opções seguintes pode estar representada graficamente parte da função h'' , segunda derivada de h ?



Itens de construção



13. Considera, em $\mathbb{R}$, a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \ln(2-x) + x & \text{se } x < 1 \\ e^{1-x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

13.1. Estuda a continuidade da função f .

13.2. Justifica, aplicando o teorema de Bolzano, que a função f tem pelo menos um zero no intervalo $]-2, -1[$.

13.3. Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, determina o zero referido na alínea anterior. Apresenta o resultado com aproximação às centésimas.

13.4. Estuda a função quanto à existência de assíntotas verticais e horizontais ao seu gráfico, escrevendo as suas equações, caso existam.



14. Sejam a e b dois números reais e seja g a função definida, em $]-1, +\infty[$, por:

$$g(x) = -x^2 + ax + b \ln(x+1)$$

Determina os valores de a e de b , para os quais as retas tangentes ao gráfico de g nos pontos de abscissa $x = 0$ e $x = \frac{3}{2}$ são paralelas ao eixo Ox .



15. Um recipiente contém uma certa quantidade de sal. Para dissolver o sal, enche-se o recipiente com água. Admite que a massa, em gramas, de sal ainda não dissolvido, t minutos após o início do processo de dissolução, é dada por $M(t) = 30 e^{-0,01t}$, $t \geq 0$.

15.1. Determina a massa de sal dissolvido ao longo da primeira meia hora. Apresenta o resultado em gramas, arredondado às unidades.

15.2. Utilizando métodos exclusivamente analíticos, estuda a função M quanto à monotonia e quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico. Interpreta as conclusões a que chegaste, no contexto do problema.



16. Foi administrado um analgésico a um doente às 6 horas da manhã de um certo dia. A concentração desse medicamento, em miligramas por mililitro de sangue, t horas após ter sido administrado, é dada por $C(t) = 3t e^{-0,2t}$.

16.1. Mostra que houve um instante, entre as 6 h 30 min e as 7 h, em que a concentração do medicamento foi 2 mg/ml.

16.2. Determina o instante em que a concentração de analgésico no sangue do doente foi máxima.



17. O número de eucaliptos, numa zona florestal, cresce segundo a lei $E(t) = 27 \times 1,3^{\frac{t}{2}}$, com t expresso em anos.

17.1. Quantos eucaliptos havia no início da contagem? E uma década depois? Apresenta o resultado com aproximação às unidades.

17.2. Quantos anos e quantos meses são necessários para que o número de eucaliptos existentes no início da contagem triplique? Em cálculos intermédios, conserva três casas decimais.

17.3. Calcula a taxa de variação em $t = 1$ e em $t = 10$. Apresenta os valores com aproximação às unidades e interpreta os resultados encontrados no contexto do problema.

- 18.** Simplifica as seguintes expressões, nos respetivos domínios.

18.1. $64^{\log_2(x)}$

18.2. $\log_3(9^x)$

18.3. $10^3 \log(x^2) - 5 \log(x)$

- 19.** Caracteriza a função inversa de cada uma das funções seguintes:

19.1. $f(x) = 3^{x+1}$

19.2. $g(x) = 2 + \log(x+4)$

19.3. $h(x) = 1 - 6 \times 4^{2x+3}$

19.4. $i(x) = 6 + 3 \log_5(x-2)$

- 20.** Determina x de modo que $2 < 27 - 5^{7-2x} < 22$.

