

RESOLUÇÕES
GDAA

11.º ANO
GEOMETRIA
DESCRITIVA A

JOSÉ FERNANDO DE SANTA-RITA

Vol. **1**
Vol. **2**



Texto

PARTE 3 DUPLA PROJEÇÃO ORTOGONAL

- REPRESENTAÇÃO DIÉDRICA

13 PARALELISMO	1
14 PERPENDICULARIDADE E ORTOGONALIDADE	13
15 PROCESSOS GEOMÉTRICOS AUXILIARES II	32
16 REPRESENTAÇÃO DE FIGURAS PLANAS III	57
17 PROBLEMAS MÉTRICOS	71
18 REPRESENTAÇÃO DE SÓLIDOS III	122
19 PLANOS TANGENTES ÀS SUPERFÍCIES CÔNICA E CILÍNDRICA	139
20 SECÇÕES PLANAS	154
21 SOMBRAS	203

PARTE 4 REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA

23 AXONOMETRIAS ORTOGONAIS: ISOMETRIA, DIMETRIA E TRIMETRIA	280
24 AXONOMETRIAS CLINOGONAIS (OU OBLÍQUAS): CAVALEIRA E PLANOMÉTRICA	310
25 REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA DE FORMAS BI E TRIDIMENSIONAIS	328

Nota: O capítulo 22 não tem exercícios.

RESOLUÇÕES
GDA
11.º ANO
GEOMETRIA
DESCRITIVA A

Vol. **1**



SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

NOTA: Se bem que os dados métricos dos enunciados sejam em centímetros, as soluções aqui apresentadas não consideraram o centímetro como unidade – a escala utilizada foi de $\frac{1}{2}$, o que significa que a cada centímetro do enunciado corresponderá 0,5 cm nestas soluções. Tal opção justifica-se pelo facto de o autor considerar que, no sentido do estudante, o objetivo da consulta das soluções dos exercícios deve ser mais a verificação da correção dos raciocínios e dos traçados do que a mera comparação métrica das resoluções (a do aluno e a das soluções). Dessa forma, considerou-se de maior utilidade o desenvolvimento dos relatórios e a resolução gráfica dos problemas a uma escala que, permitindo uma comparação visual dos exercícios, evite qualquer tentativa de comparação métrica dos mesmos.

13 PARALELISMO

1.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as retas p e p' , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta p está definida por dois pontos – os pontos A e B . A reta p' está definida por dois pontos – os pontos C e D .

Resolução:

Retas de perfil têm sempre as projeções homónimas paralelas entre si, quer sejam paralelas ou não. Para averiguar se as retas p e p' são paralelas, comecemos por admitir que as duas retas são efetivamente paralelas. Nesse caso, as duas retas definirão um plano (retas paralelas são retas complanares).

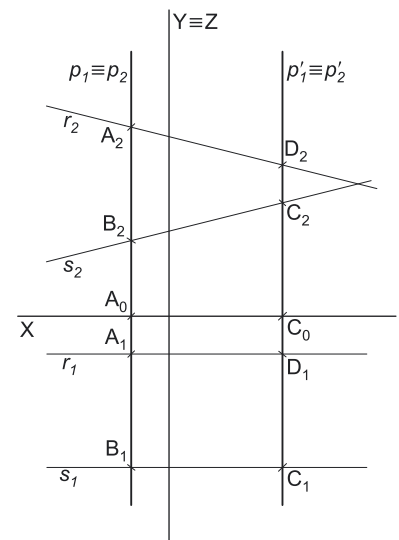
Os dados desse **suposto plano** são insuficientes para averiguar o pretendido, pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar desse **suposto plano**, reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Recorreu-se a uma reta auxiliar do **suposto plano** – a reta r . A reta r é concorrente com a reta p no ponto A e concorrente com a reta p' no ponto D (a reta r está definida por dois pontos – os pontos A e D).

Os dados desse **suposto plano** são ainda insuficientes para averiguar o pretendido, pelo que é necessário o recurso a outra reta auxiliar desse **suposto plano**, reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Recorreu-se a outra reta auxiliar do **suposto plano** – a reta s . A reta s é concorrente com a reta p no ponto B e concorrente com a reta p' no ponto C (a reta s está definida por dois pontos – os pontos B e C).

As retas r e s são retas **não complanares** (não são paralelas nem concorrentes), pelo que **não definem plano nenhum**. Assim, o **suposto plano** não existe – as retas p e p' **não são paralelas**.

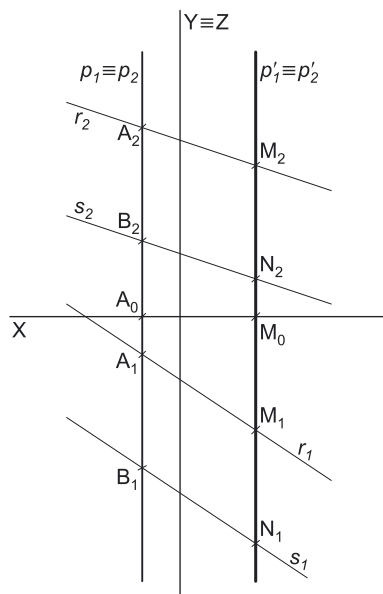
Traçado:

Os dados (as projeções das retas p e p') representaram-se a **médio**, bem como o eixo X (que é a linha estruturante do exercício). O que é pedido é uma conclusão, pelo que, neste exercício, não há nenhum elemento gráfico que se represente a **forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas r e s ou do eixo $Y \equiv Z$, que é uma linha de referência).



2.

Dados:



Em primeiro lugar, representaram-se a reta p e o ponto M , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta p está definida por dois pontos – os pontos A e B .

Resolução:

Em seguida, desenharam-se imediatamente as projeções da reta p' , passando pelas projeções do ponto M . No entanto, tendo em conta que as projeções da reta p' não verificam o **Critério e Reversibilidade**, não está garantido o paralelismo entre as duas retas (retas de perfil têm sempre as projeções homónimas paralelas entre si, quer sejam paralelas ou não). Por tudo isso, a reta p' não está totalmente definida – necessitamos de mais um ponto da reta p' (para além do ponto M) para a definirmos totalmente.

As retas p e p' são paralelas, pelo que são complanares, pelo que **definem um plano** (retas paralelas são retas complanares). Os dados desse plano são insuficientes para obter o pretendido (outro ponto da reta p'), pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar desse plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Recorreu-se a uma reta auxiliar do plano definido pelas retas p e p' – a reta r . A reta r é concorrente com a reta p no ponto A e concorrente com a reta p' no ponto M (a reta r está definida por dois pontos – os pontos A e M).

Os dados do plano são ainda insuficientes para obter o pretendido (o outro ponto da reta p'), pelo que é necessário o recurso a outra reta auxiliar desse plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Recorreu-se a outra reta auxiliar do **suposto plano** – a reta s . A reta s é concorrente com a reta p no ponto B e é paralela à reta r (a reta s está definida por um ponto e uma direção – o ponto B e a direção da reta r).

(continua na página seguinte)

RESOLUÇÕES

(continuação da página anterior)

As retas s e p' são retas complanares (estão, ambas, contidas no plano definido pelas retas p e p'), pelo que ou são paralelas ou são concorrentes. Não são paralelas, porque não têm as projeções homónimas paralelas entre si, pelo que são concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência – o ponto N . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta p' .

A reta p' , definida pelos pontos M e N , é uma reta de perfil paralela à reta p .

Traçado:

Os dados (as projeções da reta p) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta p' representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas r e s ou do eixo $Y \equiv Z$, que é uma linha de referência).

3.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as retas p e p' , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta p está definida por dois pontos – os pontos E e F . A reta p' está definida por dois pontos – os pontos M e N . As projeções das duas retas estão coincidentes, uma vez que as duas retas se situam no mesmo plano de perfil.

Resolução:

Não é possível averiguar o eventual paralelismo entre as duas retas de forma direta, uma vez que as projeções de ambas as retas não verificam o **Critério e Reversibilidade**, pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. Por outro lado, tendo em conta que as duas retas se situam no mesmo plano de perfil, o processo geométrico auxiliar a utilizar poderá ser o do rebatimento do plano de perfil que contém as duas retas.

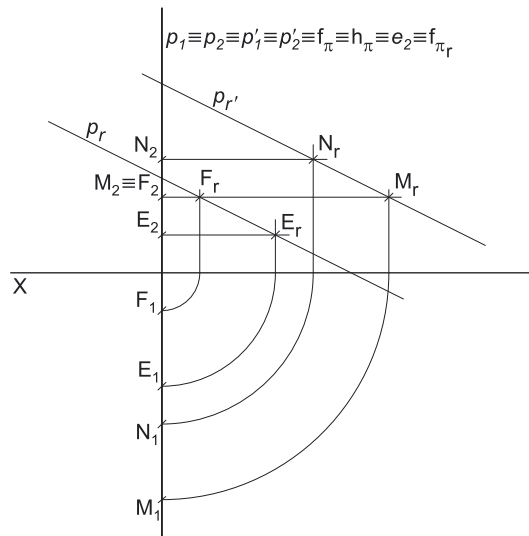
Nesse sentido, conduziu-se, pelas duas retas, o plano de perfil que as contém – o plano π . Em seguida, efetuou-se o rebatimento do plano π para o Plano Frontal de Projeção (a charneira foi f_π), rebatendo os pontos que definem as duas retas – os pontos E , F , M e N .

Em seguida, desenharam-se as duas retas em rebatimento. A reta p_r está definida pelos pontos F_r e E_r . A reta p'_r está definida pelos pontos M_r e N_r . Em rebatimento constata-se que as retas p_r e p'_r são efetivamente **paralelas**, pelo que, **no espaço**, as retas p e p' são duas retas paralelas.

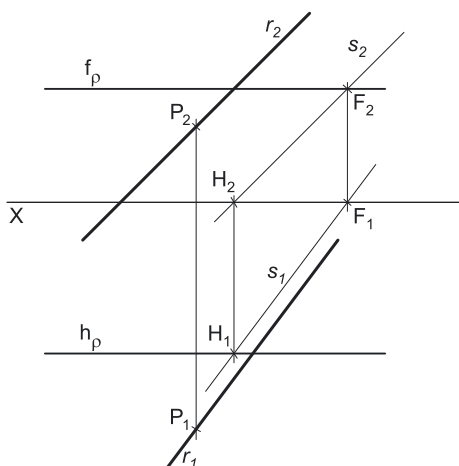
Note que este exercício poderia ser resolvido com o recurso, por exemplo, a uma mudança do diedro de projeção.

Traçado:

Os dados (as projeções das retas p e p') representaram-se a **médio**, bem como o eixo X (que é a linha estruturante do exercício). O que é pedido é uma conclusão, pelo que, neste exercício, não há nenhum elemento gráfico que se represente a **forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso de todos os traçados necessários à execução do rebatimento).



4.



Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto P , pelas suas projeções, bem como o plano ρ , pelos seus traços, em função dos dados. Em seguida, desenhou-se a projeção frontal da reta r (r_2), passando pela projeção frontal do ponto P (P_2) e fazendo, com o eixo X , o ângulo pedido.

Resolução:

Pretende-se uma reta r , paralela ao plano ρ e passando pelo ponto P . Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta r passa pelo ponto P (é dado no enunciado), pelo que já temos um ponto para definir a reta. Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Para a reta r ser paralela ao plano ρ , a reta r tem de verificar o **Critério de paralelismo entre retas e planos** em relação ao plano ρ , ou seja, a reta r tem de ser paralela a uma reta do plano ρ (a reta r tem de pertencer a uma «família» de retas que o plano ρ contenha).

Nesse sentido, recorreu-se a uma reta auxiliar do plano ρ (a reta s), cuja projeção frontal (s_2) seja paralela à projeção frontal da reta r (r_2). A reta s está definida por dois pontos (os pontos F e H – os seus traços) e pertence ao plano ρ , pois tem os seus traços sobre os traços homónimos do plano ρ .

Para a reta r ser paralela ao plano ρ , a reta r tem de ser paralela à reta s , pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta r . A reta r está definida por um ponto (o ponto P) e por uma direção (a direção da reta s), pelo que se conduziu r_1 (a projeção horizontal da reta r) por P_1 (a projeção horizontal do ponto P), paralela a s_1 (a projeção horizontal da reta s).

A reta r contém o ponto P e é paralela ao plano ρ , conforme era pedido.

Traçado:

Os dados (os traços do plano ρ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta r representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta s).

5.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto **P**, pelas suas projeções, bem como o plano α , pelos seus traços, em função dos dados. Em seguida, desenhou-se a projeção frontal da reta **h** (h_2), passando pela projeção frontal do ponto **P** (P_2) e paralela ao eixo **X** (trata-se de uma reta horizontal).

Resolução:

Pretende-se uma reta **h**, paralela ao plano α e passando pelo ponto **P**. Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta **h** passa pelo ponto **P** (é dado no enunciado), pelo que já temos um ponto para definir a reta. Falta-nos outro ponto ou uma direção.

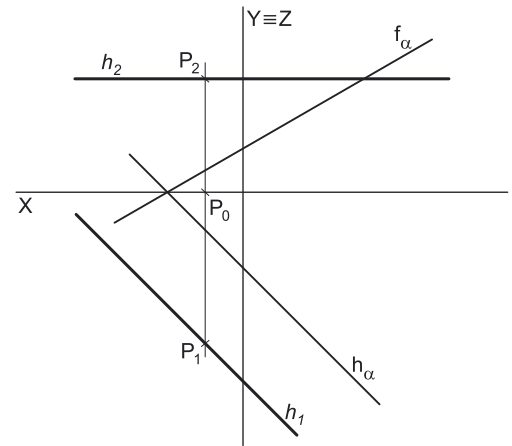
Para a reta **h** ser paralela ao plano α , a reta **h** tem de verificar o **Critério de paralelismo entre retas e planos** em relação ao plano α , ou seja, a reta **h** tem de ser paralela a uma reta do plano α (a reta **h** tem de pertencer a uma «família» de retas que o plano α contenha).

Acontece que já é conhecida a «família» das retas horizontais (de nível) do plano α , que é a «família» de retas do seu traço horizontal (h_α é uma reta horizontal do plano α , com cota nula). Assim, para a reta **h** ser paralela ao plano α , basta que a reta **h** seja paralela ao traço horizontal do plano (h_α), pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta **h**. A reta **h** está definida por um ponto (o ponto **P**) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano α), pelo que se conduziu h_1 (a projeção horizontal da reta **h**) por P_1 (a projeção horizontal do ponto **P**), paralela a h_α (o traço horizontal do plano α).

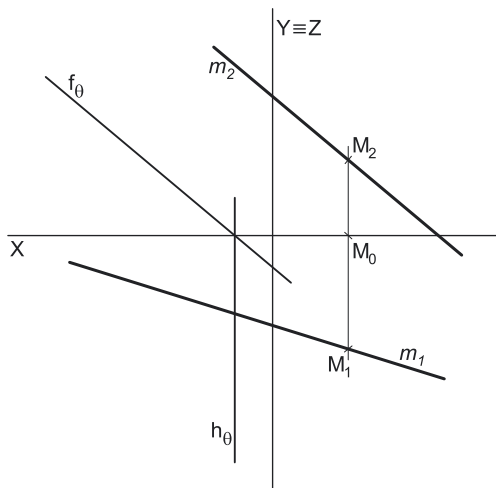
A reta **h** contém o ponto **P** e é paralela ao plano α , conforme era pedido.

Traçado:

Os dados (os traços do plano α) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta **h** representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do eixo $Y \equiv Z$, que é uma linha de referência).



6.



Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto **M**, pelas suas projeções, bem como o plano θ , pelos seus traços, em função dos dados.

Resolução:

Pretende-se uma reta **m**, paralela ao plano θ e passando pelo ponto **M**. Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta **m** passa pelo ponto **M** (é dado no enunciado), pelo que já temos um ponto para definir a reta. Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Para a reta **m** ser paralela ao plano θ , a reta **m** tem de verificar o **Critério de paralelismo entre retas e planos** em relação ao plano θ , ou seja, a reta **m** tem de ser paralela a uma reta do plano θ (a reta **m** tem de pertencer a uma «família» de retas que o plano θ contenha).

Acontece que o plano θ é um plano projetante frontal, pelo que as projeções frontais de todas as suas retas estão sobre o traço frontal do plano (f_θ). Assim, a projeção frontal da reta **m** tem de ser paralela ao traço frontal do plano θ (f_θ), o que nos garante imediatamente que a reta **m** será necessariamente paralela a uma reta qualquer do plano θ . Dessa forma, conduziu-se m_1 (a projeção horizontal da reta **m**) por M_1 (a projeção horizontal do ponto **M**), paralela a f_θ (o traço frontal do plano θ).

A projeção horizontal da reta **m** (m_1) pode ter uma direção qualquer, pois o paralelismo entre a reta **m** e o plano θ já está garantido.

Sublinha-se, no entanto, que única direção que a projeção horizontal da reta **m** (m_1) não pode ter é a perpendicular ao eixo **X** pois, nesse caso, seria uma reta de topo (não uma reta oblíqua, que é o pedido) e, apesar de ser paralela ao plano θ , não teria a projeção frontal já determinada.

A reta **m** contém o ponto **M** e é paralela ao plano θ , conforme era pedido.

Traçado:

Os dados (os traços do plano θ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta **m** representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do eixo $Y \equiv Z$, que é uma linha de referência).

7.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta r o ponto C , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta r está definida por dois pontos – os pontos A e B .

Resolução:

Pretende-se um plano α , paralelo à reta r e contendo o ponto C . Para o plano α ser paralelo à reta r , o plano α tem de verificar o **Crítério de paralelismo entre planos e retas** em relação à reta r , ou seja, o plano α tem de conter uma reta paralela à reta r (o plano α tem de conter a «família» de retas a que a reta r pertence).

Nesse sentido, recorreu-se a uma reta auxiliar do plano α (a reta s), paralela à reta r e passando pelo ponto C . A reta s está definida por um ponto (o ponto C) e uma direção (a direção da reta r). A reta s , sendo uma reta do plano α , garante-nos imediatamente os dois factos pedidos no enunciado:

1. que o ponto C pertence ao plano α (pois pertence a uma reta do plano α – a reta s);
2. que o plano α é paralelo à reta r (porque contém uma reta paralela à reta r – a reta s).

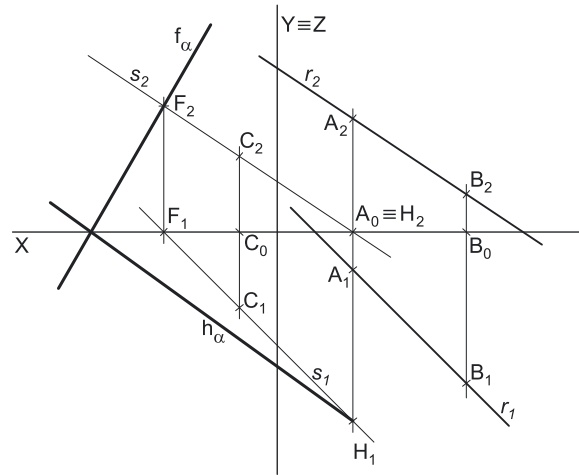
Em seguida, determinou-se o traço frontal da reta s (o ponto F) e pelo ponto F conduziu-se o traço frontal do plano, atendendo ao ângulo dado. O traço frontal do plano (f_α) está definido por um ponto (o ponto F) e uma direção (a direção dada no enunciado).

Em seguida, determinou-se o traço horizontal da reta s (o ponto H) e conduziu-se o traço horizontal do plano α (h_α) pelo ponto H , sendo concorrente com f_α no eixo X . O traço horizontal do plano α (h_α) está definido por dois pontos – o ponto H e o ponto de concorrência dos dois traços do plano.

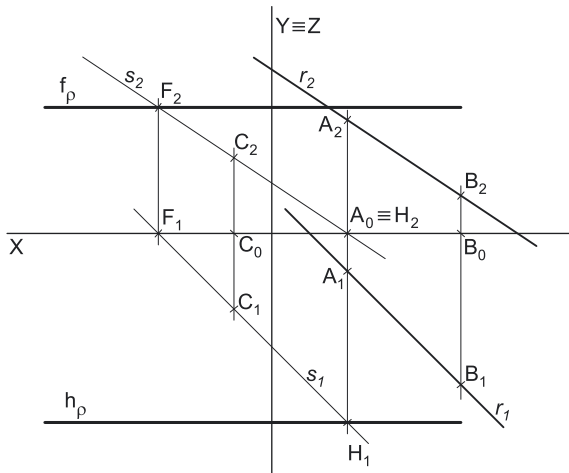
O plano α contém o ponto C e é paralelo à reta r , conforme era pedido.

Traçado:

Os dados (as projeções da reta r) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano α representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta s e do eixo $Y \equiv Z$, que é uma linha de referência).



8.



Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta r o ponto C , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta r está definida por dois pontos – os pontos A e B .

Resolução:

Pretende-se um plano ρ , de rampa, paralelo à reta r e contendo o ponto C . Para o plano ρ ser paralelo à reta r , o plano ρ tem de verificar o **Crítério de paralelismo entre planos e retas** em relação à reta r , ou seja, o plano ρ tem de conter uma reta paralela à reta r (o plano ρ tem de conter a «família» de retas a que a reta r pertence).

Nesse sentido, recorreu-se a uma reta auxiliar do plano ρ (a reta s), paralela à reta r e passando pelo ponto C . A reta s está definida por um ponto (o ponto C) e uma direção (a direção da reta r). A reta s , sendo uma reta do plano ρ , garante-nos imediatamente os dois factos pedidos no enunciado:

1. que o ponto C pertence ao plano ρ (pois pertence a uma reta do plano ρ – a reta s);
2. que o plano ρ é paralelo à reta r (porque contém uma reta paralela à reta r – a reta s).

Em seguida, determinou-se o traço frontal da reta s (o ponto F) e pelo ponto F conduziu-se o traço frontal do plano ρ , que é uma reta fronto-horizontal. O traço frontal do plano (f_ρ) está definido por um ponto (o ponto F) e uma direção (a direção das retas fronto-horizontais).

Em seguida, determinou-se o traço horizontal da reta s (o ponto H) e conduziu-se o traço horizontal do plano ρ (h_ρ) pelo ponto H , que é outra reta fronto-horizontal. O traço horizontal do plano ρ (h_ρ) está definido por um ponto (o ponto H) e uma direção (a direção das retas fronto-horizontais).

O plano ρ é um plano de rampa, contém o ponto C e é paralelo à reta r , conforme era pedido.