- 21.** Resolve as equações seguintes:

21.1. $2^{x+5} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

21.2. $25^{x^2-2x} = 5^{x^2-3}$

21.3. $4 \times 5^{3x+1} = 20 \times 25^{x+4}$

21.4. $x^3 \times 3^x = 3^{x+3}$

21.5. $2x \times 5^x = 5^{x-1}$

21.6. $-3^{2x-1} + 28 \times 3^{x-2} = 1$

21.7. $\frac{3^x(x^2-x)+4}{3^{x+1}+2} = 2$

21.8. $\frac{50}{25^{x^2}+25} = \frac{2}{1+125^{x^2+x}}$

21.9. $2^x - 2^{1-x} - 1 = 0$

21.10. $3^x + 1 = 10 \times 3^{2-x}$

- 22.** Resolve as equações seguintes:

22.1. $e^{2x} - 10 = 0$

22.2. $(e^x + 1)(e^x - 2) = 0$

22.3. $e^{2x} - 4e^x = -3$

22.4. $e^x + 2e^{-x} = 3$

22.5. $e^{x-2} = \frac{4e^{-x}+4}{e^2}$

22.6. $2e^x - 10 = -12e^{-x}$

- 23.** Resolve as inequações seguintes:

23.1. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} < 9^{2-x}$

23.2. $(0,1)^{x-x^2} \leq 0,01$

23.3. $3^{x^2} > 9$

23.4. $5^{-x^2} \leq 125$

23.5. $3^x \geq 2^x$

23.6. $6^x \geq 7^x$

23.7. $(5-x^2) \pi^x \leq 0$

23.8. $5^{x+1} < x^2 \times 5^x$

23.9. $x^2 \times 3^x < 3^{x+3}$

23.10. $\frac{4-x^2}{e^{x^2+1}} > 1$

23.11. $4x \leq \sqrt[3]{2^{3x+6}}$

23.12. $4x + 2 \leq 9 \times 2^{x-1}$

23.13. $3^x \leq 27^{\frac{1}{x}}$

23.14. $81 \times 3^{2x-3} \leq \frac{9^x}{x}$

- 24.** Resolve as inequações seguintes:

24.1. $1 - 2e^x > 0$

24.2. $(4x-5)(e^x-2) \leq 0$

24.3. $e^{2x} - 5e^x + 6 > 0$

24.4. $e^x + e^{-x} > 2$

Itens de construção



25. Resolva as equações seguintes:

25.1. $3^{-2 + \log_3(x)} = \log_2(\sqrt{2})$

25.3. $2^1 + \log_2(3x) = \log_2(2^{36})$

25.2. $10^1 + \log(x^2) = \log(20) + \log(25) - \log(5)$

25.4. $4^4 \log_4(x) - \log_4(x^2) = 5$



26. Resolva as equações seguintes:

26.1. $\ln(x^2 - 1) - \ln(x - 1) = 0$

26.3. $(\ln x)^2 - 2 \ln(x) - 3 = 0$

26.5. $\log(x^2 - 4) + \log(x + 22) = 3 \log(x + 2)$

26.7. $\log_3(x^5) - x \log_3(x) = 0$

26.9. $\frac{10}{10 + 4 \log_2(x^2 - 4x)} = \frac{1}{3}$

26.11. $2 \ln(2x + 1) = \ln(x^2)$

26.13. $\log((x + 1)^2) + \log((x + 9)^2) = 2 \log(9)$

26.2. $\log(x^2) = 2 \log(5)$

26.4. $4(\ln(x))^2 - 3 \ln(x) = 7$

26.6. $\log_3(x^2 + 2) - \log_3(2x - 1) = 1$

26.8. $3 + \log_7(3x + 5)^2 = 5$

26.10. $\log_2(x) + 3 \log_4(x) = 5$

26.12. $\log((x + 3)(x - 8)) + \log\left(\frac{x + 3}{x - 8}\right) = 2$

26.14. $\log_{25}(x - 1) = \log_5(\sqrt{10x - 4}) - \log_5(x + 2)$



27. Determina o conjunto-solução das inequações seguintes:

27.1. $\log_{\frac{1}{2}}(3x - 1) \geq \log_{\frac{1}{2}}(2x + 3)$

27.3. $\log_{\frac{1}{2}}(x + 5) > 0$

27.5. $\frac{\ln(x) - 2}{3^x - 27} \geq 0$

27.7. $|2 + \log_2(x)| \geq 3$

27.2. $(\ln(x))^2 - \ln(x^2) > 0$

27.4. $\ln(3x^2 - x) \leq \ln(x + 1)$

27.6. $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - x - \frac{3}{4}\right) > 2 - \log_2(5)$

27.8. $-3(\log_3(x))^2 - 5 \log_3(x) + 2 \geq 0$



28. **28.1.** Considera o polinómio $P(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$.

a) Sabendo que 2 é uma raiz do polinómio, fatoriza $P(x)$.

b) Resolve a equação $P(x) = 0$.

28.2. Resolva as equações seguintes:

a) $2 \ln(x) + \ln(x - 1) = \ln(14x - 24)$

b) $e^{2x} - e^x + 24e^{-x} - 14 = 0$



29. Considera as funções f e g , ambas de domínio $\mathbb{R}$, definidas por $f(x) = 8^{2x} - 4 \times 8^x + 4$ e $g(x) = 8^x - 2$. Considera também a função $h = \frac{f}{g}$.

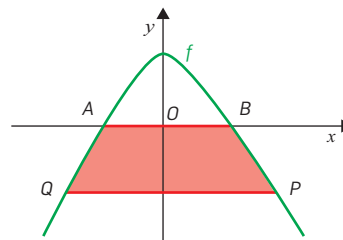
29.1. Caracteriza a função h .

29.2. Determina os pontos de interseção de h com os eixos coordenados.

29.3. Resolve a inequação $f(x) > 4 \times g(x)$.

- 30.** Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = -5 \ln(x^2 + 1) + 5$$



- 30.1.** Determina a ordenada do ponto de interseção do gráfico da função f com o eixo Oy .
- 30.2.** Mostra que o gráfico da função f é simétrico relativamente ao eixo Oy .
- 30.3.** Sejam A e B os pontos de interseção do gráfico da função f com o eixo Ox (A é o ponto de abscissa negativa e B é o ponto de abscissa positiva). Considera que um ponto P se desloca ao longo do gráfico da função f , no quarto quadrante (P nunca coincide com B).
- Para cada posição do ponto P , seja Q o simétrico de P em relação ao eixo Oy .
- Seja g a função que à abscissa x do ponto P faz corresponder a área do trapézio $[ABPQ]$.
- Caracteriza a função g , indicando o domínio e a expressão analítica.

- 31.**



Admite que o número de indivíduos de uma colónia de leveduras, t dias após um determinado instante inicial, é dado, aproximadamente, por $P(t) = 2000e^{0,25t}$, com $t \geq 0$.

Resolve os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

- 31.1.** Indica o número de indivíduos dessa população no instante inicial.
- 31.2.** Qual é o número aproximado de indivíduos dessa população, após uma semana desde o início da contagem?
- 31.3.** Determina ao fim de quanto tempo o número de indivíduos desta colónia de leveduras é igual a 4 milhares. Apresenta o resultado em dias e horas (horas arredondadas às unidades). Em eventuais cálculos numéricos, conserva, no mínimo, três casas decimais.
- 31.4.** Prova que $\frac{P(t+1)}{P(t)}$ é uma constante. Determina o seu valor arredondado às centésimas e interpreta o valor obtido no contexto do problema.

- 32.**

Um avô deposita 500 euros num banco a um juro composto de 4% ao ano, no dia do nascimento da sua neta.

- 32.1.** Ao fim de um ano, qual é, em euros, o capital acumulado? E ao fim de dois anos?
- 32.2.** Caracteriza a função f , que dá o capital acumulado ao fim de x anos.
- 32.3.** Determina o capital acumulado ao fim de 5 anos e 146 dias (admite que o ano tem 365 dias). Apresenta o resultado em euros, aproximado aos cêntimos.
- 32.4.** Quanto tempo demora a acumular um capital de 2000 euros?
- Apresenta o resultado em anos e dias (dias aproximados às unidades).
- 32.5.** Calcula $\frac{f(x+1)}{f(x)}$ e interpreta o valor obtido.
- 32.6.** No dia em que a neta completar 18 anos, o avô vai levantar o dinheiro e vai oferecê-lo à neta. Quanto cresceu, em percentagem, o capital, durante os 18 anos?
- Apresenta o resultado arredondado às unidades.
- 32.7.** Escreve $f(x)$ na forma ae^{bx} , com b arredondado às milésimas.