Traçado:

Os dados (as projeções da reta r) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano ρ representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta s ou do eixo $Y \equiv Z$, que é uma linha de referência).

9.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta f o ponto N , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta f está definida por um ponto (o ponto M) e pela sua direção (a direção dada no enunciado).

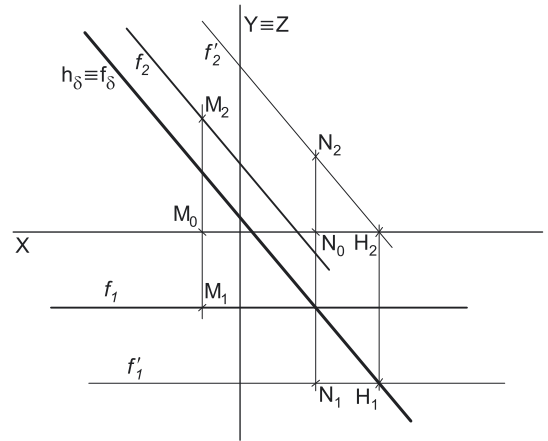
Resolução:

Pretende-se um plano δ , oblíquo, paralelo à reta f e contendo o ponto N . Para o plano δ ser paralelo à reta f , o plano δ tem de verificar o **Critério de paralelismo entre planos e retas** em relação à reta f , ou seja, o plano δ tem de conter uma reta paralela à reta f (o plano δ tem de conter a «família» de retas a que a reta f pertence).

Nesse sentido, recorreu-se a uma reta auxiliar do plano δ (a reta f'), paralela à reta f e passando pelo ponto N . A reta f' é uma reta frontal (de frente) do plano δ e está definida por um ponto (o ponto N) e uma direção (a direção da reta f). A reta f' , sendo uma reta do plano δ , garante-nos imediatamente os dois factos pedidos no enunciado:

1. que o ponto N pertence ao plano δ (pois pertence a uma reta do plano δ – a reta f');
2. que o plano δ é paralelo à reta f (porque contém uma reta paralela à reta f – a reta f').

Em seguida, determinou-se o traço horizontal da reta f' (o ponto H) e por H_1 (a projeção horizontal do ponto H) conduziu-se o traço horizontal do plano δ (h_δ). Tendo em conta que o enunciado pede especificamente que o plano tenha os seus traços coincidentes, já sabemos a direção (no papel) de h_δ (o traço horizontal do plano δ) – é paralelo à projeção frontal da reta f (f_2).



O traço frontal do plano δ (f_δ) é concorrente com h_δ num ponto do eixo X , pelo que já temos um ponto para definir f_δ (o traço frontal do plano δ). Falta-nos outro ponto ou uma direção, para definir f_δ . A reta f' é uma reta frontal (de frente) do plano δ e retas frontais (de frente) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço frontal do plano (que é uma reta frontal do plano com afastamento nulo). Nesse sentido, o traço frontal do plano δ é paralelo à reta f' , pelo que já temos a direção que nos faltava para definir o traço frontal do plano – a direção das retas frontais (de frente) do plano δ . O traço frontal do plano (f_δ) está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano δ – é paralelo à reta f').

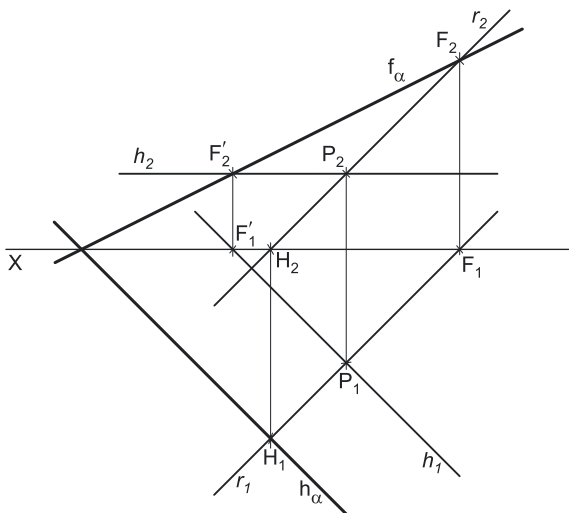
O plano δ tem os seus traços coincidentes, contém o ponto N e é paralelo à reta f , conforme era pedido.

Sublinha-se que os traços do plano δ estão coincidentes **apenas na folha de papel** pois, **no espaço**, os dois traços de um plano nunca estão coincidentes, a menos que se trate de um plano passante (e, nesse caso, os dois traços estão coincidentes no eixo X).

Traçado:

Os dados (as projeções da reta f) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano δ representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta f' ou do eixo $Y \equiv Z$, que é uma linha de referência).

10.



Dados:

Em primeiro lugar, desenharam-se as projeções das retas r e h , em função dos dados. A reta r é paralela ao $\beta_{2/4}$, pelo que tem as suas projeções paralelas entre si (retas paralela ao $\beta_{2/4}$ têm as suas projeções paralelas entre si). O plano α (o plano definido pelas duas retas) está representado pelas projeções das duas retas.

Resolução:

O **traço frontal do plano α** é a **reta de interseção** do plano α com o Plano Frontal de Projeção (é uma reta frontal do plano, com afastamento nulo). Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção.

Determinou-se o traço frontal da reta r , o ponto F . Já temos um ponto para definir o traço frontal do plano (f_α) – falta-nos outro ponto ou uma direção. Em seguida, determinou-se o traço frontal da reta h , o ponto F' . Já temos o ponto que nos faltava para definir o traço frontal do plano (f_α) – f_α (o traço frontal do plano α) está definido por dois pontos (os pontos F e F').

O **traço horizontal do plano α** é a **reta de interseção** do plano α com o Plano Horizontal de Projeção (é uma reta horizontal do plano, com cota nula). Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção.

Determinou-se o traço horizontal da reta r , o ponto H . Já temos um ponto para definir o traço horizontal do plano (h_α) – falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta h é uma reta horizontal (de nível) do plano α e retas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano (que é uma reta horizontal do plano com cota nula). Nesse sentido, o traço horizontal do plano é paralelo à reta h , pelo que **já temos a direção que nos faltava** para definir o traço horizontal do plano – a direção das retas horizontais (de nível) do plano α . O traço horizontal do plano (h_α) está definido por um ponto (o ponto H) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano α – é paralelo à reta h).

(continua na página seguinte)

RESOLUÇÕES

(continuação da página anterior)

Tenha em conta que os dois traços de um plano são duas retas do plano que são **necessariamente** concorrentes num ponto do eixo **X** (à exceção dos planos de rampa). Assim, f_α e h_α têm de ser concorrentes entre si num ponto do eixo **X**. Com este raciocínio, para definir o traço horizontal do plano (h_α) já temos dois pontos – o ponto **H** (o traço horizontal da reta r) e o ponto do eixo **X** que é o ponto de concorrência dos dois traços do plano. Considerando os dois raciocínios expostos, para definir o traço horizontal do plano (h_α) temos, afinal, **dois pontos e uma direção**. Assim, o traço horizontal do plano (h_α) passa pelo traço horizontal da reta r (o ponto **H**), é paralelo à reta h e é ainda concorrente com f_α num ponto do eixo **X**.

Traçado:

As retas dadas (as retas r e h) representaram-se a **médio**, pois integram os dados. Os traços do plano, que são pedidos (são o objetivo do exercício), representaram-se a **forte**. O eixo **X** representou-se a **médio** (é a linha estruturante do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois são linhas de chamada.

11.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o plano ρ , pelos seus traços, e a reta a , pelas suas projeções, em função dos dados. A reta a é paralela ao $\beta_{1/3}$, pelo que as suas projeções fazem, com o eixo **X**, ângulos iguais e com abertura para o mesmo lado (retas paralela ao $\beta_{1/3}$ são retas não passantes cujas projeções fazem, com o eixo **X**, ângulos iguais e com abertura para o mesmo lado).

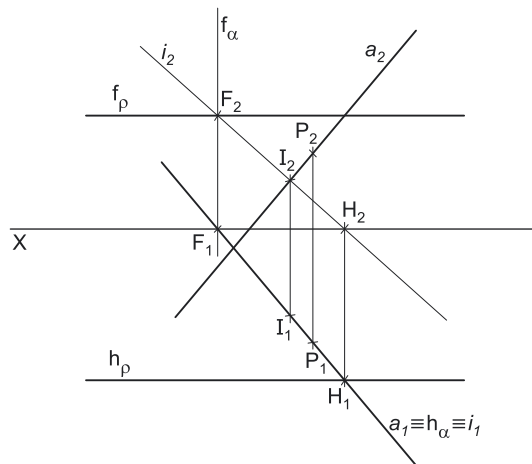
Resolução:

E pedido um ponto – o ponto de interseção entre a reta a e o plano ρ . O ponto de interseção entre uma reta e um plano é um ponto que pertence simultaneamente à reta e ao plano. Assim, a resolução do exercício passa por determinar um ponto que possamos garantir que pertence simultaneamente à reta e ao plano. **Nem a reta nem o plano são projetantes**, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção de retas com planos**, que se executa em três etapas, a saber:

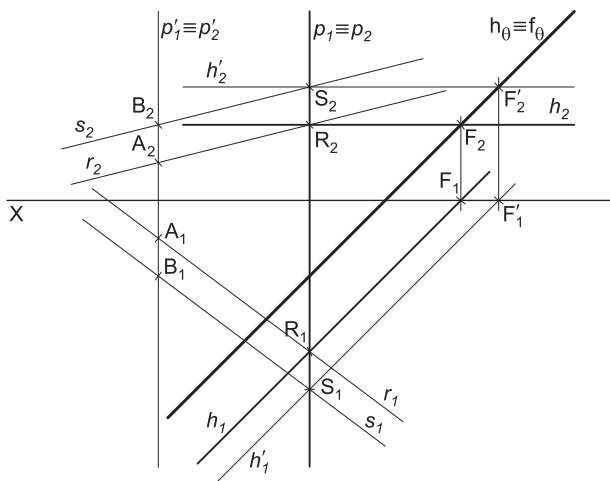
1. pela reta r conduz-se um plano auxiliar que a contenha – pela reta a conduziu-se o plano α , que é o **plano projetante horizontal** da reta a (é um plano vertical);
2. determina-se a reta de interseção do plano auxiliar com o plano dado – determinou-se a reta i , que é a reta de interseção do plano α com o plano ρ (a reta i é uma reta oblíqua do plano ρ e está definida por dois pontos – os pontos **F** e **H**, os seus traços nos planos de projeção);
3. o ponto de concorrência (ou de interseção) das duas retas é o ponto de interseção da reta dada com o plano dado – o ponto de concorrência da reta i com a reta a (que são coplanares, pois estão ambas contidas no plano α) é o ponto **I**, que é o ponto de interseção da reta a como plano ρ .

Traçado:

A reta a (as projeções da reta) e os traços do plano ρ representaram-se a **médio**, pois integram os dados. O eixo **X** representa-se a **médio** (é a linha estruturante do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são traçados auxiliares (caso do plano α e da reta i) ou são linhas de chamada.



12.



Dados:

Em primeiro lugar, desenharam-se as projeções das retas r e p , em função dos dados. As duas retas são concorrentes no ponto **R**, que é o ponto da reta h que tem 4 cm de afastamento. As projeções da reta p não verificam o **Critério de Reversibilidade**, pelo que não é possível, de forma direta (a partir apenas das suas projeções), garantir o paralelismo entre a reta p e $\beta_{1/3}$. Assim, a primeira etapa deverá consistir em garantir que a reta p é paralela ao $\beta_{1/3}$. Para isso é necessário determinar um outro ponto da reta p .

Resolução:

Paralelismo da reta p em relação ao $\beta_{1/3}$.

Para a reta p ser paralela ao $\beta_{1/3}$, a reta p tem de verificar o **Critério de paralelismo entre retas e planos** em relação ao $\beta_{1/3}$, ou seja, a reta p tem de ser paralela a uma reta do $\beta_{1/3}$ (a reta p tem de pertencer a uma «família» de retas que o $\beta_{1/3}$ contenha). Assim, recorreu-se a uma reta p' , de perfil e pertencente ao $\beta_{1/3}$ – a reta p' está definida por dois pontos (os pontos **A** e **B**) que pertencem ao $\beta_{1/3}$, pelo que a reta p' é necessariamente uma reta do $\beta_{1/3}$. A reta p' é uma reta da «família» de retas de perfil do $\beta_{1/3}$.

Para que a reta p seja paralela ao $\beta_{1/3}$, a reta p tem de ser paralela à reta p' . As retas p e p' são paralelas, pelo que são coplanares, pelo que **definem um plano** (que não é o plano θ , pedido no enunciado). Os dados desse plano são insuficientes para determinar um outro ponto da reta p , pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar desse plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Recorreu-se a uma reta auxiliar do plano definido pelas retas p e p' – a reta r . A reta r é concorrente com a reta p no ponto **R** e concorrente com a reta p' no ponto **A** (a reta r está definida por dois pontos – os pontos **R** e **A**).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Os dados do plano definido pelas retas p e p' são ainda insuficientes para determinar o pretendido (o outro ponto da reta p), pelo que é necessário o recurso a outra reta auxiliar desse plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Recorreu-se a outra reta auxiliar do plano – a reta s . A reta s é concorrente com a reta p' no ponto B e é paralela à reta r (a reta s está definida por um ponto e uma direção – o ponto B e a direção da reta r).

As retas s e p são retas complanares (estão, ambas, contidas no plano definido pelas retas p e p'), pelo que ou são paralelas ou são concorrentes. Não são paralelas, porque não têm as projeções homónimas paralelas entre si, pelo que são concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência – o ponto S . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta p .

A reta p , definida pelos pontos R e S , é uma reta de perfil paralela ao $\beta_{1/3}$.

Note que o paralelismo da reta p em relação ao $\beta_{1/3}$ se poderia ter processado igualmente através do rebatimento do plano de perfil que contém a reta p ou com o recurso a uma mudança do diedro de projeção.

Determinação dos traços do plano θ .

O traço frontal do plano θ é a **reta de interseção** do plano θ com o Plano Frontal de Projeção (é uma reta frontal do plano, com afastamento nulo). Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção.

Determinou-se o traço frontal da reta h , o ponto F . Já temos um ponto para definir o traço frontal do plano (f_θ) – falta-nos outro ponto ou uma direção. Uma vez que as projeções da reta p não verificam o **Crítério de Reversibilidade**, a determinação do traço frontal da reta p carece do recurso a um processo geométrico auxiliar. No entanto, uma vez que não se recorreu a nenhum processo geométrico auxiliar para garantir o paralelismo entre a reta p e o $\beta_{1/3}$, optou-se por não recorrer nesta situação. Assim, os dados do plano θ são insuficientes para determinar o elemento em falta do traço frontal do plano (f_θ), pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar desse plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Recorreu-se a uma reta horizontal (de nível) h' , como reta auxiliar do plano θ . A reta h' é concorrente com a reta p no ponto S e é paralela à reta h – a reta h' está definida por um ponto (o ponto S) e uma direção (a direção da reta h). Em seguida, determinou-se o traço frontal da reta h' , o ponto F' . Já temos o ponto que nos faltava para definir o traço frontal do plano (f_θ) – f_θ (o traço frontal do plano θ) está definido por dois pontos (os pontos F e F').

O traço horizontal do plano θ é a **reta de interseção** do plano θ com o Plano Horizontal de Projeção (é uma reta horizontal do plano, com cota nula). Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. As retas h e h' são retas horizontais (de nível) do plano θ e retas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano (que é uma reta horizontal do plano com cota nula). Nesse sentido, o traço horizontal do plano é paralelo às retas h e h' , pelo que já temos uma direção para definir o traço horizontal do plano – a direção das retas horizontais (de nível) do plano θ . Falta-nos um ponto para definir o traço horizontal do plano θ (h_θ). Os dois traços do plano θ são duas retas do plano que são **necessariamente** concorrentes num ponto do eixo X , pelo que já temos o ponto que nos faltava. O traço horizontal do plano (h_θ) está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos traços do plano) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano θ).

Nesta situação, os traços do plano θ ficam coincidentes.

Tenha em consideração que, com o recurso a um processo geométrico auxiliar, teria sido possível determinar os dois traços da reta p , o que evitaria o recurso a uma reta auxiliar do plano (a reta h').

Traçado:

As retas dadas (as retas h e p) representaram-se a **médio**, pois integram os dados. Os traços do plano, que são pedidos (são o objetivo do exercício), representaram-se a **forte**. O eixo X representou-se a **médio** (é a linha estruturante do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas r , s e h').

13.

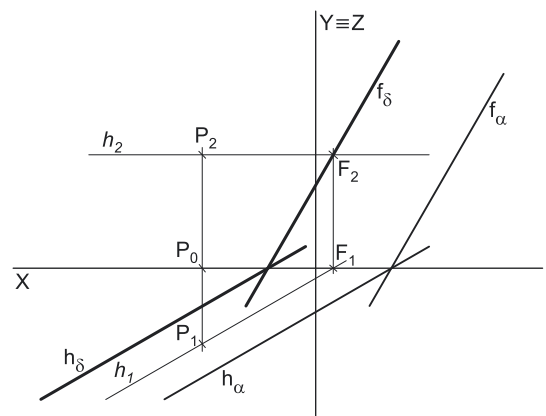
Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto P , pelas suas projeções, e o plano α , pelos seus traços, em função dos dados.

Resolução:

Pretende-se um plano δ , paralelo ao plano α e passando pelo ponto P – o plano δ tem, assim, de verificar o **Crítério de paralelismo entre planos** em relação ao plano α , ou seja, o plano δ tem de conter duas retas concorrentes paralelas a duas retas concorrentes do plano α (os dois têm de ter duas «famílias» de retas em comum). Os traços de um plano oblíquo são **duas retas concorrentes** desse plano. Assim, para que o plano δ seja paralelo ao plano α , basta que os seus traços (que são duas retas concorrentes do plano δ) sejam paralelos aos traços homónimos do plano α (que são duas retas concorrentes do plano α).

Por outro lado, para que o plano passe pelo ponto P , o ponto P tem de pertencer ao plano δ , ou seja, tem de verificar a **Condição para que um ponto pertença a um plano** (o ponto tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano δ). Assim, em primeiro lugar, há que conduzir, pelo ponto P , uma reta que pertença ao plano δ – essa reta terá de ser uma reta frontal (de frente) ou uma reta horizontal (de nível), pois são essas as «famílias» de retas já conhecidas do plano δ . Tenha em conta que f_δ é uma reta frontal do plano δ , paralela às retas frontais do plano α (e a f_α), tal como h_δ é uma reta horizontal do plano δ , paralela às retas horizontais (de nível) do plano α (e a h_α).



(continua na página seguinte)

RESOLUÇÕES

(continuação da página anterior)

Nesse sentido, pelo ponto **P** conduziu-se uma reta horizontal (de nível) do plano δ – a reta **h**, paralela às retas horizontais do plano α (que é a direção das retas horizontais do plano δ). A reta **h** está definida por um ponto (o ponto **P**) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano δ).

A reta **h** garante-nos dois factos:

1. que o plano δ já tem uma «família» de retas em comum com o plano α (a «família» das retas horizontais);
2. que o ponto **P** pertence ao plano δ (porque pertence a uma reta do plano – a reta **h**).

Para a reta **h** pertencer ao plano δ , tem de verificar a **Condição para que uma reta pertença a um plano** em relação ao plano δ . Nesse sentido, determinou-se o ponto **F**, o traço frontal da reta **h**. Já temos um ponto para definir o traço frontal do plano δ (f_δ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. A direção de f_δ também já é conhecida – é paralelo a f_α . Assim, pelo ponto **F** conduziu-se f_δ (o traço frontal do plano δ), paralelo a f_α . O traço frontal do plano δ (f_δ) está definido por um ponto (o ponto **F**) e uma direção (a direção das retas frontais do plano δ).

O plano δ está definido por duas retas concorrentes – o seu traço frontal (f_δ) e a reta **h**, que são concorrentes no ponto **F**. Já garantimos que o plano δ é paralelo ao plano α , pois as aretas **h** e f_δ (duas retas concorrentes do plano δ) são paralelas a duas retas concorrentes do plano α (os traços do plano α) – os dois planos já têm, em comum, duas «famílias» de retas / a «família» das retas horizontais e a «família» das retas frontais).

Por fim, desenhou-se o traço horizontal do plano (h_δ), que está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano δ – h_δ é paralelo à reta **h** e a h_α).

O plano δ , definido pelos seus traços, contém o ponto **P** e é paralelo ao plano α , conforme era pedido.

Traçado:

Os dados (os traços do plano α) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano δ representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta **h** ou do eixo **Y** \equiv **Z**, que é uma linha de referência).

14.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os planos ρ e σ , pelos respetivos traços, em função dos dados.

Resolução:

Pretende-se averiguar o eventual paralelismo entre os dois planos. Caso os dois planos sejam paralelos, os planos têm de verificar o **Critério de paralelismo entre planos**, ou seja, um dos planos tem de conter duas retas concorrentes paralelas a duas retas concorrentes do outro plano (os dois têm de ter duas «famílias» de retas em comum). Os planos ρ e σ são, ambos, planos de rampa, pelo que ambos os planos contêm retas fronto-horizontais – assim, é possível garantir, de imediato, que os dois planos já têm, em comum, uma «família» de retas (a «família» das retas fronto-horizontais). Para que os dois planos sejam paralelos, basta averiguar se existe uma outra «família» de retas que os dois planos tenham em comum.

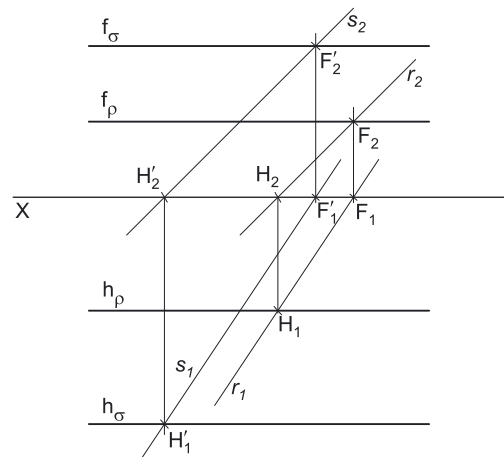
Assim, recorreu-se a uma reta **r**, oblíqua, qualquer pertencente ao plano ρ – a reta **r** é uma reta oblíqua do plano ρ e está definida por dois pontos (os seus traços, os pontos **F** e **H**). A reta **r** é uma reta de uma outra «família» de retas do plano ρ , «família» de retas essa que os dois planos também têm em comum, no caso de serem paralelos.

Nesse sentido, recorreu-se a uma reta **s**, oblíqua, pertencente ao plano σ e tentando que a reta **s** seja paralela a reta **r**. Para tal, desenhou-se a projeção frontal da reta **s** (s_2), paralela à projeção frontal da reta **r** (r_2) e determinaram-se os traços da reta **s**, garantindo que a reta **s** pertence ao plano σ – a reta **s** está definida por dois pontos (os seus traços, os pontos **F'** e **H'**).

Em seguida, analisou-se a posição das duas retas e constata-se que as duas retas são efetivamente paralelas, pois também têm as suas projeções horizontais paralelas entre si (já tinham as suas projeções frontais paralelas entre si). Assim, os dois planos são efetivamente paralelos, pois têm, em comum, duas «famílias» de retas – a «família» das retas fronto-horizontais e a «família» de retas oblíquas à qual pertencem as retas **r** e **s**.

Traçado:

Os dados (os traços dos planos ρ e σ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O que é pedido é uma conclusão, pelo que, neste exercício, não há nenhum elemento gráfico que se represente a **forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas **r** e **s**).



15.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto **M**, pelas suas projeções, e o plano ρ , pelos seus traços, em função dos dados.

Resolução:

Pretende-se um plano σ , paralelo ao plano ρ e passando pelo ponto **M** – o plano σ tem, assim, de verificar o **Crítério de paralelismo entre planos** em relação ao plano ρ , ou seja, o plano σ tem de conter duas retas concorrentes paralelas a duas retas concorrentes do plano ρ (os dois têm de ter duas «famílias» de retas em comum). Um plano paralelo a um plano de rampa é necessariamente outro plano de rampa, pelo que o plano σ é necessariamente outro plano de rampa.

Qualquer plano de rampa contém retas fronto-horizontais, pelo que tanto o plano ρ como o plano σ contém retas fronto-horizontais. Assim, os dois planos já têm, em comum, uma «família» de retas – a «família» das retas fronto-horizontais. Para que os dois planos sejam paralelos, os dois planos têm de ter, em comum, outra «família» de retas.

Por outro lado, para que o plano σ passe pelo ponto **M**, o ponto **M** tem de pertencer ao plano σ , ou seja, tem de verificar a **Condição para que um ponto pertença a um plano** (o ponto tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano σ). Assim, em primeiro lugar, há que conduzir, pelo ponto **M**, uma reta que pertença ao plano σ – essa reta terá de ser uma reta paralela a uma reta do plano ρ (uma reta de outra «família» de retas que seja comum aos dois planos).

Nesse sentido, determinaram-se as projeções de uma reta r , qualquer pertencente ao plano ρ – a reta r é uma reta oblíqua do plano ρ e está definida por dois pontos (os seus traços, os pontos **F** e **H**). A reta r é uma reta de uma outra «família» de retas do plano ρ , «família» de retas essa que os dois planos também têm de ter em comum (dois planos paralelos têm todas as «famílias» de retas em comum).

Em seguida, pelo ponto **M** conduziu-se uma reta s , paralela à reta r – a reta s está definida por um ponto (o ponto **M**) e por uma direção (a direção da reta r). A reta s garante-nos dois factos:

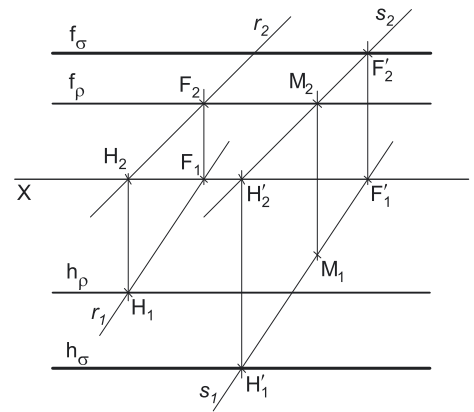
1. que o plano σ já tem outra «família» de retas em comum com o plano ρ , para além da «família» das retas fronto-horizontais (a «família» de retas a que as retas r e s pertencem);
2. que o ponto **M** pertence ao plano σ (porque pertence a uma reta do plano – a reta s).

Para a reta s pertencer ao plano σ , tem de verificar a **Condição para que uma reta pertença a um plano** em relação ao plano σ . Nesse sentido, determinaram-se os traços da reta s nos planos de projeção (os pontos **F'** e **H'**) e desenharam-se os traços do plano σ , que são retas fronto-horizontais. O traço frontal do plano σ (f_σ) está definido por um ponto (o ponto **F'**) e uma direção (é uma reta fronto-horizantal). O traço horizontal do plano σ (h_σ) está igualmente definido por um ponto (o ponto **H'**) e uma direção (é também uma reta fronto-horizantal).

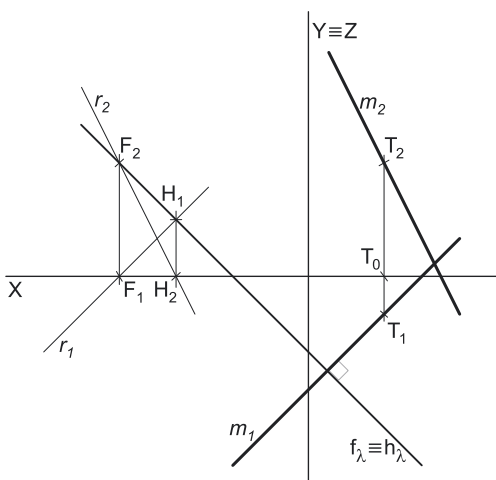
O plano σ , definido pelos seus traços, contém o ponto **M** e é paralelo ao plano ρ , conforme era pedido.

Traçado:

Os dados (os traços do plano ρ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano σ representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas r e s).



16.



Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto **T**, pelas suas projeções, bem como o plano λ , pelos seus traços, em função dos dados. Em seguida, desenhou-se a projeção horizontal da reta m (m_1), passando pela projeção horizontal do ponto **T** (T_1) e perpendicular a h_λ . Sublinha-se que os traços do plano λ estão coincidentes **apenas na folha de papel**, após o rebatimento do Plano Frontal de Projeção sobre o Plano Horizontal de Projeção pois, **no espaço**, os dois traços de um plano nunca estão coincidentes (a menos que se trate de um plano passante).

Resolução:

Pretende-se uma reta m , paralela ao plano λ e passando pelo ponto **T**. Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta m passa pelo ponto **T** (é dado no enunciado), pelo que já temos um ponto para definir a reta. Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Para a reta m ser paralela ao plano λ , a reta m tem de verificar o **Crítério de paralelismo entre retas e planos** em relação ao plano λ , ou seja, a reta m tem de ser paralela a uma reta do plano λ (a reta m tem de pertencer a uma «família» de retas que o plano λ contenha).

Nesse sentido, recorreu-se a uma reta auxiliar do plano λ (a reta r), cuja projeção horizontal (r_1) seja paralela à projeção horizontal da reta m (m_1). A reta r está definida por dois pontos (os pontos **F** e **H** – os seus traços) e pertence ao plano λ , pois tem os seus traços sobre os traços homónimos do plano λ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Para a reta m ser paralela ao plano λ , a reta m tem de ser paralela à reta r , pelo que já temos a direção que nos faltava para definir a reta m . A reta m está definida por um ponto (o ponto T) e por uma direção (a direção da reta r), pelo que se conduziu m_2 (a projeção frontal da reta m) por T_2 (a projeção frontal do ponto T), paralela a r_2 (a projeção frontal da reta r).

A reta m contém o ponto T e é paralela ao plano λ , conforme era pedido.

Traçado:

Os dados (os traços do plano λ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta m representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta r ou do eixo $Y \equiv Z$, que é uma linha de referência).

17.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto T , pelas suas projeções, e o plano λ , pelos seus traços, em função dos dados. Sublinha-se que os traços do plano λ estão coincidentes **apenas na folha de papel** pois, **no espaço**, os dois traços de um plano nunca estão coincidentes (a menos que se trate de um plano passante).

Resolução:

Pretende-se um plano δ , paralelo ao plano λ e passando pelo ponto T – o plano δ tem, assim, de verificar o **Critério de paralelismo entre planos** em relação ao plano λ , ou seja, o plano δ tem de conter duas retas concorrentes paralelas a duas retas concorrentes do plano λ (os dois têm de ter duas «famílias» de retas em comum). Os traços de um plano oblíquo são **duas retas concorrentes** desse plano. Assim, para que o plano δ seja paralelo ao plano λ , basta que os seus traços (que são duas retas concorrentes do plano δ) sejam paralelos aos traços homónimos do plano λ (que são duas retas concorrentes do plano λ).

Por outro lado, para que o plano δ passe pelo ponto T , o ponto T tem de pertencer ao plano δ , ou seja, tem de verificar a **Condição para que um ponto pertença a um plano** (o ponto tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano δ). Assim, em primeiro lugar, há que conduzir, pelo ponto T , uma reta que pertença ao plano δ – essa reta terá de ser uma reta frontal (de frente) ou uma reta horizontal (de nível), pois são essas as «famílias» de retas já conhecidas do plano δ . Tenha em conta que f_δ é uma reta frontal do plano δ , paralela às retas frontais do plano λ (e a f_λ), tal como h_δ é uma reta horizontal do plano δ , paralela às retas horizontais (de nível) do plano λ (e a h_λ).

Nesse sentido, pelo ponto T conduziu-se uma reta horizontal (de nível) do plano δ – a reta h , paralela às retas horizontais do plano λ (que é a direção das retas horizontais do plano δ). A reta h está definida por um ponto (o ponto T) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano δ).

A reta h garante-nos dois factos:

1. que o plano δ já tem uma «família» de retas em comum com o plano λ (a «família» das retas horizontais);
2. que o ponto T pertence ao plano δ (porque pertence a uma reta do plano – a reta h).

Para a reta h pertencer ao plano δ , tem de verificar a **Condição para que uma reta pertença a um plano** em relação ao plano δ . Nesse sentido, determinou-se o ponto F , o traço frontal da reta h . Já temos um ponto para definir o traço frontal do plano δ (f_δ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. A direção de f_δ também já é conhecida – é paralelo a f_λ . Assim, pelo ponto F conduziu-se f_δ (o traço frontal do plano δ), paralelo a f_λ . O traço frontal do plano δ (f_δ) está definido por um ponto (o ponto F) e uma direção (a direção das retas frontais do plano δ).

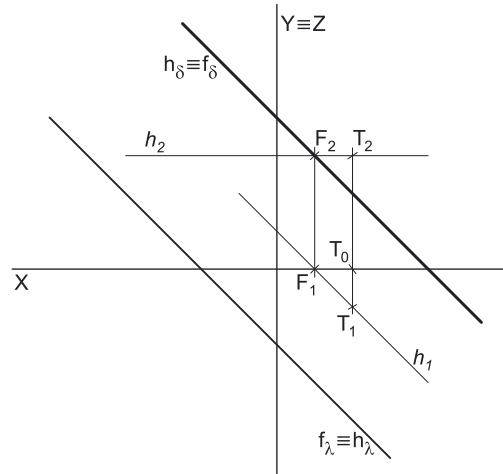
O plano δ está definido por duas retas concorrentes – o seu traço frontal (f_δ) e a reta h , que são concorrentes no ponto F . Já garantimos que o plano δ é paralelo ao plano λ , pois as retas h e f_δ (duas retas concorrentes do plano δ) são paralelas a duas retas concorrentes do plano λ (os traços do plano λ) – os dois planos já têm, em comum, duas «famílias» de retas (a «família» das retas horizontais e a «família» das retas frontais).

Por fim, desenhou-se o traço horizontal do plano (h_δ), que está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano δ – h_δ é paralelo à reta h e a h_λ).

O plano δ , definido pelos seus traços, contém o ponto T e é paralelo ao plano λ , conforme era pedido. Note que os traços do plano λ também estão coincidentes.

Traçado:

Os dados (os traços do plano λ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano δ representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta h ou do eixo $Y \equiv Z$, que é uma linha de referência).



18.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as retas a e h pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta a está definida por dois pontos – os pontos A e B . A reta h está definida por um ponto (o ponto C) e pela sua direção (é dado o ângulo que a reta faz com o Plano Frontal de Projeção).

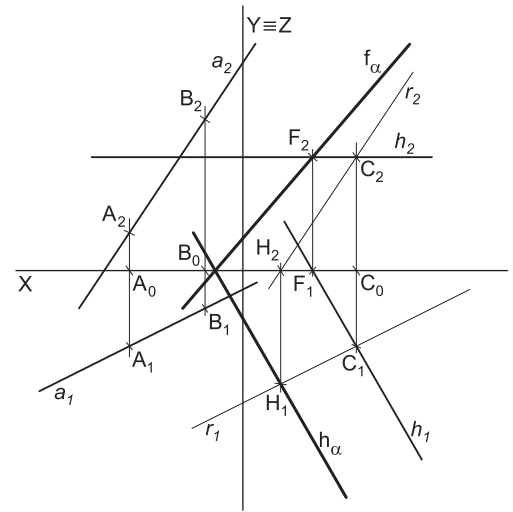
Resolução:

Pretende-se um plano α , paralelo à reta a e contendo a reta h . Para o plano α ser paralelo à reta a , o plano α tem de verificar o **CrITÉrio de paralelismo entre planos e retas** em relação à reta a , ou seja, o plano α tem de conter uma reta paralela à reta a (o plano α tem de conter a «família» de retas a que a reta a pertence).

Nesse sentido, recorreu-se a uma reta auxiliar do plano ρ (a reta r), paralela à reta a e concorrente com a reta h . A reta r está definida por um ponto (o ponto C , que é o ponto de concorrência da reta r com a reta h) e uma direção (a direção da reta a). A reta r , sendo uma reta do plano α , garante-nos imediatamente os dois factos pedidos no enunciado:

1. que a reta h pertence ao plano α (pois a reta h e a reta r , concorrentes, definem o plano α);
2. que o plano α é paralelo à reta a (porque contém uma reta paralela à reta a – a reta r).

O plano definido pelas retas r e h , concorrentes no ponto C , é o plano pretendido. Em seguida, efetuaram-se os traçados necessários à determinação dos traços do plano α .



Determinou-se o ponto H , o traço horizontal da reta r . Já temos um ponto para definir o traço horizontal do plano α (h_α). Falta-nos outro ponto ou uma direção. A direção de h_α também já é conhecida – a direção das retas horizontais (de nível) do plano, que é a direção da reta h . Assim, pelo ponto H conduziu-se h_α (o traço horizontal do plano α), paralelo à reta h – o traço horizontal do plano α (h_α) está definido por um ponto (o ponto H) e uma direção (a direção das retas horizontais do plano α).

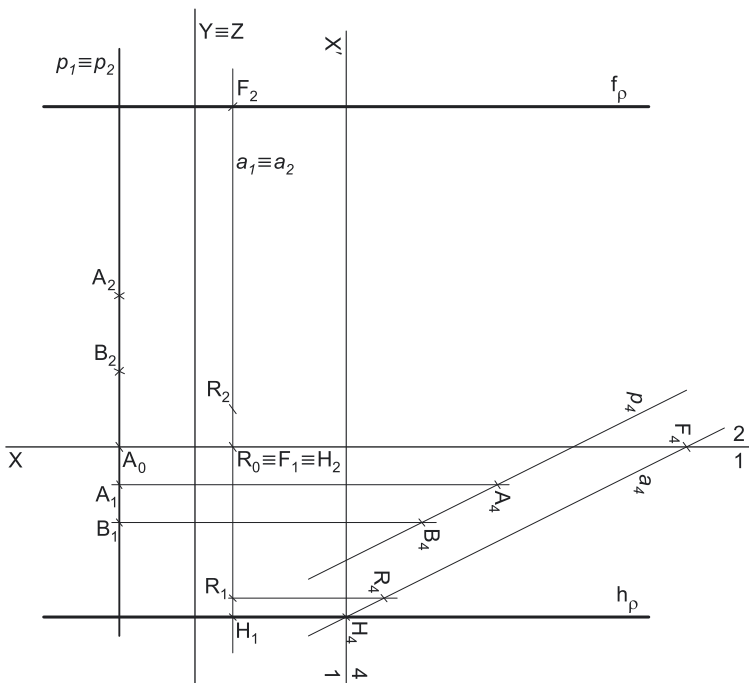
Por fim, determinou-se o ponto F , o traço frontal da reta h . Já temos um ponto para definir o traço frontal do plano α (f_α). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Por outro lado os traços do plano são concorrentes no eixo X , pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir h_α – o ponto de concorrência dos dois traços do plano. Assim, pelo ponto F conduziu-se f_α (o traço frontal do plano α), concorrente com h_α no eixo X – o traço frontal do plano α (f_α) está definido por dois pontos (o ponto H e o ponto de concorrência dos dois traços do plano=).

O plano α , definido pelos seus traços, contém a reta h e é paralelo à reta r , conforme era pedido.

Traçado:

Os dados (as projeções das retas r e h representaram-se a **médio**, bem como o eixo X (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano α representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta s ou do eixo $Y \equiv Z$, que é uma linha de referência).

19.



Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta p o ponto R , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta p está definida por dois pontos – os pontos A e B .

Resolução:

Pretende-se um plano ρ , de rampa, paralelo à reta p e contendo o ponto R . Para o plano ρ ser paralelo à reta p , o plano ρ tem de verificar o **CrITÉrio de paralelismo entre planos e retas** em relação à reta p , ou seja, o plano ρ tem de conter uma reta paralela à reta p (o plano ρ tem de conter a «família» de retas a que a reta p pertence).

Nesse sentido, recorreu-se a uma reta auxiliar do plano ρ (a reta a), paralela à reta p e passando pelo ponto R . A reta a está definida por um ponto (o ponto R) e uma direção (a direção da reta p). A reta a , sendo uma reta do plano ρ , garante-nos imediatamente os dois factos pedidos no enunciado:

1. que o ponto R pertence ao plano ρ (pois pertence a uma reta do plano ρ – a reta a);
2. que o plano ρ é paralelo à reta p (porque contém uma reta paralela à reta p – a reta a).

No entanto, há que ter em atenção que as retas p e a são, ambas, retas de perfil, pelo que as suas projeções não verificam o **CrITÉrio de Reversibilidade**. Dessa forma, não é possível garantir, de forma direta, o paralelismo entre a reta a e a reta p . Nesse sentido, há que recorrer a um processo geométrico auxiliar – optou-se pelo recurso a uma mudança do diedro de projeção.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Substituiu-se o Plano Frontal de Projeção por um novo plano de projeção (o **plano 4**), paralelo à reta **p**. Nesse sentido, criou-se um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se manteve. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

– no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);

– no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se manteve) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção) e é paralelo a **a₁** e a **p₁** (as projeções horizontais das retas **a** e **p**). Em seguida, determinaram-se as projeções dos pontos **R**, **A** e **B** no **plano 4** (**R₄**, **A₄** e **B₄**), em função das respetivas cotas, e desenhou-se **p₄** (a projeção da reta **p** no **plano 4**). No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), as retas **p** e **a** são retas frontais (de frente), pelo que as suas projeções já verificam o **Critério de Reversibilidade** – o paralelismo entre as duas retas já é direto. Assim, desenhou-se **a₄** (a projeção da reta **a** no **plano 4**), paralela a **p₄**. Está garantido o paralelismo entre a reta **a** e a reta **p**.

Em seguida, no novo diedro de projeção, determinou-se o ponto **F** (o ponto da reta **a** cuja projeção horizontal se situa no eixo **X** inicial) e o ponto **H** (o ponto da reta **a** que tem cota nula). Inverteu-se a mudança do diedro de projeção e determinaram-se as projeções dos pontos **F** e **H**, no diedro de projeção inicial. Os pontos **F** e **H** são, respetivamente, o traço frontal e o traço horizontal da reta **a**, no diedro de projeção inicial.

Por fim, pelo ponto **F** conduziu-se o traço frontal do plano ρ , que é uma reta fronto-horizontal, e conduziu-se o traço horizontal do plano ρ (**h_p**) pelo ponto **H**, que é outra reta fronto-horizontal. O traço frontal do plano ρ (**f_p**) está definido por um ponto (o ponto **F**) e uma direção (a direção das retas fronto-horizontais). O traço horizontal do plano ρ (**h_p**) está igualmente definido por um ponto (o ponto **H**) e uma direção (a direção das retas fronto-horizontais).

O plano ρ é um plano de rampa, contém o ponto **R** e é paralelo à reta **p**, conforme era pedido.

Traçado:

Os dados (as projeções da reta **p**) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano ρ representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta **a**, das projeções das retas **p** e **a** no **plano 4** ou do eixo **Y** \equiv **Z**, que é uma linha de referência).

14 PERPENDICULARIDADE E ORTOGONALIDADE

20.

Dados:

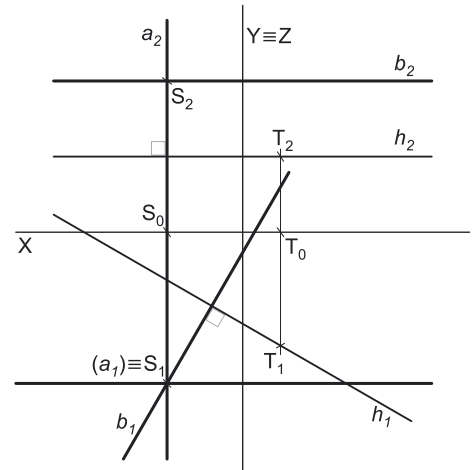
Em primeiro lugar, representaram-se a reta h e o ponto S , pelas respetivas projeções, em função dos dados.

Resolução:

Reta a :

A reta h é paralela ao Plano Horizontal de Projeção (é uma reta horizontal) e, por isso, a ortogonalidade entre a reta h e a reta a é direta em projeção horizontal – as projeções horizontais das duas retas são perpendiculares. No entanto, tal não se pode verificar em relação à reta a – sendo a reta a uma reta frontal (de frente), a sua projeção horizontal é paralela ao eixo X , pelo que não seria nunca perpendicular a h_1 (a projeção horizontal da reta h).

Assim, a ortogonalidade entre a reta a e a reta h processou-se atendendo ao facto de a reta a ser uma reta frontal (de frente) – uma reta paralela ao Plano Frontal de Projeção. A reta a é uma reta frontal (de frente), que é paralela ao Plano Frontal de Projeção, pelo que a ortogonalidade entre a reta a e a reta h é direta em projeção frontal – as projeções frontais das duas retas têm de ser perpendiculares. Dessa forma conduziu-se, por S_2 (a projeção frontal do ponto S) a projeção frontal da reta a (a_2), perpendicular a h_2 (a projeção frontal da reta h).