Itens de construção

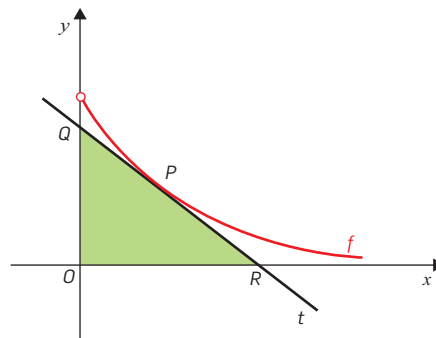


65. Seja f a função definida, em $\mathbb{R}^+$, por $f(x) = e^{-x+1}$.

Admite que um ponto P se move ao longo do gráfico da função f .

Para cada posição do ponto P , seja t a reta tangente ao gráfico de f no ponto P .

Sejam Q e R os pontos de interseção da reta t com os eixos Oy e Ox , respetivamente.



Determina a abcissa do ponto P , para a qual o triângulo $[OQR]$ tem área máxima.



66. A função g , definida em $[0, +\infty[$ por $g(x) = 40 \times 1,002^x$, dá-nos o número aproximado de efetivos de uma população de aves, x dias após o início do dia 1 de março de 2013.



66.1. Quantas aves havia nesta população, no início do dia 1 de março de 2013?

66.2. Qual é a taxa de crescimento mensal da população? Apresenta o resultado sob a forma de percentagem arredondada às unidades.

Nota: considera que um mês é constituído por 30 dias.

66.3. Considera os efetivos da população num certo instante x . Quanto tempo depois desse instante é que o número de efetivos da população é duas vezes maior? Apresenta o resultado em dias, aproximado às unidades.



67. Resolve as equações seguintes:

67.1. $-16^{x+1} + 20 \times 4^{2x+1} = 4$

67.2. $\frac{8^x(x^2 - 3x) + 16}{8^x - 8} = -2$

67.3. $4^x + 6^x = 2 \times 9^x$

67.4. $\frac{3^x + 3^{-x}}{3^x - 3^{-x}} = 2$



68. Resolve a inequação $-2^{2x+1} + 4 \leq -31 \times 2^{x-1}$.



69. Resolve a equação $\frac{1}{7} \log(x^{\log(x^7)}) - \log(x^5) + 4 = 0$.



70. Resolve as inequações seguintes:

70.1. $x^3 \ln(3x) + x^3 \log_{\frac{1}{e}}(x+6) \leq 0$

70.2. $-\log_3(2x) < 2 + \log_3\left(\frac{1-x}{x}\right)$

70.3. $x \log_3(x^2 - 4) > x$

70.4. $-\log_2(x-1) \times \log_2(3x-4) > 0$



71. Determina os valores de k , para os quais a equação $x^2 - 4x + \log_2(k) = 0$ admite duas soluções reais.



72. Para certos números reais a e b , tem-se que $b = \log_2(\sqrt{a+4} + \sqrt{a-4})$.

Exprime $\log_2(\sqrt{a+4} - \sqrt{a-4})$ em função de b .

73.

Durante a realização de uma experiência num laboratório, ao misturar determinados reagentes, ocorre uma reação completa, que decorre à medida que o tempo passa, até que os reagentes se esgotem. A percentagem de reagente que ainda falta consumir, a partir do momento em que a reação se iniciou, é dada por $P(t) = \frac{100}{3} \times (2^{2(1-t)} - 1)$, com t em minutos.

73.1. Nestas condições, determina ao fim de quanto tempo a reação termina.

73.2. Quando 70% dos reagentes já tinham sido consumidos na reação, juntou-se um composto adicional. Quanto tempo tinha passado, desde o início da reação? Apresenta o resultado em segundos, com aproximação às unidades.

73.3. Caracteriza a função inversa da função P , no contexto da situação descrita.

73.4. Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, determina quanto tempo é necessário para que a quantidade de reagentes que ainda falta consumir seja metade da quantidade inicial. Apresenta o resultado em segundos, com aproximação às unidades. Apresenta na tua resposta os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráfico(s) e coordenadas de pontos relevantes.

74.



A magnitude (M) de um sismo, medida numa certa escala, e a energia total (E), medida em Joule, libertada por esse sismo, estão relacionadas da seguinte forma:

$$\log(E) = 5,24 + 1,44M$$

Determina a magnitude de um sismo cuja energia total libertada seja o quádruplo da energia total libertada durante o terramoto de Lisboa de 1755, que teve magnitude 8,6. Apresenta o resultado na forma de dízima, com aproximação às décimas.

75.

Um entomologista estuda a evolução de populações de borboletas em três jardins. Admite que o número, em milhares, de borboletas existentes em qualquer um desses jardins é dado, aproximadamente, por $N(t) = \frac{20}{1 + e^{-kt}}$ (o valor de k depende do jardim), onde t designa o tempo, em dias, após as zero horas do dia 1 de janeiro de um determinado ano.

75.1. No jardim **A**, o número de borboletas às seis horas do dia 10 de janeiro, desse ano, era 17 300. Determina o valor de k , relativo a esse jardim. Apresenta o resultado aproximado às décimas.

75.2. No jardim **B**, $k = 0,3$.

Num determinado dia (posterior a 1 de janeiro desse ano), procedeu-se à contagem dos indivíduos deste jardim. Três dias depois, à mesma hora, procedeu-se a uma nova contagem, tendo-se constatado que o número de borboletas aumentou 32%, relativamente à primeira contagem.

Determina quanto tempo decorreu, desde o dia 1 de janeiro até ao dia em que se realizou a primeira contagem. Apresenta o resultado em dias e horas (horas aproximadas às unidades). Nos cálculos intermédios utiliza três casas decimais.

75.3. Relativamente ao jardim **C**, sabe-se que às zero horas do dia 6 de janeiro havia mais 6000 borboletas do que no dia 2 de janeiro à mesma hora.

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, determina os possíveis valores de k correspondentes a este jardim. Apresenta os valores pedidos aproximados às centésimas.

• **Duração:** 150 minutos | **Tolerância:** 30 minutos

• Para responder aos itens de escolha múltipla, não apresentes cálculos nem justificações e escreve, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Na resposta aos itens de resposta aberta, apresenta todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresenta sempre o valor exato.

- | | | Cotação
(em pontos) |
|----|--|---|
| 1. | Considera todos os números naturais de seis algarismos diferentes que se podem formar com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5.

Destes números, quantos são múltiplos de 5 e têm os algarismos pares todos juntos?

(A) 24 (B) 32 (C) 36 (D) 44 | 8 |
| 2. | Sejam E um conjunto finito, não vazio, P uma probabilidade no conjunto $\mathfrak{P}(E)$ e A e B dois acontecimentos, ambos com probabilidade não nula.

Sabe-se que:
$\bullet P(\overline{A} \cup \overline{B}) = \frac{0,16}{P(A \cap B)}$
$\bullet P(A) = \frac{2}{3} P(A \cup B)$
$\bullet P(B) = 0,5$

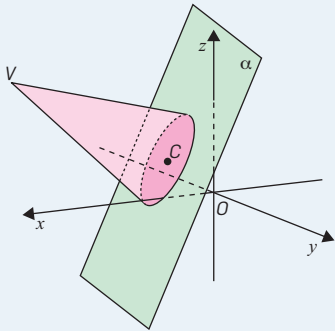
Qual é o valor de $P(A)$?