Em função do efetuado, conclui-se que a reta a tem de ser uma reta vertical (a sua projeção frontal é perpendicular ao eixo X) – a reta a é, pois, um **caso particular** das retas frontais (de frente).

A projeção horizontal de uma reta vertical é um ponto – assim, a_1 (a projeção horizontal da reta a) reduz-se a um ponto, que está coincidente com S_1 (a projeção horizontal do ponto S). Note que o facto de a projeção horizontal da reta a ser um ponto se assinalou convenientemente com o recurso a parêntesis.

As retas h e a são retas ortogonais mas **não perpendiculares**, pois não são retas concorrentes.

Reta b :

A reta b é uma reta horizontal (de nível), que é paralela ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que a ortogonalidade entre a reta b e a reta h é direta em projeção horizontal – as projeções horizontais das duas retas têm de ser perpendiculares. Dessa forma conduziu-se, por S_1 (a projeção horizontal do ponto S) a projeção horizontal da reta b (b_1), perpendicular a h_1 (a projeção horizontal da reta h).

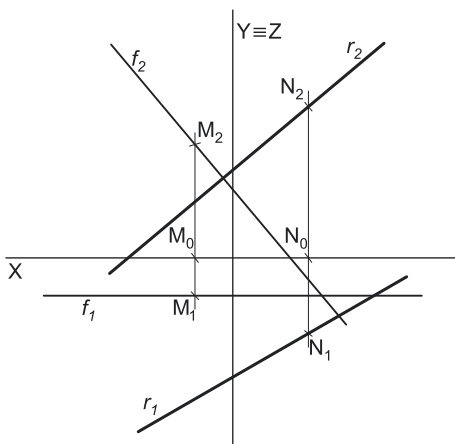
A projeção frontal da reta b (b_2) passa por S_2 (a projeção frontal do ponto S) e é paralela ao eixo X (pois todos os pontos da reta b têm a mesma cota).

As retas h e b são retas ortogonais mas **não perpendiculares**, pois não são retas concorrentes.

Traçado:

Os dados (as projeções da reta h) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X (que é a linha estruturante do exercício). As projeções das retas a e b representaram-se a **forte**, pois são o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do eixo $Y \equiv Z$, que é uma linha de referência).

21.



Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta f e o ponto N , pelas respetivas projeções, em função dos dados. Os dados permitiram-nos, ainda, desenhar a projeção horizontal da reta r (r_1), passando por N_1 (a projeção horizontal do ponto N) e fazendo, com o eixo X , o ângulo dado.

Resolução:

A reta f é paralela ao Plano Frontal de Projeção (é uma reta frontal) e, por isso, a ortogonalidade entre a reta f e a reta r é direta em projeção frontal – as projeções frontais das duas retas são perpendiculares entre si. Dessa forma conduziu-se, por N_2 (a projeção frontal do ponto N) a projeção frontal da reta r (r_2), perpendicular a f_2 (a projeção frontal da reta f), o que nos garante a ortogonalidade entre a reta r e a reta f .

As retas f e r são retas ortogonais mas **não perpendiculares**, pois não são retas concorrentes.

Traçado:

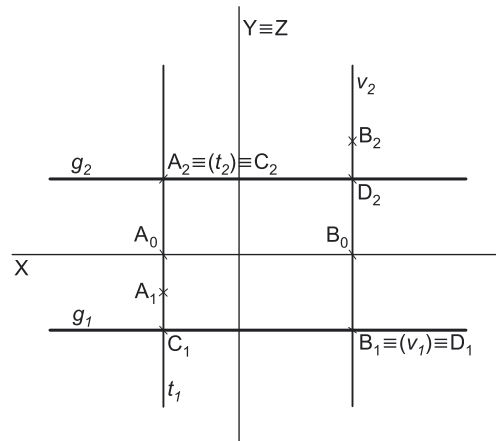
Os dados (as projeções da reta h) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X (que é a linha estruturante do exercício). As projeções das retas a e b representaram-se a **forte**, pois são o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do eixo $Y \equiv Z$, que é uma linha de referência).

22.

a) Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B** pelas suas projeções e desenharam-se as projeções das retas **t** e **v**, em função dos dados. A reta **t** é uma reta de topo (uma reta projetante frontal), pelo que a sua projeção frontal se reduz a um ponto (facto que se assinalou convenientemente com o recurso a parêntesis), coincidente com a projeção frontal do ponto **A** – tem-se $A_2 \equiv (t_2)$. A reta **v** é uma reta vertical (uma reta projetante horizontal), pelo que a sua projeção horizontal se reduz a um ponto (facto que se assinalou convenientemente com o recurso a parêntesis), coincidente com a projeção horizontal do ponto **B** – tem-se $B_1 \equiv (v_1)$.

b) As duas retas são **enviesadas** (não coplanares), pois não são paralelas (não têm a mesma direcção) nem concorrentes (não há nenhum ponto de concorrência). No entanto, as duas retas são **ortogonais** (não são perpendiculares, pois não são concorrentes).

c) Duas retas perpendiculares são, antes de mais, concorrentes. Assim, a reta pedida (a reta **g**) tem de ser concorrente com a reta **v** e com a reta **t**, pois é concorrente com ambas. Nesse sentido, começou-se por raciocinar sobre os pontos de concorrência da reta **g** com as retas **v** e **t**.



Considerou-se que o ponto **C** é o ponto de concorrência da reta **g** com a reta **t**. Uma vez que a reta **t** é uma reta projetante frontal (projeta todos os seus pontos no Plano Frontal de Projeção, sobre o seu traço frontal), a projeção frontal do ponto **C** (C_2) está necessariamente coincidente com a projeção frontal da reta **t** (t_2). A projeção frontal da reta **g** (g_2) tem de passar pela projeção frontal do ponto **C** (C_2).

Considerou-se que o ponto **D** é o ponto de concorrência da reta **g** com a reta **v**. Uma vez que a reta **v** é uma reta projetante horizontal (projeta todos os seus pontos no Plano Horizontal de Projeção, sobre o seu traço horizontal), a projeção horizontal do ponto **D** (D_1) está necessariamente coincidente com a projeção horizontal da reta **v** (v_1). A projeção horizontal da reta **g** (g_1) tem de passar pela projeção horizontal do ponto **D** (D_1).

A reta **t**, de topo, é um caso particular das retas horizontais (é uma reta horizontal que é perpendicular ao Plano Frontal de Projeção), pelo que a perpendicularidade entre a reta **t** e a reta **g** é direta em projeção horizontal – assim, pela projeção horizontal do ponto **D** (D_1), conduziu-se a projeção horizontal da reta **g** (g_1), perpendicular à projeção horizontal da reta **t** (t_1). Está garantida a ortogonalidade entre a reta **g** e a reta **t**. Por outro lado, uma vez que a reta **g** e a reta **t** são retas concorrentes (porque são perpendiculares), as duas retas têm de ser concorrentes (no ponto **C**), o que nos permitiu determinar a projeção horizontal do ponto **C** (C_1), que é o ponto de concorrência das projeções horizontais das retas **g** e **t** (g_1 e t_1).

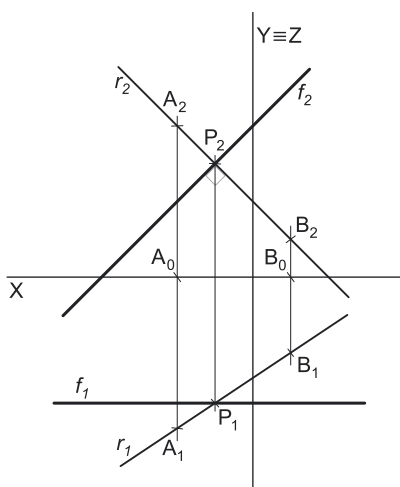
A reta **v**, vertical, é um caso particular das retas frontais (é uma reta frontal que é perpendicular ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que a perpendicularidade entre a reta **v** e a reta **g** é direta em projeção frontal – assim, pela projeção frontal do ponto **C** (C_2), conduziu-se a projeção frontal da reta **g** (g_2), perpendicular à projeção frontal da reta **v** (v_2). Está garantida a ortogonalidade entre a reta **g** e a reta **v**. Por outro lado, uma vez que a reta **g** e a reta **v** são retas concorrentes (porque são perpendiculares), as duas retas têm de ser concorrentes (no ponto **D**), o que nos permitiu determinar a projeção frontal do ponto **D** (D_2), que é o ponto de concorrência das projeções frontais das retas **g** e **t** (g_2 e t_2).

Face aos procedimentos expostos, a reta **g** é necessariamente uma **reta fronto-horizontal**.

Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. As projeções das retas **v** e **t** representaram-se a **médio-forte**, pois são parte do pedido (são um primeiro objetivo do exercício). A reta **g** (o objetivo final do exercício) representou-se a **forte**. A linha restante representou-se a **leve**, pois trata-se de uma linha de referência (o eixo $Y \equiv Z$).

23.



Dados:

Em primeiro lugar, representou-se a reta **r**, pelas suas projeções, em função dos dados. A reta **r** está definida por dois pontos – os pontos **A** e **B**.

Resolução:

Pretende-se uma reta qualquer, perpendicular à reta **r** e concorrente com esta num ponto com 3 cm de cota. Assim, em primeiro lugar, determinou-se o ponto **P**, que é o ponto da reta **r** que tem 3 cm de cota.

É pedida uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. A reta pedida tem de passar pelo ponto **P**, pelo que já temos um ponto para definir a reta – falta-nos outro ponto ou uma direcção.

A reta pedida tem de ser perpendicular à reta **r**, que é uma **reta oblíqua**. Acontece que a perpendicularidade entre retas só é direta em projeções, **no caso de uma das retas ser paralela a um dos planos de projeção**. Uma vez que a reta **r** não é paralela a qualquer dos planos de projeção, para que seja possível, de forma direta, desenhar as projeções de uma reta perpendicular à reta **r**, essa reta perpendicular terá de ser paralela a um dos planos de projeção. Assim, a reta pedida terá de ser uma **reta frontal** (de frente) ou uma **reta horizontal** (de nível).

No caso de se tratar de uma **reta frontal (de frente)**, porque é paralela ao Plano Frontal de Projeção, a **perpendicularidade é direta em projeção frontal**, ou seja, as duas retas têm as suas projeções frontais efetivamente perpendiculares entre si. No caso de se tratar de uma **reta horizontal (de nível)**, porque é paralela ao Plano Horizontal de Projeção, a **perpendicularidade é direta em projeção horizontal**, ou seja, as duas retas têm as suas projeções horizontais efetivamente perpendiculares entre si.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Optou-se pela primeira hipótese – considerou-se que a reta pedida é uma reta frontal (de frente) f . Assim, pela projeção horizontal do ponto $P(P_1)$, conduziu-se a projeção horizontal da reta $f(f_1)$, paralela ao eixo X . Em seguida, pela projeção frontal do ponto $P(P_2)$, conduziu-se a projeção frontal da reta $f(f_2)$, perpendicular à projeção frontal da reta $r(r_2)$ – a perpendicularidade entre as duas retas é direta em projeção frontal, pois a reta f é paralela ao Plano Frontal de Projeção.

Face ao exposto, com os conhecimentos adquiridos até ao momento, só seria possível desenhar duas retas que satisfizessem o pedido – uma reta frontal (que foi o caso) ou uma reta horizontal (de nível).

Traçado:

Os dados (as projeções da reta r) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta f representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do eixo $Y \equiv Z$, que é uma linha de referência).

24.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto M , pelas suas projeções, bem como o plano α , pelos seus traços, em função dos dados.

Resolução:

Pretende-se uma reta p , ortogonal ao plano α e passando pelo ponto M . Para definirmos a reta p são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta p tem de conter o ponto M , pelo que já temos um ponto para definir a reta p – falta-nos outro ponto ou uma direção.

Por outro lado, a reta p tem de verificar o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano α , ou seja, a reta p tem de ser ortogonal ou perpendicular a duas retas concorrentes do plano α (a reta p tem de ser ortogonal a duas «famílias» de retas do plano α).

O traço frontal do plano α (f_α) é uma reta frontal (de frente) do plano α , ou seja, uma reta paralela ao Plano Frontal de Projeção (que, neste caso, está contida no próprio Plano Frontal de Projeção) – assim, a ortogonalidade entre a reta p e o traço frontal do plano (f_α) é direta em projeção frontal. Nesse sentido, por M_2 (a projeção frontal do ponto M) conduziu-se p_2 (a projeção frontal da reta p), perpendicular a f_α . Este procedimento garantiu-nos que a reta p já é ortogonal a uma «família» de retas do plano α – a «família» das retas frontais (de frente) do plano α .

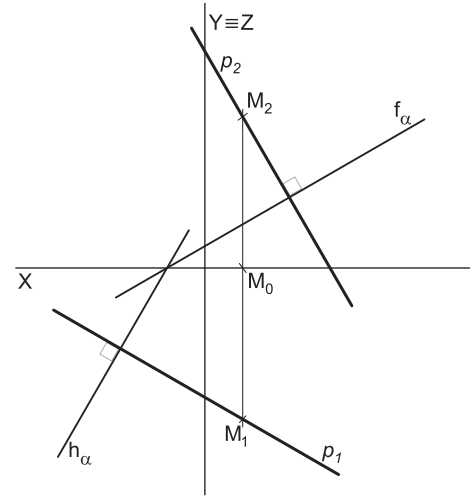
Para garantir a ortogonalidade da reta p em relação ao plano α é necessário, agora, garantir a ortogonalidade da reta p a outra «família» de retas do plano α .

O traço horizontal do plano α (h_α) é uma reta horizontal (de nível) do plano α , ou seja, uma reta paralela ao Plano Horizontal de Projeção (que, neste caso, está contida no próprio Plano Horizontal de Projeção) – assim, a ortogonalidade entre a reta p e o traço horizontal do plano (h_α) é direta em projeção horizontal. Nesse sentido, por M_1 (a projeção horizontal do ponto M) conduziu-se p_1 (a projeção horizontal da reta p), perpendicular a h_α . Este procedimento garantiu-nos que a reta p já é ortogonal a outra «família» de retas do plano α – a «família» das retas horizontais (de nível) do plano α .

A reta p é, assim, ortogonal a duas «famílias» de retas do plano α – a «família» das retas horizontais (de nível) do plano e a «família» das retas frontais (de frente) do plano. A reta p , representada pelas suas projeções, contém o ponto M e é ortogonal ao plano α , conforme era pedido.

Traçado:

Os dados (os traços do plano α) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta p representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do eixo $Y \equiv Z$, que é uma linha de referência).



25.

Dados:

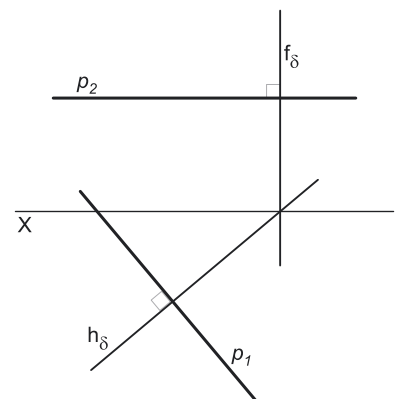
Em primeiro lugar, representou-se o plano δ , pelos seus traços, em função dos dados.

Resolução:

Pretende-se uma reta p , ortogonal ao plano δ . A reta pode ser uma reta qualquer, desde que seja ortogonal ao plano δ .

Assim, a reta p tem de verificar o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano δ , ou seja, a reta p tem de ser ortogonal ou perpendicular a duas retas concorrentes do plano δ (a reta p tem de ser ortogonal a duas «famílias» de retas do plano δ).

O traço frontal do plano δ (f_δ) é uma reta vertical do plano δ , ou seja, uma reta paralela ao Plano Frontal de Projeção (que, neste caso, está contida no próprio Plano Frontal de Projeção) – assim, a ortogonalidade entre a reta p e o traço frontal do plano (f_δ) é direta em projeção frontal. Nesse sentido, conduziu-se p_2 (a projeção frontal da reta p), qualquer, perpendicular a f_δ . Este procedimento garantiu-nos que a reta p já é ortogonal a uma «família» de retas do plano δ – a «família» das retas frontais (de frente) do plano δ (que são retas verticais – um caso particular das retas frontais).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Para garantir a ortogonalidade da reta p em relação ao plano δ é necessário, agora, garantir a ortogonalidade da reta p a outra «família» de retas do plano δ .

O traço horizontal do plano δ (h_δ) é uma reta horizontal (de nível) do plano δ , ou seja, uma reta paralela ao Plano Horizontal de Projeção (que, neste caso, está contida no próprio Plano Horizontal de Projeção) – assim, a ortogonalidade entre a reta p e o traço horizontal do plano (h_δ) é direta em projeção horizontal. Nesse sentido, conduziu-se p_1 (a projeção horizontal da reta p), qualquer, perpendicular a h_δ . Este procedimento garantiu-nos que a reta p já é ortogonal a outra «família» de retas do plano δ – a «família» das retas horizontais (de nível) do plano δ .

A reta p é, assim, ortogonal a duas «famílias» de retas do plano δ – a «família» das retas horizontais (de nível) do plano e a «família» das retas frontais (de frente) do plano. A reta p , representada pelas suas projeções, é uma reta qualquer ortogonal ao plano δ , conforme era pedido.

A reta p é uma reta horizontal (de nível).

Traçado:

Os dados (os traços do plano δ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta p representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício).

26.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano π , pelos seus traços, em função dos dados.

Resolução:

Pretende-se uma reta p , ortogonal ao plano π . A reta pode ser uma reta qualquer, desde que seja ortogonal ao plano π .

Assim, a reta p tem de verificar o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano π , ou seja, a reta p tem de ser ortogonal ou perpendicular a duas retas concorrentes do plano π (a reta p tem de ser ortogonal a duas «famílias» de retas do plano π).

O traço frontal do plano π (f_π) é uma reta vertical do plano π , ou seja, uma reta paralela ao Plano Frontal de Projeção (que, neste caso, está contida no próprio Plano Frontal de Projeção) – assim, a ortogonalidade entre a reta p e o traço frontal do plano (f_π) é direta em projeção frontal. Nesse sentido, conduziu-se p_2 (a projeção frontal da reta p), qualquer, perpendicular a f_π . Este procedimento garantiu-nos que a reta p já é ortogonal a uma «família» de retas do plano π – a «família» das retas frontais (de frente) do plano π (que são retas verticais – um caso particular das retas frontais).

Para garantir a ortogonalidade da reta p em relação ao plano π é necessário, agora, garantir a ortogonalidade da reta p a outra «família» de retas do plano π .

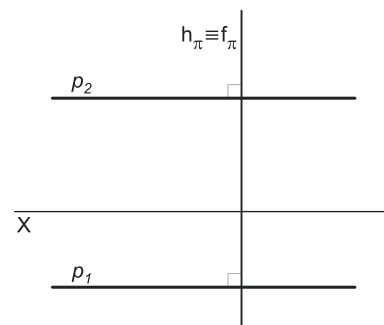
O traço horizontal do plano π (h_π) é uma reta de topo do plano π , ou seja, uma reta paralela ao Plano Horizontal de Projeção (que, neste caso, está contida no próprio Plano Horizontal de Projeção) – assim, a ortogonalidade entre a reta p e o traço horizontal do plano (h_π) é direta em projeção horizontal. Nesse sentido, conduziu-se p_1 (a projeção horizontal da reta p), qualquer, perpendicular a h_π . Este procedimento garantiu-nos que a reta p já é ortogonal a outra «família» de retas do plano π – a «família» das retas horizontais (de nível) do plano π (que são retas de topo – um caso particular das retas horizontais).

A reta p é, assim, ortogonal a duas «famílias» de retas do plano π – a «família» das retas horizontais (de nível) do plano e a «família» das retas frontais (de frente) do plano. A reta p , representada pelas suas projeções, é uma reta qualquer ortogonal ao plano π , conforme era pedido.

A reta p é uma reta fronto-horizontal.

Traçado:

Os dados (os traços do plano π) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta p representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício).



27.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano θ , pelos seus traços, em função dos dados. Sublinha-se que os traços do plano θ estão coincidentes **apenas na folha de papel** pois, **no espaço**, os dois traços de um plano nunca estão coincidentes (a menos que se trate de um plano passante). Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto P , em função dos dados, tendo em conta que, para o ponto P pertencer ao plano θ , o ponto P tem de pertencer a uma reta do plano (**condição para que um ponto pertença a um plano**). Para tal, recorreu-se a uma reta h , horizontal (de nível), pertencente ao plano θ e com 3 cm de cota – o ponto P é o ponto da reta h que tem 3 cm de afastamento.

Resolução:

Pretende-se uma reta p , ortogonal ao plano θ e passando pelo ponto P . Para definirmos a reta p são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta p tem de conter o ponto P , pelo que já temos um ponto para definir a reta p – falta-nos outro ponto ou uma direção.

Por outro lado, a reta p tem de verificar o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano θ , ou seja, a reta p tem de ser ortogonal ou perpendicular a duas retas concorrentes do plano θ (a reta p tem de ser ortogonal a duas «famílias» de retas do plano θ).

O traço frontal do plano θ (f_θ) é uma reta frontal (de frente) do plano θ , ou seja, uma reta paralela ao Plano Frontal de Projeção (que, neste caso, está contida no próprio Plano Frontal de Projeção) – assim, a ortogonalidade entre a reta p e o traço frontal do plano (f_θ) é direta em projeção frontal. Nesse sentido, por P_2 (a projeção frontal do ponto P) conduziu-se p_2 (a projeção frontal da reta p), perpendicular a f_θ . Este procedimento garantiu-nos que a reta p já é ortogonal a uma «família» de retas do plano θ – a «família» das retas frontais (de frente) do plano θ .

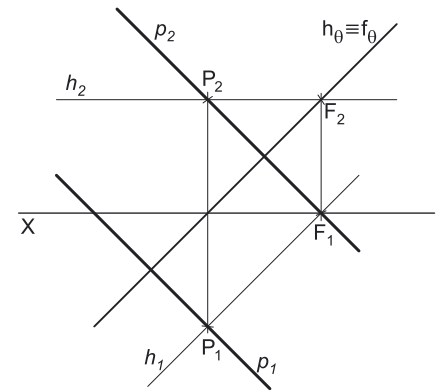
Para garantir a ortogonalidade da reta p em relação ao plano θ é necessário, agora, garantir a ortogonalidade da reta p a outra «família» de retas do plano θ .