(A) 0,4 (B) 0,5 (C) 0,6 (D) 0,7 | 8 |
| 3. | Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um cone.

Sabe-se que:
$\bullet$ a base do cone está contida no plano α definido por $2x - y + z = 4$;
$\bullet$ o ponto C , centro da base do cone, tem coordenadas $(1, -1, 1)$;
$\bullet$ o vértice V do cone tem cota positiva.

3.1. Seja β o plano definido pela condição:
$x = 1 - 6y - 4z$

Averigua se os planos α e β são perpendiculares.

3.2. Sabendo que a altura do cone é igual a $4\sqrt{6}$ unidades de comprimento, determina as coordenadas do vértice V do cone. | 
12 |
| | 3.1. Seja β o plano definido pela condição:
$x = 1 - 6y - 4z$

Averigua se os planos α e β são perpendiculares.

3.2. Sabendo que a altura do cone é igual a $4\sqrt{6}$ unidades de comprimento, determina as coordenadas do vértice V do cone. | 12 |

Cotação
(em pontos)

8

4. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \ln\left(\frac{e^{-4}}{x}\right)$. Considera a sucessão de números reais (u_n) tal que $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{4n}$. Qual é o valor de $\lim f(u_n)$?

(A) 0

(B) e^{-4}

(C) 1

(D) e

5. Uma criança está a andar num balanço. Atrás do balanço, há um muro.

No instante em que a criança está a dar balanço, é iniciada a contagem do tempo.

Quinze segundos após esse instante, deixa de dar balanço e procura parar o balanço, arrastando os pés no chão.

Admite que a distância, em decímetros, da posição da cadeira ao muro, t segundos após o instante inicial, é dada por:

$$d(t) = \begin{cases} 20 + t \cos(\pi t) & \text{se } 0 \leq t < 15 \\ 20 + 15e^{15-t} \cos(\pi t) & \text{se } t \geq 15 \end{cases}$$

O argumento da função cosseno está expresso em radianos.

Resolve o item 5.1., recorrendo exclusivamente a métodos analíticos.

12

- 5.1. Justifica que houve, pelo menos, um instante, entre os catorze segundos e os dezasseis segundos após o início da contagem do tempo, em que a distância da posição da cadeira ao muro foi igual a 30 decímetros.

Se, em cálculos intermédios, procederes a arredondamentos, conserva, no mínimo, duas casas decimais.

12

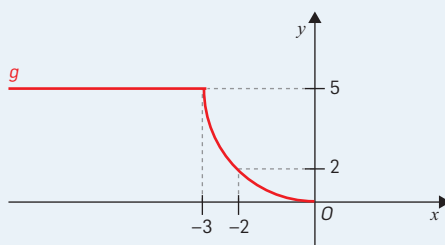
- 5.2. Determina, recorrendo à calculadora gráfica, o instante em que a distância da posição da cadeira ao muro é máxima e o valor da distância máxima.

Apresenta os dois valores arredondados às unidades.

Na sua resposta, reproduz, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que te permite(m) resolver o problema.

8

6. Considera a função f , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \log(x)$, e a função g , de domínio $\mathbb{R}$, da qual se sabe que é par, tem um único zero e parte da sua representação gráfica encontra-se na figura seguinte.



Qual das seguintes igualdades é verdadeira?

(A) $(f \times g)(3) < 0$

(B) $\left(\frac{f}{g}\right)\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

(C) $(f \circ g)(4) \geq 1$

(D) $(f^{-1} + f)(1) = 0$

Cotação
(em pontos)
8

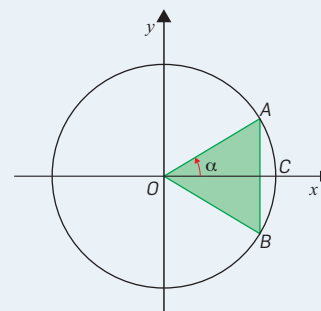
7. Na figura ao lado estão representados, em referencial o.n. Oxy , a circunferência trigonométrica e um triângulo $[OAB]$.

Os pontos A e B pertencem à circunferência. O segmento de reta $[AB]$ é perpendicular ao semieixo positivo Ox . O ponto C é o ponto de interseção da circunferência com o semieixo positivo Ox .

Seja α a amplitude do ângulo COA , $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Para um determinado valor de α , sabe-se que $\sin \alpha = \frac{2}{5}$.

O valor exato da área do triângulo $[OAB]$ é igual:

- (A) $\frac{\sqrt{21}}{25}$ (B) $\frac{2\sqrt{21}}{25}$ (C) $\frac{\sqrt{21}}{5}$ (D) $\frac{2\sqrt{21}}{5}$



8. Considera duas caixas, C_1 e C_2 . A caixa C_1 tem dez bolas, das quais seis são brancas e as restantes são pretas. A caixa C_2 tem sete bolas, umas brancas e outras pretas.

Considera a experiência que consiste em retirar, ao acaso, duas bolas da caixa C_1 , colocá-las na caixa C_2 e, em seguida, retirar, também ao acaso, duas bolas da caixa C_2 . Considera os acontecimentos:

A: "as bolas retiradas da caixa C_1 têm a mesma cor".

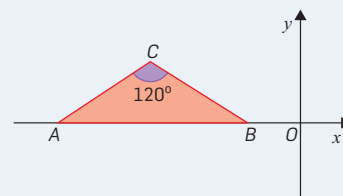
B: "as bolas retiradas da caixa C_2 são brancas".

Sabe-se que $P(B | \bar{A}) = \frac{1}{12}$. Interpreta o significado de $P(B | \bar{A})$ e determina quantas bolas brancas e quantas bolas pretas existiam inicialmente na caixa C_2 .

9. Na figura está representado, num referencial o.n. Oxy , o triângulo isósceles $[ABC]$.

Sabe-se que:

- os pontos A e B têm abscissa negativa e pertencem ao eixo Ox ;
- o ponto C tem ordenada positiva;
- $\angle ACB = 120^\circ$.



Qual poderá ser a equação vetorial da reta BC ?

- (A) $(x, y) = (0, -1) + k(-\sqrt{3}, -3), k \in \mathbb{R}$ (B) $(x, y) = (0, -1) + k(-\sqrt{3}, 3), k \in \mathbb{R}$
(C) $(x, y) = (0, 1) + k(3, -\sqrt{3}), k \in \mathbb{R}$ (D) $(x, y) = (0, -1) + k(-3, \sqrt{3}), k \in \mathbb{R}$

10. Considera uma função f , de domínio $\mathbb{R}$. Sabe-se que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = 0$, $f'(x) > 0$, para qualquer número real x e $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$ existe e é negativo, para qualquer número real x .

Considera as afirmações seguintes:

- (I) O gráfico da função f apresenta a concavidade voltada para baixo em todo o seu domínio.
(II) O gráfico da função f admite uma assíntota horizontal quando $x \rightarrow +\infty$.
(III) A reta de equação $y = 2x$ é perpendicular à reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abscissa 0.

Elabora uma composição na qual indiques, justificando, se cada uma das afirmações é verdadeira ou falsa.

Na tua resposta, apresenta três razões diferentes, uma para cada afirmação.

Cotação
(em pontos)

- 8 **11.** De uma função f , diferenciável em todo o seu domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que a inclinação da reta tangente ao seu gráfico no ponto de abscissa 3 é 60° .

De uma função g , de domínio $]-\infty, 3[$, sabe-se que a reta de equação $x = 3$ é assíntota vertical ao seu gráfico.