O traço horizontal do plano θ (h_θ) é uma reta horizontal (de nível) do plano θ , ou seja, uma reta paralela ao Plano Horizontal de Projeção (que, neste caso, está contida no próprio Plano Horizontal de Projeção) – assim, a ortogonalidade entre a reta p e o traço horizontal do plano (h_θ) é direta em projeção horizontal. Nesse sentido, por P_1 (a projeção horizontal do ponto P) conduziu-se p_1 (a projeção horizontal da reta p), perpendicular a h_θ . Este procedimento garantiu-nos que a reta p já é ortogonal a outra «família» de retas do plano θ – a «família» das retas horizontais (de nível) do plano θ .

A reta p é, assim, ortogonal a duas «famílias» de retas do plano θ – a «família» das retas horizontais (de nível) do plano e a «família» das retas frontais (de frente) do plano. A reta p , representada pelas suas projeções, contém o ponto P e é ortogonal ao plano θ , conforme era pedido.

Traçado:

Os dados (os traços do plano θ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta p representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta h).



28.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o plano ρ , pelos seus traços, e o ponto R , pelas suas projeções, em função dos dados.

Resolução:

Pretende-se uma reta p , ortogonal ao plano ρ e passando pelo ponto R . Para definirmos a reta p são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta p tem de conter o ponto R , pelo que já temos um ponto para definir a reta p – falta-nos outro ponto ou uma direção.

Por outro lado, a reta p tem de verificar o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano ρ , ou seja, a reta p tem de ser ortogonal ou perpendicular a duas retas concorrentes do plano ρ (a reta p tem de ser ortogonal a duas «famílias» de retas do plano ρ).

Os traços de um plano de rampa são duas retas paralelas, ou seja, duas retas da mesma «família» de retas (a «família» das **retas fronto-horizontais**). Uma reta ortogonal a uma reta fronto-horizantal é necessariamente uma **reta vertical**, uma **reta de topo** ou uma **reta de perfil**. Das retas referidas, a única que pode ser ortogonal a um plano de rampa é a **reta de perfil** – a reta p é necessariamente uma reta de perfil.

Assim, desenharam-se imediatamente as projeções da reta p , de perfil, passando pelo ponto R . No entanto, as projeções de uma **reta de perfil** não verificam o **Critério de Reversibilidade**, pelo que as projeções da reta p não são suficientes para garantir a ortogonalidade da reta p em relação ao plano ρ (existem infinitas direções de **retas de perfil**, mas apenas uma delas é ortogonal ao plano ρ).

Assim, temos duas situações pendentes:

1. por um lado, para que a reta p esteja totalmente definida em Dupla Projeção Ortogonal (em termos práticos), necessitamos de um outro ponto da reta p , para além do ponto R ;
2. por outro lado, ainda não se garantiu a ortogonalidade da reta p em relação ao plano ρ – a reta p tem de ser ortogonal a uma outra «família» de retas do plano ρ . Essa outra «família» de retas pode ser a «família» das retas de perfil do plano ρ .

Assim, recorreu-se a uma reta p' , pertencente ao plano ρ – a reta p' está definida pelos seus traços (os pontos F e H). A reta p' pertence ao plano ρ , porque verifica a **Condição para que uma reta pertença a um plano**, em relação ao plano ρ . Note que, por uma questão de economia de traçados, se optou por se situar a reta p' no mesmo plano de perfil que contém a reta p .

A reta p' é, também ela, uma reta de perfil, cujas projeções também não verificam o **Critério de Reversibilidade** – não é possível, de forma direta, garantir a ortogonalidade das retas p e p' . Assim, é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**, de forma a ser possível garantir a ortogonalidade entre as duas retas. Optou-se pelo rebatimento do plano de perfil, pelo que se conduziu, pelas duas retas o plano π , de perfil, que contém as duas retas.

Optou-se pelo rebatimento do plano π para o Plano Frontal de Projeção (a charneira foi f_ρ). Rebateu-se o plano π , rebatendo-se os pontos F , H e R . Em seguida, desenhou-se p'_r , que passa por F_r e por H_r (a reta p'_r está definida por dois pontos – os pontos F_r e H_r).

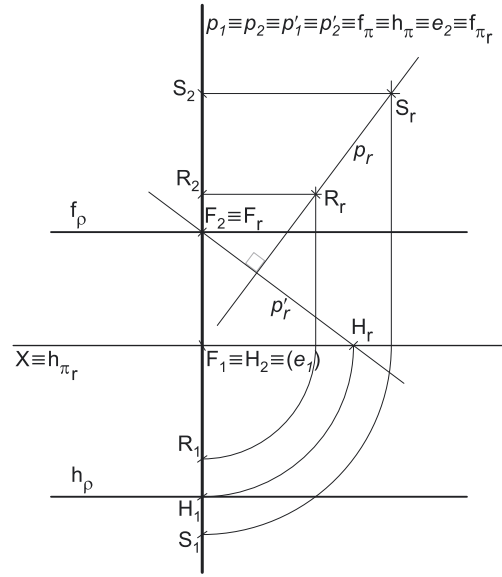
Pelo ponto R_r conduziu-se a reta p_r , perpendicular a p'_r . Já garantimos, em rebatimento, a ortogonalidade da reta p em relação à reta p' , pelo que está garantida a ortogonalidade da reta p em relação ao plano ρ . A reta p é também ortogonal à «família» das retas de perfil do plano ρ , pelo que a reta p já é ortogonal a duas «famílias» de retas do plano ρ – a reta p é ortogonal ao plano ρ .

Sobre a reta p_r , representou-se um outro ponto, qualquer – o ponto S_r . O ponto S_r é, em rebatimento, um ponto S pertencente à reta p . Invertendo o rebatimento do plano π , determinaram-se as projeções do ponto S . A reta p (definida pelos pontos R e S) é ortogonal ao plano ρ , pois é ortogonal a duas «famílias» de retas do plano ρ – a «família» das retas fronto-horizontais e a «família» das suas retas de perfil.

Tenha em conta que o exercício se poderia ter resolvido com o recurso a uma mudança do diedro de projeção, por exemplo.

Traçado:

Os dados (os traços do plano π) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta p representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas p e p' em rebatimento, bem como de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano π).



29.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o plano ρ , pelos seus traços, e o ponto T , pelas suas projeções, em função dos dados.

Resolução:

Pretende-se uma reta p , ortogonal ao plano ρ e passando pelo ponto T . Para definirmos a reta p são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta p tem de conter o ponto T , pelo que já temos um ponto para definir a reta p – falta-nos outro ponto ou uma direção.

Por outro lado, a reta p tem de verificar o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano ρ , ou seja, a reta p tem de ser ortogonal ou perpendicular a duas retas concorrentes do plano ρ (a reta p tem de ser ortogonal a duas «famílias» de retas do plano ρ).

Os traços de um plano de rampa são duas retas paralelas, ou seja, duas retas da mesma «família» de retas (a «família» das **retas fronto-horizontais**). Uma reta ortogonal a uma reta fronto-horizantal é necessariamente uma **reta vertical**, uma **reta de topo** ou uma **reta de perfil**. Das retas referidas, a única que pode ser ortogonal a um plano de rampa é a **reta de perfil** – a reta p é necessariamente uma reta de perfil.

Assim, desenharam-se imediatamente as projeções da reta p , de perfil, passando pelo ponto T . No entanto, as projeções de uma **reta de perfil** não verificam o **Critério de Reversibilidade**, pelo que as projeções da reta p não são suficientes para garantir a ortogonalidade da reta p em relação ao plano ρ (existem infinitas direções de **retas de perfil**, mas apenas uma delas é ortogonal ao plano ρ).

Assim, temos duas situações pendentes:

1. por um lado, para que a reta p esteja totalmente definida em Dupla Projeção Ortogonal (em termos práticos), necessitamos de um outro ponto da reta p , para além do ponto T ;
2. por outro lado, ainda não se garantiu a ortogonalidade da reta p em relação ao plano ρ – a reta p tem de ser ortogonal a uma outra «família» de retas do plano ρ . Essa outra «família» de retas pode ser a «família» das retas de perfil do plano ρ .

Assim, recorreu-se a uma reta p' , pertencente ao plano ρ – a reta p' está definida pelos seus traços (os pontos F e H). A reta p' pertence ao plano ρ , porque verifica a **Condição para que uma reta pertença a um plano**, em relação ao plano ρ . Note que, por uma questão de economia de traçados, se optou por se situar a reta p' no mesmo plano de perfil que contém a reta p .

A reta p' é, também ela, uma reta de perfil, cujas projeções também não verificam o **Critério de Reversibilidade** – não é possível, de forma direta, garantir a ortogonalidade das retas p e p' . Assim, é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**, de forma a ser possível garantir a ortogonalidade entre as duas retas. Optou-se pelo rebatimento do plano de perfil, pelo que se conduziu, pelas duas retas o plano π , de perfil, que contém as duas retas.

Optou-se pelo rebatimento do plano π para o Plano Frontal de Projeção (a charneira foi f_p). Rebateu-se o plano π , rebatendo-se os pontos F , H e T . Em seguida, desenhou-se p'_r , que passa por F_r e por H_r (a reta p'_r está definida por dois pontos – os pontos F_r e H_r).

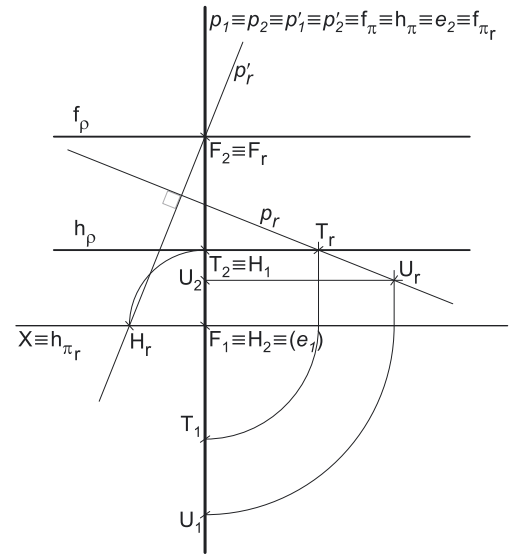
Pelo ponto T_r conduziu-se a reta p_r , perpendicular a p'_r . Já garantimos, em rebatimento, a ortogonalidade da reta p em relação à reta p' , pelo que está garantida a ortogonalidade da reta p em relação ao plano ρ . A reta p é também ortogonal à «família» das retas de perfil do plano ρ , pelo que a reta p já é ortogonal a duas «famílias» de retas do plano ρ – a reta p é ortogonal ao plano ρ .

Sobre a reta p_r , representou-se um outro ponto, qualquer – o ponto U_r . O ponto U_r é, em rebatimento, um ponto U pertencente à reta p . Invertendo o rebatimento do plano π , determinaram-se as projeções do ponto U . A reta p (definida pelos pontos T e U) é ortogonal ao plano ρ , pois é ortogonal a duas «famílias» de retas do plano ρ – a «família» das retas fronto-horizontais e a «família» das suas retas de perfil.

Tenha em conta que o exercício se poderia ter resolvido com o recurso a uma mudança do diedro de projeção, por exemplo.

Traçado:

Os dados (os traços do plano π) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta p representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas p e p' em rebatimento, bem como de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano π).



31.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta r e o ponto P , pelas respectivas projeções, em função dos dados. A reta r está definida por dois pontos – os pontos M e N .

Resolução:

Pretende-se um plano θ , ortogonal à reta r e passando pelo ponto P – o plano θ tem, assim, de verificar o **Critério de ortogonalidade entre planos e retas** em relação à reta r , ou seja, o plano θ tem de conter duas retas concorrentes ortogonais ou perpendiculares à reta r (o plano θ tem de conter duas «famílias» de retas ortogonais à reta r).

Por outro lado, para que o plano passe pelo ponto P , o ponto P tem de pertencer ao plano θ , ou seja, o ponto P tem de verificar a **Condição para que um ponto pertença a um plano** (o ponto tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano θ). Assim, em primeiro lugar, há que conduzir, pelo ponto P , uma reta que pertença ao plano θ – essa reta terá de ser uma reta ortogonal à reta r . Ora, as únicas situações em que a ortogonalidade entre retas é direta em projeções, são as situações em que uma das retas é paralela a um dos planos de projeção.

Assim, há que conduzir, pelo ponto P , uma reta frontal (de frente) ortogonal à reta r , ou uma reta horizontal (de nível) ortogonal à reta r . Optou-se por conduzir, pelo ponto P , uma reta horizontal (de nível) h , ortogonal à reta r . Uma vez que a reta h é paralela ao Plano Horizontal de Projeção, a ortogonalidade entre a reta h e a reta r é direta em projeção horizontal – h_1 (a projeção horizontal da reta h) passa por P_1 (a projeção horizontal do ponto P) e é perpendicular a r_1 (a projeção horizontal da reta r).

A reta h garante-nos dois factos:

1. que o plano θ já contém uma reta ortogonal à reta r – a reta h ;
2. que o ponto P pertence ao plano θ (porque pertence a uma reta do plano – a reta h).

Para definir o plano θ , é necessário recorrer a outra reta do plano θ – uma reta que seja **concorrente** com a reta h e que seja igualmente ortogonal à reta r . Essa reta terá de ser uma reta frontal (de frente) do plano θ , pois é a única situação em que é possível garantir a ortogonalidade de forma direta (em projeções) entre a reta r e uma reta **concorrente** com a reta h . Essa reta frontal (de frente) do plano θ pode ser, por exemplo, o próprio traço frontal do plano – f_0 .

Assim, determinou-se o traço frontal da reta h (o ponto F) e desenhou-se f_0 , ortogonal à reta r . O traço frontal do plano θ (f_0) é uma reta frontal (paralela ao Plano Frontal de Projeção), pelo que a ortogonalidade entre f_0 e a reta r é direta em projeção frontal. Assim, por F_2 (a projeção frontal do ponto F), conduziu-se f_0 , perpendicular a r_2 (a projeção frontal da reta r).

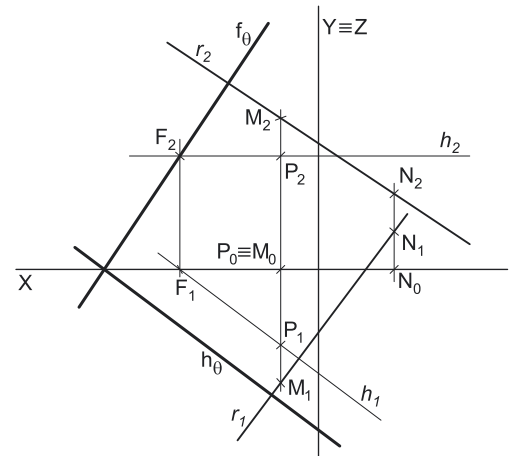
O plano θ está definido por duas retas concorrentes ortogonais à reta r – a reta h e f_0 (o seu traço frontal), concorrentes no ponto F . Já se garantiu a ortogonalidade do plano θ em relação à reta r .

Por fim, desenhou-se o traço horizontal do plano θ (h_0), que está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direção (é paralelo à reta h , pois retas horizontais de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano, que é uma reta horizontal do plano com cota nula).

O plano θ , definido pelos seus traços, é um plano ortogonal à reta r e contém o ponto P .

Traçado:

Os dados (as projeções da reta r) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano θ representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta h e do eixo $Y \equiv Z$, que é uma linha de referência).



32.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta s e o ponto T , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta s está definida por dois pontos – os pontos A e B .

Resolução:

Pretende-se um plano δ , ortogonal à reta s e passando pelo ponto T – o plano δ tem, assim, de verificar o **Critério de ortogonalidade entre planos e retas** em relação à reta s , ou seja, o plano δ tem de conter duas retas concorrentes ortogonais ou perpendiculares a reta s (o plano δ tem de conter duas «famílias» de retas ortogonais à reta s).

Por outro lado, para que o plano passe pelo ponto T , o ponto T tem de pertencer ao plano δ , ou seja, o ponto T tem de verificar a **Condição para que um ponto pertença a um plano** (o ponto tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano δ). Assim, em primeiro lugar, há que conduzir, pelo ponto T , uma reta que pertença ao plano δ – essa reta terá de ser uma reta ortogonal à reta s . Ora, as únicas situações em que a ortogonalidade entre retas é direta em projeções, são as situações em que uma das retas é paralela a um dos planos de projeção.

Assim, há que conduzir, pelo ponto T , uma reta frontal (de frente) ortogonal à reta s , ou uma reta horizontal (de nível) ortogonal à reta s . Optou-se por conduzir, pelo ponto T , uma reta horizontal (de nível) h , ortogonal à reta s . Uma vez que a reta h é paralela ao Plano Horizontal de Projeção, a ortogonalidade entre a reta h e a reta s é direta em projeção horizontal – h_1 (a projeção horizontal da reta h) passa por T_1 (a projeção horizontal do ponto T) e é perpendicular a s_1 (a projeção horizontal da reta s).

A reta h garante-nos dois factos:

1. que o plano δ já contém uma reta ortogonal à reta s – a reta h ;
2. que o ponto T pertence ao plano δ (porque pertence a uma reta do plano – a reta h).

Para definir o plano δ , é necessário recorrer a outra reta do plano δ – uma reta que seja **concorrente** com a reta h e que seja igualmente ortogonal à reta s . Essa reta terá de ser uma reta frontal (de frente) do plano δ , pois é a única situação em que é possível garantir a ortogonalidade de forma direta (em projeções) entre a reta s e uma reta **concorrente** com a reta h .

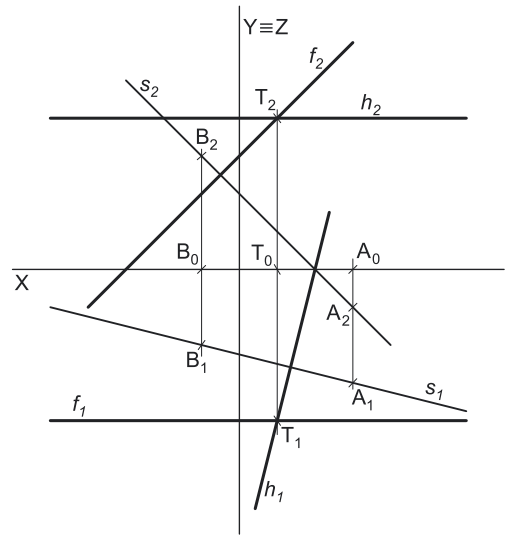
Tendo em conta que o enunciado pede expressamente que o plano δ seja definido por duas retas mas não pelos seus traços, essas duas retas terão de ser duas retas concorrentes (a reta h e uma outra reta, concorrente com a reta h) – considerou-se que o ponto T é o ponto de concorrência das duas retas.

Assim, conduziu-se, pelo ponto T , uma reta frontal (de frente) f , ortogonal à reta s . Uma vez que a reta f é paralela ao Plano Frontal de Projeção, a ortogonalidade entre a reta f e a reta s é direta em projeção frontal – f_2 (a projeção frontal da reta f) passa por T_2 (a projeção frontal do ponto T) e é perpendicular a s_2 (a projeção frontal da reta s).

O plano δ , definido pelas retas h e f (concorrentes no ponto T), é um plano ortogonal à reta s e contém o ponto T .

Traçado:

Os dados (as projeções da reta s) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X (que é a linha estruturante do exercício). As projeções das retas h e f (as retas que definem o plano δ) representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do eixo $Y \equiv Z$, que é uma linha de referência).



33.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta p e o ponto P , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta p está definida por dois pontos – os pontos A e B .

Resolução:

Pretende-se um plano que seja ortogonal à reta p e que passe pelo ponto P – esse plano tem de verificar o **Critério de ortogonalidade entre planos e retas** em relação à reta p , ou seja, o plano tem de conter duas retas concorrentes ortogonais ou perpendiculares a uma reta p (o plano tem de conter duas «famílias» de retas ortogonais à reta p).

Por outro lado, para que o plano passe pelo ponto P , o ponto P tem de pertencer ao plano, ou seja, o ponto P tem de verificar a **Condição para que um ponto pertença a um plano** (o ponto tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano). Assim, em primeiro lugar, há que conduzir, pelo ponto P , uma reta que pertença ao plano – essa reta terá de ser uma reta ortogonal à reta p . Por outro lado, essa reta deverá ser uma reta paralela a um dos planos de projeção, para que a ortogonalidade entre as duas retas seja direta em projeções. Ora, a única «família» de retas que é paralela a um dos planos de projeção e é simultaneamente ortogonal a uma **reta de perfil** é a «família» das retas fronto-horizontais.

Assim, pelo ponto P conduziu-se uma reta g , fronto-horizontal. A reta g , porque é uma reta fronto-horizontal, é necessariamente uma reta ortogonal à reta p .

A reta g garante-nos dois factos:

1. que o plano já contém uma reta ortogonal à reta p – a reta g ;
2. que o ponto P pertence ao plano (porque pertence a uma reta do plano – a reta g).

Atendendo a que o plano contém a «família» das retas fronto-horizontais, o plano pretendido é necessariamente um **plano de rampa**. No entanto, para definir o plano é necessário recorrer a outra reta do plano – uma reta que seja **concorrente** com a reta g e que seja igualmente ortogonal à reta p .

Necessitamos de uma outra «família» de retas que seja ortogonal à reta p . Essa outra «família» de retas deverá ser a «família» de retas de perfil que o plano contém. Assim, recorreu-se a uma reta p' , de perfil, que é concorrente com a reta g no ponto P' .

A reta p' está definida por um ponto (o ponto P') e por uma direção (é ortogonal à reta p). O plano definido pelas retas g e p' é o plano ortogonal à reta p que contém o ponto P .

No entanto, as projeções das retas de perfil não verificam o **Critério de Reversibilidade**, pelo que as projeções das duas retas não nos garantem a efetiva ortogonalidade entre ambas. Assim, é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**, para que possamos garantir a ortogonalidade entre as duas retas.

Optou-se pelo rebatimento do plano de perfil que contém as duas retas – o plano π . Em seguida, rebateu-se o plano π para o Plano Frontal de Projeção (a charneira do rebatimento foi f_p). Rebateram-se os pontos A , B e P' e desenharam-se as retas p e p' em rebatimento. A reta p_r (a reta p rebatida) passa por A_r e por B_r . A reta p'_r (a reta p' rebatida) passa por P'_r e é perpendicular à reta p_r . Já se garantiu a ortogonalidade entre as retas p e p' . O plano pretendido está totalmente definido, pelas retas g e p' – o plano é ortogonal à reta p , pois contém duas retas concorrentes que são ortogonais à reta p (as retas g e p').

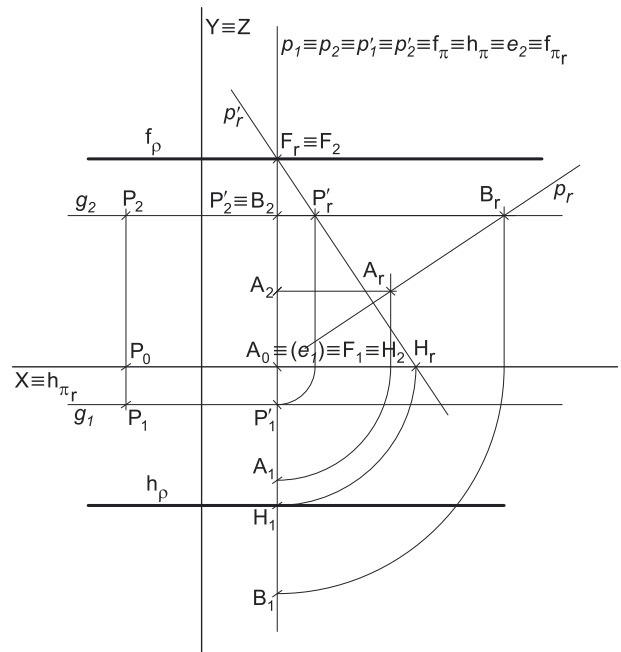
Em seguida, determinaram-se os traços da reta p' em rebatimento – os pontos H_r e F_r . Para se determinarem os traços do plano pretendido (o plano definido pelas retas g e p') é necessário inverter o rebatimento do plano π e determinar as projeções dos pontos H e F , o que se processou invertendo o rebatimento do plano π .

Por fim, pelos traços da reta p' conduziram-se os traços homónimos do plano ρ , de rampa (que são retas fronto-horizontais – paralelas à reta g). O traço frontal do plano ρ (f_ρ) é uma reta que está definida por um ponto (o ponto F) e por uma direção (a direção da reta g). O traço horizontal do plano ρ (h_ρ) é uma reta que está definida por um ponto (o ponto H) e por uma direção (a direção da reta g).

O plano ρ , definido pelos seus traços, contém o ponto P e é ortogonal à reta p .

Traçado:

Os dados (as projeções da reta p) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano ρ representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas p e p' em rebatimento, bem como das projeções horizontais dos arcos do rebatimento e, ainda, do eixo $Y \equiv Z$, que é uma linha de referência).



34.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta r e o ponto P , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta r está definida por dois pontos – os pontos A e B . Os dados permitiram-nos, ainda, desenhar a projeção horizontal da reta p (p_1), passando por P_1 (a projeção horizontal do ponto P) e fazendo, com o eixo X , o ângulo dado.

Resolução:

Pretende-se determinar as projeções de uma reta p , ortogonal à reta r , e passando pelo ponto P , sendo dada a sua projeção horizontal. Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta p passa pelo ponto P , pelo que já temos um ponto para definir a reta p . Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Nem a reta r nem a reta p são paralelas a qualquer dos planos de projeção, pelo que a ortogonalidade entre as duas retas não é direta em nenhum dos planos de projeção. Note que a reta p não é uma reta frontal (de frente), o que se constata a partir da sua projeção horizontal, que é dada. Por outro lado, caso a reta p fosse uma reta horizontal (de nível), e sendo ortogonal à reta r , as projeções horizontais das duas retas seriam perpendiculares, o que também não se verifica. Assim, a reta p é necessariamente uma reta oblíqua.

Uma vez que a ortogonalidade entre as duas retas não é direta em nenhuma das projeções (porque nenhuma das retas é paralela a qualquer dos planos de projeção), é necessário transformar a reta r numa reta paralela a um dos planos de projeção (com o recurso a uma **mudança do diedro de projeção**) e, assim, fazer com que a ortogonalidade entre as duas retas se processe de forma direta numa das suas projeções.

Optou-se por se transformar a reta r numa reta frontal (de frente). Para tal substituiu-se o Plano Frontal de Projeção por um novo plano de projeção (o **plano 4**), paralelo à reta r . Nesse sentido, criou-se um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se manteve. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);

- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se manteve) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo X (o eixo X') é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção) e é paralelo a r_1 (a projeção horizontal da reta r). Em seguida, determinaram-se as projeções dos pontos A , B e P no **plano 4** (A_4 , B_4 e P_4), em função das respetivas cotas, e desenhou-se r_4 (a projeção da reta r no **plano 4**). No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta r é uma reta frontal (de frente), pelo que a ortogonalidade entre a reta p e a reta r é direta em projeção frontal (no **plano 4**) – as projeções das duas retas no **plano 4** são efetivamente perpendiculares entre si.

Dessa forma, por P_4 (a projeção do ponto P no **plano 4**) conduziu-se p_4 (a projeção da reta p no **plano 4**), perpendicular a r_4 (a projeção da reta r no **plano 4**), o que nos garante a ortogonalidade entre a reta p e a reta r .

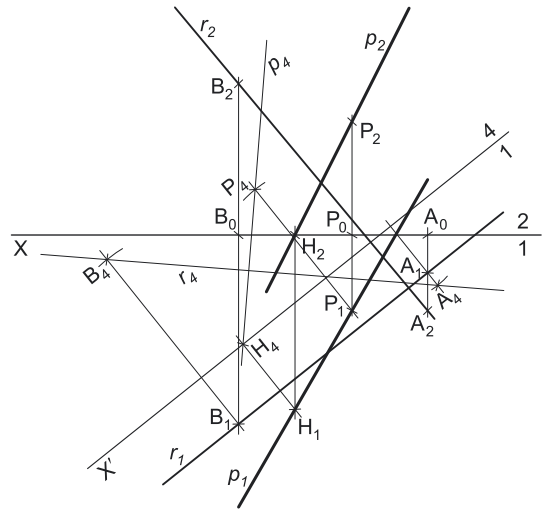
Para determinar a projeção frontal da reta p (no diedro de projeção inicial), é necessário recorrer a um outro ponto da reta p (para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção). Assim, determinou-se o ponto H , o traço horizontal da reta p . O ponto H é o ponto da reta p que tem cota nula pelo que H_4 (a projeção do ponto H no **plano 4**) se situa necessariamente no eixo X' . Em seguida, determinou-se H_1 (a projeção horizontal do ponto H), que se situa sobre p_1 (a projeção horizontal da reta p).

Por fim, atendendo a que se mantiveram as cotas na mudança do diedro de projeção efetuada, o ponto H continua a ter cota nula no diedro de projeção inicial, pelo que H_2 (a projeção frontal do ponto H) se situa no eixo X inicial. Por fim, desenhou-se p_2 (a projeção frontal da reta p), passando por H_2 e por P_2 . A reta p está, assim, definida por dois pontos – o ponto P e o ponto H .

As retas p e r são retas ortogonais mas **não perpendiculares**, pois não são retas concorrentes.

Traçado:

Os dados (as projeções da reta r) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta p representaram-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso de todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada ou, mesmo, do eixo $Y \equiv Z$, que é uma linha de referência).



35.

Dados:

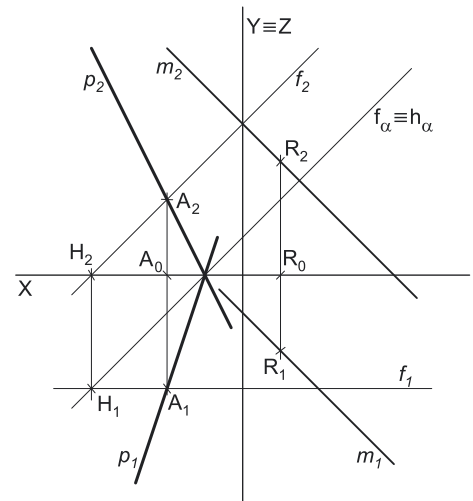
Em primeiro lugar, representaram-se a reta m e o ponto A , pelas respectivas projeções, em função dos dados. A reta m tem as suas projeções paralelas entre si, porque é uma reta paralela ao $\beta_{2/4}$ (retas paralelas ao $\beta_{2/4}$ têm as suas projeções paralelas entre si).

Resolução:

Pretende-se determinar as projeções de uma reta p , passante, ortogonal à reta m , e que contenha o ponto A . Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta p passa pelo ponto A , pelo que já temos um ponto para definir a reta p . Falta-nos outro ponto ou uma direção.

A reta m é uma reta oblíqua, pelo que a ortogonalidade entre a reta m e outra reta qualquer só se pode processar de forma direta, caso a outra reta seja uma reta horizontal (a ortogonalidade seria direta em projeção horizontal) ou uma reta frontal (a ortogonalidade seria direta em projeção frontal), o que não é o caso, pois a reta pedida é uma **reta passante** (nem a reta m nem a reta p são paralelas a qualquer dos planos de projeção).

O problema desta situação (à semelhança da situação anterior) reside, precisamente, no facto de a reta m não ser paralela a nenhum dos planos de projeção, pelo que a resolução do exercício não é direta (a ortogonalidade entre as duas retas não é direta em nenhuma das suas projeções). Poder-se-ia resolver o exercício de forma semelhante à exposta no relatório do exercício anterior, transformando a reta m numa reta paralela a um dos planos de projeção, com o recurso a uma mudança do diedro de projeção.



No entanto, optou-se por outra situação – pelo recurso a um plano que contenha o ponto A e seja ortogonal à reta m , de forma a verificar-se o **Teorema da ortogonalidade entre retas e planos** (se um dado plano é ortogonal a uma reta dada, então toda e qualquer reta desse plano é ortogonal ou perpendicular à reta dada).

Começamos por determinar os traços do plano que passa pelo ponto A e é ortogonal à reta m . Para que o plano contenha o ponto A , o ponto A tem de pertencer ao plano, pelo que tem de verificar a **Condição para que um ponto pertença a um plano** em relação a esse plano (o ponto tem de pertencer a uma reta do plano). Por outro lado, para que o plano seja ortogonal à reta m , o plano tem de verificar o **CrITÉrio de ortogonalidade entre planos e retas** em relação à reta m (o plano tem de conter duas retas concorrentes que sejam perpendiculares ou ortogonais à reta m).

Em primeiro lugar, conduziu-se, pelo ponto A , uma reta f , frontal (de frente), ortogonal à reta m (a reta f é uma reta paralela ao Plano Frontal de Projeção, pelo que a ortogonalidade entre as duas retas é direta em projeção frontal). Já temos uma reta do plano α – a reta f . Falta-nos ainda uma outra reta (concorrente com a reta f) para definir o plano α . Por outro lado, já se garantiu que o ponto A pertence ao plano α – o ponto A pertence a uma reta do plano α (a reta f).

A outra reta que nos falta para definir o plano α tem de ser também ortogonal à reta m , para que o plano α verifique o **CrITÉrio de ortogonalidade entre planos de retas** em relação à reta m . Para que a ortogonalidade entre essa outra reta e a reta m seja igualmente direta, essa outra reta terá de ser uma reta horizontal (de nível) do plano α – pode ser, por exemplo, o traço horizontal do plano (h_α), que é concorrente com a reta f no seu traço horizontal (H). Assim, determinou-se o traço horizontal da reta f (o ponto H) e pelo ponto H conduziu-se h_α (o traço horizontal do plano α), perpendicular a m_1 (a projeção horizontal da reta m). A reta h_α é uma reta horizontal (de nível), pelo que a ortogonalidade entre a reta m e a reta h_α é direta em projeção horizontal.

Em seguida, determinou-se o traço frontal do plano α (f_α), que é concorrente com h_α (o traço horizontal do plano) no eixo X , e é paralelo à reta f . O traço frontal do plano α (f_α) é uma reta que está definida por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e uma direção (a direção das retas frontais do plano α , que é a direção da reta f). Note que, nesta situação, o plano α tem os seus traços **coincidentes**.

O plano α , definido pelos seus traços, contém o ponto A (o ponto A pertence a uma reta do plano – a reta f) e é ortogonal à reta m (pois contém duas retas concorrentes ortogonais à reta m).

Qualquer reta do plano α é necessariamente ortogonal (ou perpendicular) à reta m (**Teorema da ortogonalidade entre planos e retas**). A reta p , pedida, é uma reta do plano α que passe pelo ponto A , pelo que já tínhamos um ponto para definir a reta p – o ponto A . A reta p é uma **reta passante**, pelo que é concorrente com os traços do plano num ponto do eixo X – já temos o ponto que nos faltava para definir a reta p . A reta p está definida por dois pontos – o ponto A e o ponto de concorrência dos traços do plano α .

As retas p e m são retas ortogonais mas **não perpendiculares**, pois não são retas concorrentes.

Traçado:

Os dados (as projeções da reta m) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta p representaram-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso dos traços do plano α e de todos os traçados necessários à sua determinação ou, mesmo, do eixo $Y \equiv Z$, que é uma linha de referência).

36.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o plano α , pelos seus traços, bem como o ponto M , pelas suas projeções, em função dos dados.

Resolução:

Pretende-se determinar os traços de um plano ρ , de rampa, que contenha o ponto M e que seja ortogonal ao plano α – o plano ρ tem de verificar o **Critério de ortogonalidade entre planos** em relação ao plano α (o plano ρ tem de conter uma reta ortogonal ao plano α , ou seja, o plano ρ tem de conter a «família» de retas ortogonal ao plano α).

Assim, o plano ρ (o plano pedido) tem de conter uma reta ortogonal ao plano α – essa reta terá de verificar o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano α (a reta tem de ser ortogonal ou perpendicular a duas retas concorrentes do plano, ou seja, a reta tem de ser ortogonal a duas «famílias» de retas que o plano contenha). Por outro lado, para que o plano contenha o ponto M , o ponto M tem de pertencer ao plano ρ , ou seja, tem de verificar a **Condição para que um ponto pertença a um plano** (tem de pertencer a uma reta do plano).

Assim, pelo ponto M conduziu-se uma reta p , ortogonal ao plano α . A projeção frontal da reta p (p_2) passa por M_2 e é perpendicular a f_α (f_α é uma reta frontal, pelo que a ortogonalidade entre a reta p e f_α é direta em projeção frontal). A projeção horizontal da reta p (p_1) passa por M_1 e é perpendicular a h_α (h_α é uma reta horizontal, pelo que a ortogonalidade entre a reta p e h_α é direta em projeção horizontal). A reta p é, assim, ortogonal ao plano α , pois é ortogonal a duas retas concorrentes do plano α – os seus traços (f_α e h_α).

A reta p está definida por um ponto (o ponto M) e pela sua direção (é ortogonal ao plano α). Já se garantiu que o plano ρ contém o ponto M (porque o ponto M pertence a uma reta do plano – a reta p). Já se garantiu, também, que o plano ρ é ortogonal ao plano α (porque contém uma reta ortogonal ao plano α – a reta p).

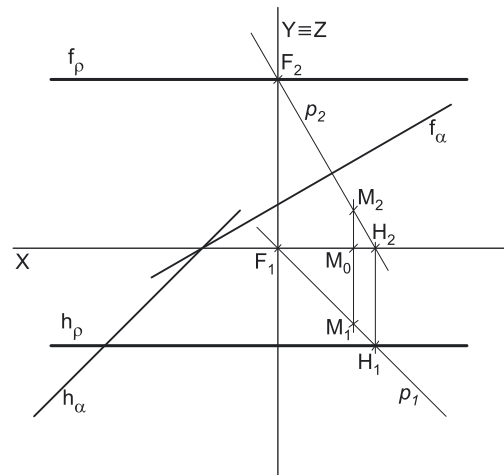
Qualquer plano que contenha a reta p é ortogonal ao plano α e contém o ponto M . Assim, é necessário determinar os traços da reta p – os pontos H e F . A reta p tem de pertencer ao plano ρ , pelo que tem de verificar a **Condição para que uma reta pertença a um plano** (os traços da reta têm de estar sobre os traços homónimos do plano).

Determinemos, agora, os traços do plano ρ . Pelo ponto F conduziu-se f_ρ (o traço frontal do plano ρ) – f_ρ é uma reta que está definida por um ponto (o ponto F) e uma direção (a direção das retas fronto-horizontais). Pelo ponto H conduziu-se h_ρ (o traço horizontal do plano ρ) – h_ρ é uma reta que está definida por um ponto (o ponto H) e uma direção (a direção das retas fronto-horizontais).

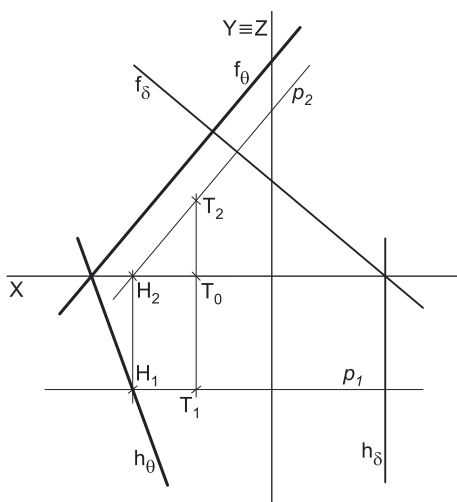
O plano ρ , definido pelos seus traços, contém o ponto M (o ponto M pertence a uma reta do plano – a reta p) e é ortogonal ao plano α (pois contém uma reta ortogonal ao plano α – a reta p).

Traçado:

Os dados (os traços do plano α) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano ρ representaram-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta p ou, mesmo, do eixo $Y \equiv Z$, que é uma linha de referência).



37.



Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o plano δ , pelos seus traços, bem como o ponto T , pelas suas projeções, em função dos dados.

Resolução:

Pretende-se determinar os traços de um plano θ , oblíquo, que contenha o ponto T e que seja ortogonal ao plano δ – o plano θ tem de verificar o **Critério de ortogonalidade entre planos** em relação ao plano δ (o plano θ tem de conter uma reta ortogonal ao plano δ , ou seja, o plano θ tem de conter a «família» de retas ortogonal ao plano δ).

Assim, o plano θ (o plano pedido) tem de conter uma reta ortogonal ao plano δ – essa reta terá de verificar o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano δ (a reta tem de ser ortogonal ou perpendicular a duas retas concorrentes do plano, ou seja, a reta tem de ser ortogonal a duas «famílias» de retas que o plano contenha). Por outro lado, para que o plano contenha o ponto T , o ponto T tem de pertencer ao plano θ , ou seja, tem de verificar a **Condição para que um ponto pertença a um plano** (tem de pertencer a uma reta do plano).

Assim, pelo ponto T conduziu-se uma reta p , ortogonal ao plano δ . A projeção frontal da reta p (p_2) passa por T_2 e é perpendicular a f_δ (f_δ é uma reta frontal, pelo que a ortogonalidade entre a reta p e f_δ é direta em projeção frontal). A projeção horizontal da reta p (p_1) passa por T_1 e é perpendicular a h_δ (h_δ é uma reta horizontal, pelo que a ortogonalidade entre a reta p e h_δ é direta em projeção horizontal).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A reta p é, assim, ortogonal ao plano δ , pois é ortogonal a duas retas concorrentes do plano δ – os seus traços (f_δ e h_δ).

A reta p está definida por um ponto (o ponto T) e pela sua direção (é ortogonal ao plano δ). Já se garantiu que o plano θ contém o ponto T (porque o ponto T pertence a uma reta do plano – a reta p). Já se garantiu, também, que o plano θ é ortogonal ao plano δ (porque contém uma reta ortogonal ao plano δ – a reta p).

Qualquer plano que contenha a reta p é ortogonal ao plano δ e contém o ponto T . Assim, é necessário determinar os traços da reta p – os pontos H e F . A reta p tem de pertencer ao plano θ , pelo que tem de verificar a **Condição para que uma reta pertença a um plano** (os traços da reta têm de estar sobre os traços homónimos do plano).

Determinemos, agora, os traços do plano θ . Pelo ponto H conduziu-se h_θ (o traço horizontal do plano θ) fazendo, com o eixo X , o ângulo dado no enunciado – h_θ é uma reta que está definida por um ponto (o ponto H) e uma direção (a direção dada no enunciado). Pelo ponto F conduziu-se f_θ (o traço frontal do plano θ) – f_θ é uma reta que está definida por dois pontos (o ponto F e o ponto de concorrência dos dois traços do plano, no eixo X).

O plano θ , definido pelos seus traços, contém o ponto T (o ponto T pertence a uma reta do plano – a reta p) e é ortogonal ao plano δ (pois contém uma reta ortogonal ao plano δ – a reta p).

Traçado:

Os dados (os traços do plano δ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano θ representaram-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta p ou, mesmo, do eixo $Y \equiv Z$, que é uma linha de referência).

38.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o plano v , pelo seu traço frontal, bem como o ponto P , pelas suas projeções, em função dos dados. O plano v não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se representou entre parêntesis.

Resolução:

Pretende-se determinar os traços de um plano qualquer, que contenha o ponto P e que seja ortogonal ao plano v – esse plano tem de verificar o **Critério de ortogonalidade entre planos** em relação ao plano v (o plano tem de conter uma reta ortogonal ao plano v , ou seja, o plano tem de conter a «família» de retas ortogonal ao plano v).

Assim, o plano pedido tem de conter uma reta ortogonal ao plano v – uma reta ortogonal a um plano horizontal (de nível) é necessariamente uma reta vertical. Por outro lado, para que o plano pedido contenha o ponto P , o ponto P tem de pertencer ao plano ou seja, tem de verificar a **Condição para que um ponto pertença a um plano** (tem de pertencer a uma reta do plano).

Assim, pelo ponto P conduziu-se uma reta v , vertical – a reta v é uma reta ortogonal ao plano v (é uma reta projetante horizontal). A reta v está definida por um ponto (o ponto P) e pela sua direção (é vertical). Já se garantiu que o plano pedido contém o ponto P (porque o ponto P pertence a uma reta do plano – a reta v). Já se garantiu, também, que o plano pedido é ortogonal ao plano v (porque contém uma reta ortogonal ao plano v – a reta v).

Qualquer plano que contenha a reta v é ortogonal ao plano v e contém o ponto P . Os planos que contêm a reta v são **planos verticais** (infinitas hipóteses), um **plano frontal (de frente)** e um **plano de perfil**. Optou-se por definir pelos seus traços um plano α , qualquer, vertical, contendo a reta v .

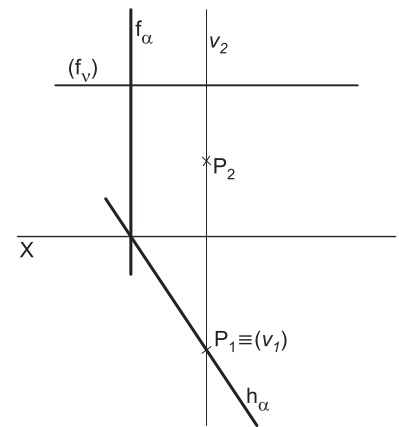
O plano α , definido pelos seus traços, contém o ponto P (o ponto P pertence a uma reta do plano – a reta v) e é ortogonal ao plano v (pois contém uma reta ortogonal ao plano v – a reta v).