O valor de $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3}x - 3\sqrt{3}}{f(x) - f(3)} + \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x)}{g(x)}$ poderá ser:

- (A) 0 (B) 1 (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\sqrt{3}$

- 8 **12.** Seja (u_n) uma sucessão real, em que todos os termos são negativos. Sabe-se que, para todo o número natural n , $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) A sucessão (u_n) é decrescente.
(B) A sucessão (u_n) não é limitada.
(C) A sucessão (u_n) é uma progressão aritmética.
(D) A sucessão (u_n) é convergente.

- 13.** Seja f a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{\ln(-x)} & \text{se } x < 0 \wedge x \neq -1 \\ k & \text{se } x = 0 \\ \frac{\sin(2x)}{e^x - 1} + 3x & \text{se } x > 0 \end{cases}, \text{ com } k \in \mathbb{R}$$

Recorrendo a processos exclusivamente analíticos, resolve as alíneas seguintes.

- 10 **13.1.** Mostra que não existe nenhum valor real k tal que a função f seja contínua em $x = 0$.

- 12 **13.2.** Estuda a função f quanto à existência de assíntotas oblíquas ao seu gráfico e, caso existam, escreve as suas equações.

- 12 **13.3.** Considera agora a função g , de domínio $\mathbb{R}^-$, definida por $g(x) = \frac{\ln(-x)}{x^2}$. Estuda a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

- 8 **14.** Considera, no plano complexo, um ponto A , afixo de um certo número complexo z .

Sabe-se que A pertence ao primeiro quadrante e que $\operatorname{Re}(z) > \operatorname{Im}(z)$.

A que quadrante do plano complexo pertence o afixo de $\frac{z}{i} - \bar{z}$?

- (A) Primeiro (B) Segundo (C) Terceiro (D) Quarto

- 15.** Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

- 12 **15.1.** Considera:

$$z_1 = -1 - \sqrt{3}i \quad \text{e} \quad z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

Determina o menor valor natural n para o qual $(z_1 \times z_2)^n$ é um número real positivo.

- 10 **15.2.** Prova que:

$$|z + i|^2 - |z - i|^2 = 4 \operatorname{Im}(z)$$

Título
EXAME
Matemática A – 12.º Ano

Autoras
Daniela Raposo
Luzia Gomes

Revisão Científica
Filipe Carvalho
Universidade do Minho

Design Gráfico
LEYA, SA

Capa
LEYA, SA

Execução Gráfica
EIGAL

ISBN
978-989-660-530-8

Ano / Edição
2020 / 3.ª Edição

Depósito Legal
N.º 445 456/18



© 2020, LEYA, SA
uma editora do Grupo LeYa

Internet
www.leya.pt

Livraria Online
www.leyaonline.com

Apoio ao Professor
Telefones: 707 231 231 / 210 417 495
E-mail: apoio@leyaeducacao.com

LIVRARIAS

Aveiro

LeYa em Aveiro
Centro Comercial Glicínias Plaza, Lj 68-70
Rua D. Manuel Barbuda e Vasconcelos
3810-498 Aveiro

Funchal

LeYa no Funchal
Rua do Hospital Velho, 44
Sta. Maria Maior
9060-129 Funchal

Lisboa

LeYa na Buchholz
Rua Duque de Palmela, 4
1200-098 Lisboa

Porto

LeYa na Latina
Rua de Santa Catarina, 2-10
4000-441 Porto

Viseu

LeYa na Pretexto
Rua Formosa, 83
3500-135 Viseu



exame

Nesta coleção:

9.º ano

Matemática
Português

11.º ano

Biologia e Geologia
Filosofia
Física e Química A
Geografia A
MACS

12.º ano

História A
Matemática A
Português

Com este livro podes:

- **Aumentar** a tua compreensão com a explicação de todos os conteúdos.
- **Reforçar** o teu desempenho através de 2400 questões com resposta detalhada.
- **Melhorar** os teus resultados com feedback imediato online do teste diagnóstico e do simulador de exame.
- **Complementar** o teu estudo com recurso a vídeos tutoriais sobre os conteúdos-chave.

Bom estudo.

Apoio e recursos digitais em:

www.exame.leyaeducacao.com