Tipo de soluções: como acima se referiu, o problema admite três diferentes tipos de soluções, que são todos os tipos de **planos projetantes horizontais** (a reta v é uma reta projetante horizontal) – planos verticais, planos frontais (de frente) e planos de perfil.

Número de soluções: como acima se referiu, o problema admite uma infinidade de hipóteses de soluções, das quais são **uma infinidade** de planos verticais, **um único** plano frontal (existe um único plano frontal que contém a reta v) e **um único** plano de perfil (existe um único plano de perfil que contém a reta v).

Traçado:

Os dados (o traço frontal do plano v) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X (que é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano α representaram-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta v).



39.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano α , pelos seus traços, em função dos dados. O plano α é ortogonal ao $\beta_{2/4}$, pelo que tem os seus traços coincidentes (planos ortogonais a $\beta_{2/4}$ têm os seus traços coincidentes).

Resolução:

É pedido um ponto **A**, pertencente ao plano α . Para que o ponto pertença ao plano, tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano (**condição para que um ponto pertença a um plano**). Já temos duas retas do plano – os traços do plano. O traço frontal do plano (f_α) é uma reta frontal (de frente) do plano com afastamento nulo e o ponto **A** não tem afastamento nulo, pelo que o ponto **A** não pertence a f_α . Por outro lado, o traço horizontal do plano (h_α) é uma reta horizontal (de nível) do plano com cota nula e o ponto **A** não tem cota nula, pelo que o ponto **A** não pertence a h_α . O ponto **A** não pertence a nenhuma das duas retas conhecidas do plano α .

Assim, é necessário recorrer a uma outra reta do plano (uma reta auxiliar do plano). Sendo conhecidas as coordenadas do ponto **A**, é necessário escolher **critériosamente** a reta auxiliar do plano que nos permite determinar as projeções do ponto **A**, pois é necessário garantir **previamente** que a reta contenha o ponto.

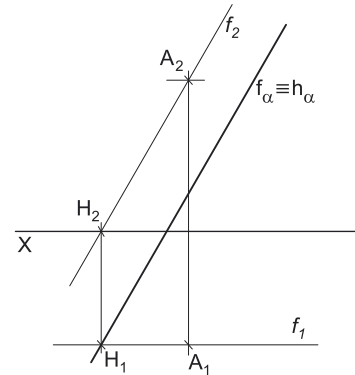
Optou-se por se recorrer a uma reta frontal (de frente) do plano, com 3 cm de afastamento (o afastamento do ponto **A**) – a reta **f**, que é o lugar geométrico dos pontos do plano α que têm 3 cm de afastamento (todos os pontos do plano α com 3 cm de afastamento situar-se-ão na reta **f**).

A reta **f** está definida por um ponto (o ponto **H**, o seu traço horizontal) e uma direção (a direção das retas frontais do plano α , que é a direção de f_α). Todos os pontos da reta **f** pertencem ao plano α e têm 3 cm de afastamento, pelo que o ponto **A** é o ponto da reta **f** que tem 4 cm de cota.

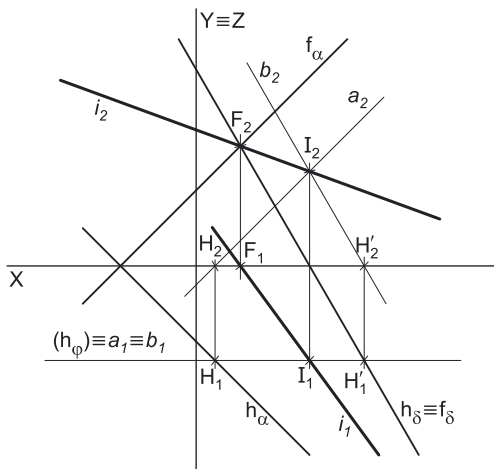
O ponto **A**, com 3 cm de afastamento e 4 cm de cota, pertence ao plano α , pois pertence a uma reta do plano – a reta **f**.

Traçado:

Os traços do plano α representaram-se a **médio**, pois integram os dados. O eixo **X** representa-se a **médio** (é a linha estruturante do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois são traçados auxiliares (caso da reta **f**) ou são linhas de chamada. Note que, na presente situação, não há nenhuma linha a **forte**, pois o que é pedido é um ponto e as linhas de chamada são sempre a **leve**.



40.



Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os planos α e δ , pelos respetivos traços, em função dos dados. O plano α é ortogonal ao $\beta_{1/3}$, pelo que tem os seus traços simétricos em relação ao eixo **X** (planos ortogonais a $\beta_{1/3}$ têm os seus traços simétricos em relação ao eixo **X**). O plano δ é ortogonal ao $\beta_{2/4}$, pelo que tem os seus traços coincidentes (planos ortogonais a $\beta_{2/4}$ têm os seus traços coincidentes).

Resolução:

É pedida uma reta – a reta **i**. A reta **i** é a reta de interseção entre os dois planos, que é o lugar geométrico dos pontos do espaço que pertencem simultaneamente aos dois planos, ou seja, é a reta que pertence simultaneamente aos dois planos. Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção.

A reta **i** é uma reta que pertence simultaneamente aos dois planos, pelo que a reta **i** tem de verificar a **condição para que uma reta pertença a um plano** em relação aos dois planos (os traços da reta têm de estar sobre os traços homónimos dos dois planos). Nesse sentido, o traço frontal da reta **i** (o ponto **F**) tem de pertencer ao traço frontal do plano α e tem também de pertencer ao traço frontal do plano δ – o ponto **F** (o traço frontal da reta **i**) é, assim, o ponto de concorrência de f_α (o traço frontal do plano α) com f_δ (o traço frontal do plano δ). Já temos um ponto para definir a reta **i**. Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta **i**.

Os dados do exercício não nos permitem determinar, de uma forma direta, nem o ponto nem a direção em falta para definir a reta **i**. Assim, os dados do exercício são insuficientes para definir a reta **i**, pelo que é necessário o recurso a um plano auxiliar. Recorreu-se a um plano auxiliar φ , frontal (de frente).

Em seguida, determinaram-se as retas de interseção do plano φ (o plano auxiliar) com os dois planos dados (os planos α e δ). A reta **a** é a reta de interseção do plano auxiliar (o plano φ) com o plano α – a reta **a** está definida por um ponto (o ponto **H**, que é o seu traço horizontal) e pela sua direção (a direção das retas frontais do plano α – a reta **a** é paralela a f_α). A reta **b** é a reta de interseção do plano auxiliar (o plano φ) com o plano δ – a reta **b** está igualmente definida por um ponto (o ponto **H'**, que é o seu traço horizontal) e pela sua direção (a direção das retas frontais do plano δ – a reta **b** é paralela a f_δ).

As retas **a** e **b** são coplanares, pois estão ambas contidas no plano auxiliar (o plano φ), pelo que ou são paralelas ou são concorrentes. As retas **a** e **b** não são paralelas (porque têm direções diferentes), pelo que são concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência – o ponto **I** (que é o ponto comum aos três planos). O ponto **I** pertence aos três planos (os planos α , δ e φ), pelo que o ponto **I** pertence simultaneamente aos planos α e δ – o ponto **I** é, necessariamente, um ponto da reta de interseção dos planos α e δ (a reta **i**, que é pretendida). Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta **i**.

A reta **i** está definida por dois pontos – os pontos **F** e **I**.

Traçado:

Os dados (os traços dos planos α e δ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (a linha estruturante do exercício). A reta **i**, porque é pedida (é o objetivo do exercício), representou-se a **forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são traçados auxiliares (caso do plano φ e das retas **a** e **b**) ou, mesmo, do eixo **Y = Z**, que é uma linha de referência) ou são linhas de chamada.

41.

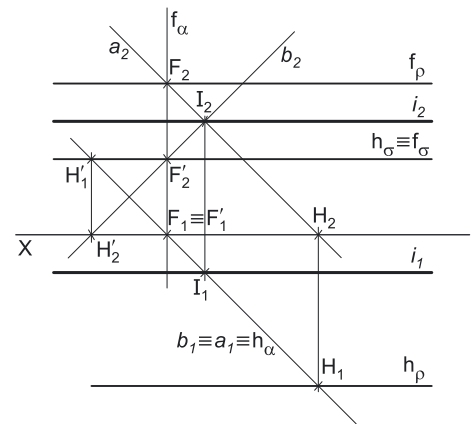
Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os planos ρ e σ , pelos respectivos traços, em função dos dados. O plano ρ é ortogonal ao $\beta_{1/3}$, pelo que tem os seus traços simétricos em relação ao eixo X (planos ortogonais ao $\beta_{1/3}$ têm os seus traços simétricos em relação ao eixo X). O plano σ é ortogonal ao $\beta_{2/4}$, pelo que tem os seus traços coincidentes (planos ortogonais ao $\beta_{2/4}$ têm os seus traços coincidentes).

Resolução:

É pedida uma reta – a reta i . A reta i é a reta de interseção entre os dois planos, que é o lugar geométrico dos pontos do espaço que pertencem simultaneamente aos dois planos, ou seja, é a reta que pertence simultaneamente aos dois planos. Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção.

Os dois planos são **planos secantes** e planos secantes são planos com orientações diferentes e **uma única** «família» de retas em comum, sendo que a reta de interseção entre os dois planos é necessariamente uma **reta dessa única** «família» de retas que os dois planos têm em comum. Uma vez que se trata da interseção entre dois planos de rampa, sabe-se imediatamente que a **única** «família» de retas comum aos dois planos é a «família» das **retas fronto-horizontais** (qualquer plano de rampa contém a «família» das retas fronto-horizontais) – a reta de interseção do plano ρ com o plano σ é necessariamente uma reta fronto-horizantal. Assim, já temos uma direção para definir a reta i – a direção das retas fronto-horizontais. Falta-nos um ponto para definir a reta i .



Os dados do exercício são insuficientes para determinar o ponto que nos falta, pelo que é necessário o recurso a um plano auxiliar. Nesse sentido, recorreu-se ao plano α , como plano auxiliar – o plano α é um plano vertical (um plano projetante horizontal). Em seguida, determinou-se a reta a , a reta de interseção do plano α com o plano ρ . A reta a está definida por dois pontos – os pontos F e H , que são os seus traços nos planos de projeção. Determinou-se também a reta b , a reta de interseção do plano α com o plano σ . A reta b está definida por dois pontos – os pontos F' e H' , que são os seus traços nos planos de projeção.

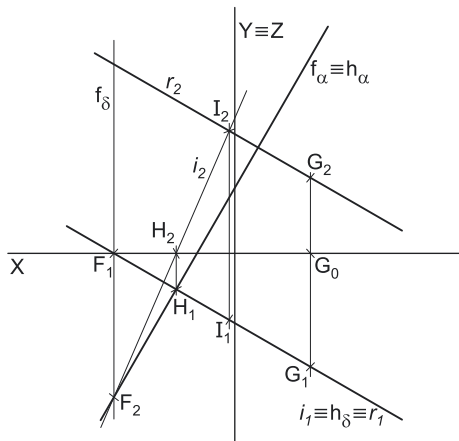
As retas a e b são coplanares, pois estão ambas contidas no plano α (o plano auxiliar) – as retas a e b ou são paralelas ou são concorrentes. Como não são paralelas (pois têm direções diferentes), são necessariamente concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência – o ponto I . O ponto I pertence aos três planos, pelo que o ponto I pertence simultaneamente aos planos ρ e σ – o ponto I é, necessariamente, um ponto da reta de interseção dos planos ρ e σ . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta i . A reta i é a reta fronto-horizantal que passa pelo ponto I .

A reta i está definida por um ponto (o ponto I) e por uma direção (a direção das retas fronto-horizontais).

Traçado:

Os dados (os traços dos planos ρ e σ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X (a linha estruturante do exercício). A reta i , porque é pedida (é o objetivo do exercício), representou-se a **forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são traçados auxiliares (caso do plano α e das retas a e b) ou são linhas de chamada.

42.



Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o plano α , pelos seus traços, bem como o ponto G , pelas suas projeções, em função dos dados. O plano α é ortogonal ao $\beta_{2/4}$, pelo que tem os seus traços coincidentes (planos ortogonais ao $\beta_{2/4}$ têm os seus traços coincidentes).

Resolução:

Determinação das projeções da reta r :

A reta r é ortogonal ao plano α e passa pelo ponto G . Para definirmos a reta r são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir a reta r (o ponto G) – falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta r é ortogonal do plano α , pelo que tem de verificar o **critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano α (tem de ser ortogonal ou perpendicular a duas retas concorrentes do plano α , ou seja, tem de ser ortogonal a duas «famílias» de retas do plano α).

O traço frontal do plano α (f_α) é uma reta frontal (de frente) do plano α – a ortogonalidade entre a reta r e o traço frontal do plano (f_α) é direta em projeção frontal. Nesse sentido, por G_2 (a projeção frontal do ponto G) conduziu-se r_2 (a projeção frontal da reta r), perpendicular a f_α . Este procedimento garantiu-nos que a reta r já é ortogonal a uma «família» de retas do plano α – a «família» das suas retas frontais (de frente). Para garantir a ortogonalidade da reta r em relação ao plano α é necessário, agora, garantir a ortogonalidade da reta r a outra «família» de retas do plano α .

O traço horizontal do plano α (h_α) é uma reta horizontal (de nível) do plano α – a ortogonalidade entre a reta r e o traço horizontal do plano (h_α) é direta em projeção horizontal. Nesse sentido, por G_1 (a projeção horizontal do ponto G) conduziu-se r_1 (a projeção horizontal da reta r), perpendicular a h_α . Este procedimento garantiu-nos que a reta r já é ortogonal a outra «família» de retas do plano α – a «família» das retas horizontais (de nível) do plano α .

A reta r é paralela ao $\beta_{2/4}$, pelo que tem as suas projeções paralelas entre si (retas paralelas ao $\beta_{2/4}$ têm as suas projeções paralelas entre si). Note, no entanto que este dado do enunciado é desnecessário, pois as projeções da reta r ficaram paralelas entre si, decorrendo da ortogonalidade da reta r em relação ao plano α .

Determinação das projeções do ponto I :

É pedido um ponto – o ponto de interseção entre a reta r e o plano α . O ponto de interseção entre uma reta e um plano é um ponto que pertence simultaneamente à reta e ao plano. Assim, a resolução do exercício passa por determinar um ponto que possamos garantir que pertence simultaneamente à reta e ao plano.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Nem a reta nem o plano são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção de retas com planos**, que se executa em três etapas, a saber:

1. pela reta r conduziu-se um plano auxiliar (o plano δ , que é um plano projetante horizontal), que a contém – o plano δ é um plano vertical;
2. determinou-se a reta i , a reta de interseção do plano δ com o plano α – a reta i é uma reta oblíqua do plano α e está definida por dois pontos (os pontos F e H , os seus traços);
3. o ponto de concorrência (ou de interseção) da reta i com a reta r (que são coplanares, pois estão ambas contidas no plano δ) é o ponto I e é o ponto de interseção da reta r com o plano α – o ponto I é, assim, o ponto de interseção da reta r com o plano α .

O ponto I é o ponto de interseção da reta r com o plano α , pois pertence simultaneamente à reta r e ao plano α .

Traçado:

Os dados (os traços do plano α e as projeções da reta r) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X (a linha estruturante do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são traçados auxiliares (caso do plano δ e da reta i) ou são linhas de chamada. Note que, neste exercício, não há nenhum elemento que seja representado a **forte**, pois o pedido é um ponto e as linhas de chamada nunca se representam a **forte**.

43.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos A e P , pelas respetivas projeções, em função dos dados. O plano ρ está representado pelo eixo X (onde se situam os seus traços) e pelas projeções do ponto A .

Resolução:

Pretende-se uma reta p , ortogonal ao plano ρ e passando pelo ponto P . Para definirmos a reta p são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta p tem de conter o ponto P , pelo que já temos um ponto para definir a reta p – falta-nos outro ponto ou uma direção.

Por outro lado, a reta p tem de verificar o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano ρ , ou seja, a reta p tem de ser ortogonal ou perpendicular a duas retas concorrentes do plano ρ (a reta p tem de ser ortogonal a duas «famílias» de retas do plano ρ).

Um plano passante tem os seus traços coincidentes no eixo X , ou seja, os dois traços são uma única reta da «família» das **retas fronto-horizontais**. Uma reta ortogonal a uma reta fronto-horizantal é necessariamente uma **reta vertical**, uma **reta de topo** ou uma **reta de perfil**. Das retas referidas, a única que pode ser ortogonal a um plano de rampa (um plano passante é um plano de rampa que contém o eixo X) é a **reta de perfil** – a reta p é necessariamente uma reta de perfil.

Assim, desenharam-se imediatamente as projeções da reta p , de perfil, passando pelo ponto P . No entanto, as projeções de uma **reta de perfil** não verificam o **Critério de Reversibilidade**, pelo que as projeções da reta p não são suficientes para garantir a ortogonalidade da reta p em relação ao plano ρ (existem infinitas direções de **retas de perfil**, mas apenas uma delas é ortogonal ao plano ρ).

Assim, temos duas situações pendentes:

1. por um lado, para que a reta p esteja totalmente definida em Dupla Projeção Ortogonal (em termos práticos), necessitamos de um outro ponto da reta p , para além do ponto P ;
2. por outro lado, ainda não se garantiu a ortogonalidade da reta p em relação ao plano ρ – a reta p tem de ser ortogonal a uma outra «família» de retas do plano ρ . Essa outra «família» de retas pode ser a «família» das retas de perfil do plano ρ .

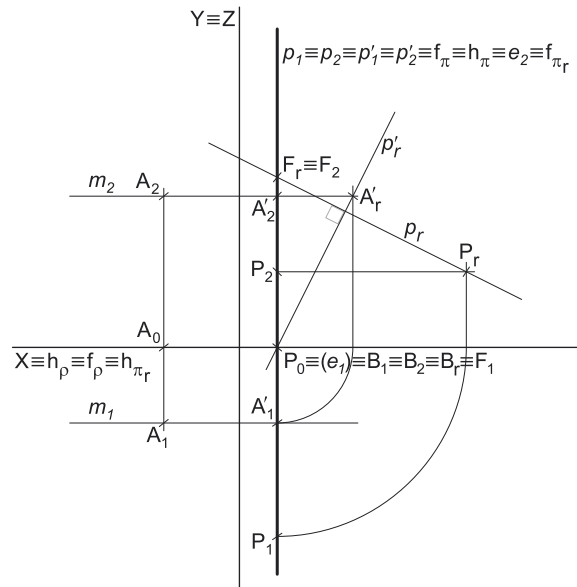
Assim, recorreu-se a uma reta p' , pertencente ao plano ρ . Para definirmos a reta p' são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta p' é necessariamente uma reta passante, pelo que já temos um ponto para definir a reta p' – o ponto B (o seu ponto de concorrência com o eixo X). Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta p' . Os dados do plano ρ são insuficientes para definir a reta p' , pelo que se recorreu a uma reta auxiliar do plano ρ – a reta m . A reta m está definida por um ponto (o ponto A – o ponto que define o plano ρ) e por uma direção (a direção das retas fronto-horizontais). As retas p' e m , porque são coplanares (estão ambas contidas no plano ρ) ou são paralelas ou são concorrentes. As duas retas não são paralelas, pelo que são concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência – o ponto A' . A reta p' está, assim, definida por dois pontos – o ponto B e o ponto A' . Note que, por uma questão de economia de traçados, se optou por se situar a reta p' no mesmo plano de perfil que contém a reta p .

A reta p' é, também ela, uma reta de perfil, cujas projeções também não verificam o **Critério de Reversibilidade** – não é possível, de forma direta, garantir a ortogonalidade das retas p e p' . Assim, é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**, de forma a ser possível garantir a ortogonalidade entre as duas retas. Optou-se pelo rebatimento do plano de perfil, pelo que se conduziu, pelas duas retas o plano π , de perfil, que contém as duas retas.

Optou-se pelo rebatimento do plano π para o Plano Frontal de Projeção (a charneira foi f_{π}). Rebateu-se o plano π , rebatendo-se os pontos P , A' e B . Em seguida, desenhou-se p'_r , que passa por B_r e por A'_r (a reta p'_r está definida por dois pontos – os pontos B_r e A'_r).

Pelo ponto P_r conduziu-se a reta p_r , perpendicular a p'_r . Já garantimos, em rebatimento, a ortogonalidade da reta p em relação à reta p' , pelo que está garantida a ortogonalidade da reta p em relação ao plano ρ . A reta p é também ortogonal à «família» das retas de perfil do plano ρ , pelo que a reta p já é ortogonal a duas «famílias» de retas do plano ρ – a reta p é ortogonal ao plano ρ .

Sobre a reta p_r representou-se um outro ponto, qualquer – o ponto F_r (o traço frontal da reta p , em rebatimento). Invertendo o rebatimento do plano π , determinaram-se as projeções do ponto F . A reta p (definida pelos pontos P e F) é ortogonal ao plano ρ , pois é ortogonal a duas «famílias» de retas do plano ρ – a «família» das retas fronto-horizontais e a «família» das suas retas de perfil.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Tenha em conta que o exercício se poderia ter resolvido com o recurso a uma mudança do diedro de projeção, por exemplo.

Traçado:

Os dados (os traços do plano ρ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta p representaram-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas p e p' em rebatimento, bem como de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano π ou, ainda, do eixo $Y \equiv Z$, que é uma linha de referência).

44.

Dados:

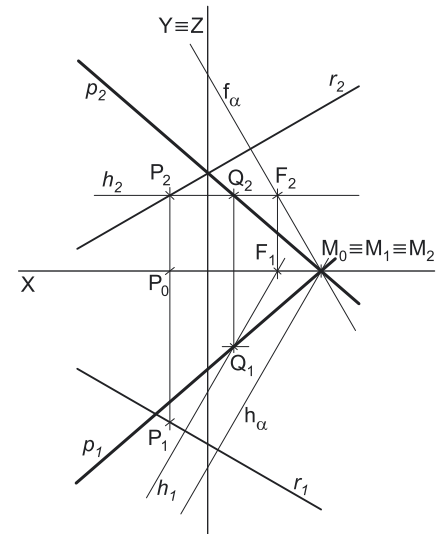
Em primeiro lugar, representaram-se a reta r e o ponto M , pelas respetivas projeções, em função dos dados. As projeções da reta r fazem, com o eixo X , ângulos iguais e com abertura para o mesmo lado, porque é uma reta paralela a $\beta_{1/3}$ (retas paralelas a $\beta_{1/3}$ são retas não passantes cujas projeções fazem, com o eixo X , ângulos iguais e com abertura para o mesmo lado).

Resolução:

Pretende-se determinar as projeções de uma reta p , ortogonal a reta r , que contenha o ponto M e se situe no $\beta_{1/3}$. Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta p passa pelo ponto M , pelo que já temos um ponto para definir a reta p . Falta-nos outro ponto ou uma direção.

A reta r é uma reta oblíqua, pelo que a ortogonalidade entre a reta r e outra reta qualquer só se pode processar de forma direta, caso a outra reta seja uma reta horizontal (a ortogonalidade seria direta em projeção horizontal) ou uma reta frontal (a ortogonalidade seria direta em projeção frontal), o que não é o caso, pois a reta pedida é uma reta passante (+e concorrente com o eixo X) – nem a reta r nem a reta p são paralelas a qualquer dos planos de projeção).

O problema desta situação (à semelhança da situação do exercício 34.) reside, precisamente, no facto de a reta r não ser paralela a nenhum dos planos de projeção, pelo que a resolução do exercício não é direta (a ortogonalidade entre as duas retas não é direta em nenhuma das suas projeções). Poder-se-ia resolver o exercício de forma semelhante à do exercício 34., transformando a reta r numa reta paralela a um dos planos de projeção, com o recurso a uma mudança do diedro de projeção.



No entanto, optou-se por outra situação – pelo recurso a um plano que contenha o ponto M e seja ortogonal a reta r , de forma a verificar-se o **Teorema da ortogonalidade entre retas e planos** (se um dado plano é ortogonal a uma reta dada, então toda e qualquer reta desse plano é ortogonal ou perpendicular à reta dada).

Começemos por determinar os traços do plano que passa pelo ponto M e é ortogonal à reta r – o plano tem de verificar o **CrITÉrio de ortogonalidade entre planos e retas** em relação à reta r (o plano tem de conter duas retas concorrentes que sejam perpendiculares ou ortogonais à reta r).

Tendo em conta que o ponto M também tem afastamento nulo, conduziu-se, pelo ponto M , o traço frontal do plano (f_α), ortogonal à reta r (a reta f_α é uma reta frontal, pelo que a ortogonalidade entre as duas retas é direta em projeção frontal) – f_α é perpendicular a r_2 (a projeção frontal da reta r). Já temos uma reta do plano α – o seu traço frontal. Falta-nos ainda uma outra reta (concorrente com f_α) para definir o plano α . Tendo em conta que o ponto M tem cota nula, conduziu-se, pelo ponto M , o traço horizontal do plano (h_α), ortogonal à reta r (a reta h_α é uma reta horizontal, pelo que a ortogonalidade entre as duas retas é direta em projeção horizontal). – h_α é perpendicular a r_1 (a projeção horizontal da reta r).

O plano α , definido pelos seus traços, contém o ponto M (o ponto M é o ponto de concorrência dos traços do plano) e é ortogonal à reta r (pois contém duas retas concorrentes ortogonais à reta r).

Qualquer reta do plano α é necessariamente ortogonal (ou perpendicular) à reta r (**Teorema da ortogonalidade entre planos e retas**). A reta p , pedida, é a reta do plano α que pertença a $\beta_{1/3}$ (é pedido no enunciado), pelo quem a reta p é a reta de interseção do plano α com $\beta_{1/3}$. Já temos um ponto para definir a reta p – o ponto M . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta p .

Os dados do plano são insuficientes para definir a reta p , pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Recorreu-se à reta h , como reta auxiliar do plano. A reta h é uma reta horizontal (de nível) do plano α e está definida por um ponto (o ponto F , o seu traço frontal) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano α).

Em seguida, determinou-se o ponto Q , o traço da reta r no $\beta_{1/3}$ – o ponto Q . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta p . A reta p está definida por dois pontos – o ponto M e o ponto Q . A reta p é ortogonal à reta r , passa pelo ponto M e situa-se no $\beta_{1/3}$ (note que a reta p tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo X).

As retas p e r são retas ortogonais mas **não perpendiculares**, pois não são retas concorrentes.

Traçado:

Os dados (as projeções da reta r) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X (que é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta p representaram-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso dos traços do plano α e da reta h ou, mesmo, do eixo $Y \equiv Z$, que é uma linha de referência).

15 PROCESSOS GEOMÉTRICOS AUXILIARES II

45.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o segmento de reta **[AB]**, pelas suas projeções, em função dos dados.

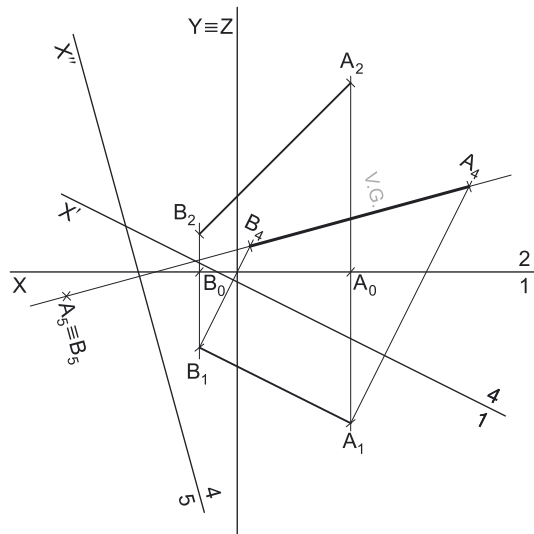
Resolução:

Pretende-se transformar o segmento de reta **[AB]** num segmento de reta vertical, com 2 cm de afastamento. Uma reta vertical é um caso particular das retas frontais (é uma reta frontal que é ortogonal ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que, antes de mais, há que transformar o segmento de reta **[AB]** num segmento de reta frontal (de frente) com 2 cm de afastamento (o afastamento pretendido).

Para transformar o segmento de reta **[AB]** num segmento de reta frontal (de frente) com 2 cm de afastamento, é necessário, substituir o Plano Frontal de Projeção por um outro plano (o **plano 4**), paralelo ao segmento de reta. Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** dos pontos e do segmento de reta (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções dos pontos e do segmento de reta no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** dos seus pontos (que estão referenciados ao plano de projeção que se manteve) e **alteram-se os afastamentos** (que passam a ser 2 cm, pois os afastamentos anteriores estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é paralelo ao segmento de reta **[AB]**, o eixo **X'** é paralelo a **[A₁B₁]** e está a 2 cm deste (o novo afastamento do segmento – o afastamento pretendido). As linhas de chamada dos pontos **A** e **B**, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**). **A₄** é a projeção do ponto **A** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de **A₄** ao eixo **X'** é igual à distância de **A₂** ao eixo **X** (que é 5 cm – a cota do ponto **A**). **B₄** é a projeção de **B** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de **B₄** ao eixo **X'** é igual à distância de **B₂** ao eixo **X** (que é 1 cm – a cota de **B**). No novo diedro de projeção, o segmento está paralelo ao **plano 4** (está transformado num segmento de reta frontal) e a sua verdadeira grandeza está na sua projeção no **plano 4** (o que se assinalou convenientemente) – a verdadeira grandeza de **AB** é **A₄B₄**.



Em seguida, há que transformar o segmento de reta **[AB]** (que já é um segmento de reta vertical no diedro formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**) num segmento de reta vertical, que é ortogonal ao Plano Horizontal de Projeção. Assim, para tal, é necessário substituir o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**) por um outro plano (o **plano 5**), ortogonal ao segmento de reta. Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o **plano 4**, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o **plano 4**, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as novas projeções frontais** dos pontos e do segmento de reta (as projeções no **plano 4** – o plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções horizontais** (que passarão a ser as projeções dos pontos e do segmento de reta no novo plano de projeção – o **plano 5**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se os afastamentos** (que são 2 cm e estão referenciados ao plano de projeção que se manteve – o **plano 4**) e **alteram-se as cotas** (que estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao **plano 5**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X''**) é a reta de interseção do **plano 4** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 5** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **5/4**. Como o **plano 5** é ortogonal ao segmento de reta **[AB]**, o eixo **X''** é perpendicular a **[A₄B₄]**. As linhas de chamada dos pontos **A** e **B**, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X''** (o novo eixo **X**) – ficam coincidentes uma com a outra. **A₅** é a projeção do ponto **A** no **plano 5** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de **A₅** ao eixo **X''** é igual à distância de **A₁** ao eixo **X'** (que é 2 cm – o afastamento de **A**). **B₅** é a projeção de **B** no **plano 5** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de **B₅** ao eixo **X''** é igual à distância de **B₁** ao eixo **X'** (que é 2 cm – o afastamento de **B**). As projeções dos pontos **A** e **B** no **plano 5** ficam coincidentes (no novo diedro de projeção, formado pelo **plano 4** e pelo **plano 5**, o segmento é projetante horizontal) No novo diedro de projeção, o segmento está ortogonal ao **plano 4** e paralelo ao **plano 5** (está transformado num segmento de reta vertical) e a sua verdadeira grandeza mantém-se na sua projeção no **plano 4**, pois o segmento é paralelo ao **plano 4** – a verdadeira grandeza de **AB** é **A₄B₄**.

Traçado:

As projeções do segmento de reta representaram-se a **médio**, pois integram os dados. O eixo **X** representa-se igualmente a **médio** (é a linha estruturante do exercício). A projeção do segmento de reta **[AB]** no **plano 4** representou-se a **forte**, pois é o pedido – é em **A₄B₄** que se pode medir a verdadeira grandeza do segmento de reta. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas auxiliares (caso do eixo **X'** e do eixo **X''**) ou são linhas de chamada.

46.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o segmento de reta $[MN]$, pelas suas projeções, em função dos dados.

Resolução:

Pretende-se transformar o segmento de reta $[MN]$ num segmento de reta fronto-horizontal, com 2 cm de afastamento e 3 cm de cota. Uma reta fronto-horizontal é, simultaneamente, um caso particular das retas frontais (é uma reta frontal que é paralela ao Plano Horizontal de Projeção) e um caso particular das retas horizontais (é uma reta horizontal que é paralela ao Plano Frontal de Projeção). Assim, antes de mais, há que transformar o segmento de reta $[MN]$ num segmento de reta frontal (de frente) com 2 cm de afastamento (o afastamento pretendido) ou num segmento de reta horizontal (de nível) com 3 cm de cota (a cota pretendida).

Optemos pela segunda hipótese – comecemos por transformar o segmento de reta $[MN]$ num segmento de reta horizontal (de nível) com 3 cm de cota.

Para transformar o segmento de reta $[MN]$ num segmento de reta horizontal (de nível) com 3 cm de cota, é necessário, substituir o Plano Horizontal de Projeção por um outro plano (o **plano 4**), paralelo ao segmento de reta. Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Frontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções frontais** dos pontos e do segmento de reta (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções horizontais** (que passarão a ser as projeções dos pontos e do segmento de reta no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se os afastamentos** dos seus pontos (que estão referenciados ao plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as cotas** (que passam a ser 3 cm, pois as cotas anteriores estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo X (o eixo X') é a reta de interseção do **plano 2** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com $4/2$. Como o **plano 4** é paralelo ao segmento de reta $[MN]$, o eixo X' é paralelo a $[M_2N_2]$ e está a 3 cm deste (a nova cota do segmento – a cota pretendida). As linhas de chamada dos pontos M e N , no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo X' (o novo eixo X). M_4 é a projeção do ponto M no **plano 4** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de M_4 ao eixo X' é igual à distância de M_1 ao eixo X (que é 1 cm – o afastamento do ponto M). N_4 é a projeção de N no **plano 4** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de N_4 ao eixo X' é igual à distância de N_1 ao eixo X (que é 3 cm – o afastamento de N). No novo diedro de projeção, o segmento está paralelo ao **plano 4** (está transformado num segmento de reta horizontal) e a sua verdadeira grandeza está na sua projeção no **plano 4** (o que se assinalou convenientemente) – a verdadeira grandeza de MNA é $M_4N_4A_4$.

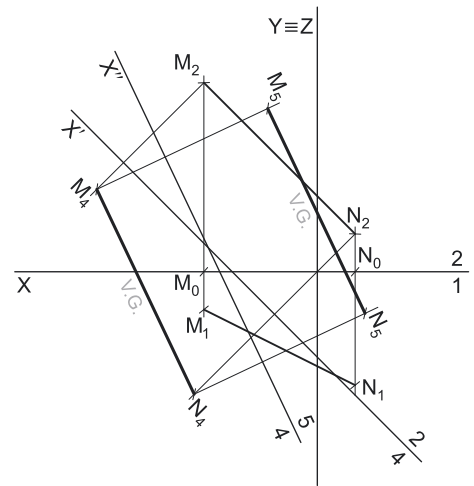
Em seguida, há que transformar o segmento de reta $[MN]$ (que já é um segmento de reta horizontal no diedro formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**) num segmento de reta fronto-horizontal, que é paralela ao Plano Frontal de Projeção. Assim, para tal, é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**) por um outro plano (o **plano 5**), paralelo ao segmento de reta. Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o **plano 4**, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o **plano 4**, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as novas projeções horizontais** dos pontos e do segmento de reta (as projeções no **plano 4** – o plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções dos pontos e do segmento de reta no novo plano de projeção – o **plano 5**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que são 3 cm e estão referenciados ao plano de projeção que se manteve – o **plano 4**) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 5**).

Assim, o novo eixo X (o eixo X'') é a reta de interseção do **plano 4** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 5** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com $4/5$. Como o **plano 5** é paralelo ao segmento de reta $[MN]$, o eixo X'' é paralelo a $[M_4N_4]$ e situa-se a 2 cm deste (o afastamento pretendido). As linhas de chamada dos pontos M e N , no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo X'' (o novo eixo X). M_5 é a projeção do ponto M no **plano 5** e determinou-se em função da sua cota – a distância de M_5 ao eixo X'' é igual à distância de M_2 ao eixo X' (que é 3 cm – a cota de M). N_5 é a projeção de N no **plano 5** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de N_5 ao eixo X'' é igual à distância de N_2 ao eixo X' (que é 3 cm – a cota de N). No novo diedro de projeção, o segmento está paralelo ao **plano 4** e ao **plano 5** (está transformado num segmento de reta fronto-horizontal) e a sua verdadeira grandeza está tanto na sua projeção no **plano 4** (pois o segmento é paralelo ao **plano 4**) como na sua projeção no **plano 5** (o segmento também é paralelo ao **plano 5**) – a verdadeira grandeza de MN é $M_4N_4 = M_5N_5$.

Traçado:

As projeções do segmento de reta representaram-se a **médio**, pois integram os dados. O eixo X representa-se igualmente a **médio** (é a linha estruturante do exercício). As projeções do segmento de reta $[MN]$ no **plano 4** e no **plano 5** representaram-se a **forte**, pois são o pedido – é em M_4N_4 e em M_5N_5 que se pode medir a verdadeira grandeza do segmento de reta. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas auxiliares (caso do eixo X' e do eixo X'') ou são linhas de chamada.



47.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se a reta r , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta r tem as suas projeções paralelas entre si, pois é uma reta paralela ao $\beta_{2/4}$ (retas paralelas ao $\beta_{2/4}$ têm as suas projeções paralelas entre si).

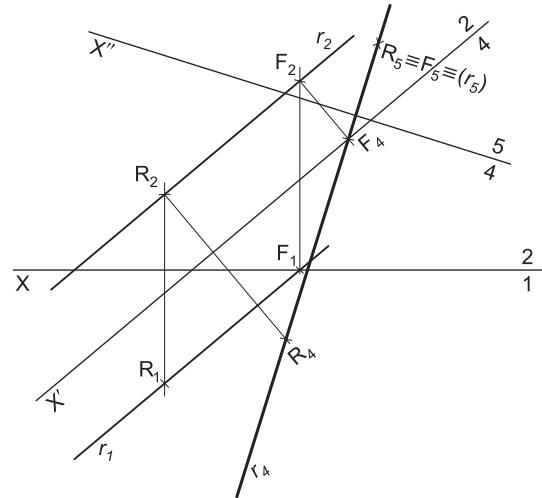
Resolução:

Pretende-se transformar a reta r numa reta de topo com 2 cm de cota. Uma reta de topo é um caso particular das retas horizontais (é uma reta horizontal que é ortogonal ao Plano Frontal de Projeção), pelo que, antes de mais, há que transformar a reta r numa reta horizontal (de nível) com 2 cm de cota (a cota pretendida).

Para transformar a reta r numa reta horizontal (de nível), é necessário substituir o Plano Horizontal de Projeção por um outro plano (o **plano 4**), paralelo à reta dada. Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Frontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções frontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais horizontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se os afastamentos** (que estão referenciados ao plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as cotas** (que estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo X (o eixo X') é a reta de interseção do **plano 2** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **4/2**. Como o **plano 4** é paralelo à reta r , o eixo X' é paralelo à projeção frontal da reta r (r_2) e situa-se a 2 cm desta (a cota pretendida). Para se determinar a nova projeção da reta r (a projeção da reta r do **plano 4**) recorreu-se ao ponto R , que define a reta r . A linha de chamada do ponto R , no novo diedro de projeção, é perpendicular ao eixo X' (o novo eixo X). R_4 é a projeção do ponto R no **plano 4** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de R_4 ao eixo X' é igual à distância de R_1 ao eixo X (que é 3 cm – o afastamento de R). Para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir a reta r no novo diedro de projeção. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, recorreu-se a um outro ponto da reta (o ponto F – o traço frontal da reta r) e determinou-se a projeção do ponto F no **plano 4**. F_4 é a projeção do ponto F no **plano 4** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – F_4 situa-se no eixo X' , pois o ponto F tem afastamento nulo (F_1 situa-se no eixo X). A projeção da reta r no **plano 4** (r_4) está definida por dois pontos – R_4 e F_4 . No novo diedro de projeção, a reta é paralela ao **plano 4** (está transformada numa reta horizontal com 2 cm de cota).



Em seguida, há que transformar a reta r numa reta de topo. Para tal é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção por um outro plano (o **plano 5**), ortogonal à reta. Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o **plano 4**, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o **plano 4**, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as novas projeções horizontais** dos pontos e do segmento de reta (as projeções no **plano 4** – o plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções dos pontos e do segmento de reta no novo plano de projeção – o **plano 5**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que são 2 cm e estão referenciados ao plano de projeção que se manteve – o **plano 4**) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 5**).

Assim, o novo eixo X (o eixo X'') é a reta de interseção do **plano 4** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 5** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **5/4**. Como o **plano 5** é ortogonal à reta r , o eixo X'' é perpendicular à nova projeção horizontal da reta r (r_4). Para se determinar a nova projeção da reta r (a projeção da reta r no **plano 5**), determinaram-se as projeções dos dois pontos – os pontos R e F . As linhas de chamada dos pontos R e F , no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo X'' (o novo eixo X), pelo que estão coincidentes com a própria projeção da reta r no **plano 4** (r_4). R_5 é a projeção do ponto R no **plano 5** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de R_5 ao eixo X'' é igual à distância de R_2 ao eixo X' (que é 2 cm – a cota de R , que é a cota da reta r no diedro de projeção formado pelo **plano 2** e pelo **plano 4**). F_5 é a projeção do ponto F no **plano 5** e determinou-se igualmente em função da sua cota (que se manteve) – a distância de F_5 ao eixo X'' é igual à distância de F_2 ao eixo X' (que é 2 cm – a cota de F , que é a cota da reta r no diedro de projeção formado pelo **plano 2** e pelo **plano 4**). No novo diedro de projeção, a reta é ortogonal ao **plano 5** (está transformada numa reta de topo), pelo que as projeções dos pontos R e F no **plano 5** estão coincidentes (tem-se imediatamente $R_5 \equiv F_5$). Da mesma forma, a nova projeção frontal da reta (a projeção da reta no **plano 5**) reduz-se a um ponto, que está coincidente com $R_5 \equiv F_5$. Uma vez que a nova projeção da reta r é um ponto, assinalou-se esse facto com o recurso a parêntesis. Assim sendo, tem-se imediatamente $(r_5) \equiv R_5 \equiv F_5$.

Traçado:

As projeções da reta r representaram-se a **médio**, pois integram os dados. O eixo X representa-se igualmente a **médio** (é a linha estruturante do exercício). As projeções da reta r no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 4** e pelo **plano 5**) representaram-se a **forte**, pois são o pedido. Os novos eixos X (o eixo X' e o eixo X'') representaram-se a **leve**, pois trata-se de traçados auxiliares.

48.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano α , pelos seus traços, em função dos dados. O plano α tem os seus traços simétricos em relação ao eixo X , pois é um plano ortogonal a $\beta_{1/3}$ (planos ortogonais a $\beta_{1/3}$ têm os seus traços simétricos em relação ao eixo X).

Determinação das projeções do triângulo:

Em seguida, determinaram-se as projeções do triângulo $[ABC]$, em função dos dados. Os pontos A , B e C , para pertencerem ao plano α , têm de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (têm de pertencer, cada um deles, a uma reta que pertença ao plano).

A reta h é a reta horizontal (de nível) do plano, com 2 cm de cota, a que se recorreu para se determinarem as projeções do ponto A – a reta h está definida por um ponto (o ponto F , o seu traço frontal) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano α). O ponto A é o ponto da reta h que tem 5 cm de afastamento.

A reta h' é a reta horizontal (de nível) do plano, com 4 cm de cota, a que se recorreu para se determinarem as projeções do ponto B – a reta h' está definida por um ponto (o ponto F' , o seu traço frontal) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano α). O ponto B é o ponto da reta h' que tem 1 cm de afastamento.

A reta h'' é a reta horizontal (de nível) do plano, com 1 cm de cota, a que se recorreu para se determinarem as projeções do ponto C – a reta h'' está definida por um ponto (o ponto F'' , o seu traço frontal) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano α). O ponto C é o ponto da reta h'' que tem 2 cm de afastamento.

A partir das projeções dos três pontos, desenharam-se as projeções do triângulo $[ABC]$.

Resolução:**Determinação da verdadeira grandeza do triângulo:**

O plano que contém o triângulo $[ABC]$ (o plano α) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o triângulo $[ABC]$ não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção – ambas as projeções do triângulo estão deformadas. Para se determinar a verdadeira grandeza do triângulo, há que transformar o plano α num plano que seja paralelo a um dos planos de projeção.

De acordo com o que o enunciado pede expressamente, há que transformar o plano α num plano frontal (de frente) com 2 cm de afastamento. Um plano frontal (de frente) é um caso particular dos planos projetantes horizontais (é um plano projetante horizontal que é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que, antes de mais, há que transformar o plano α num plano projetante horizontal.

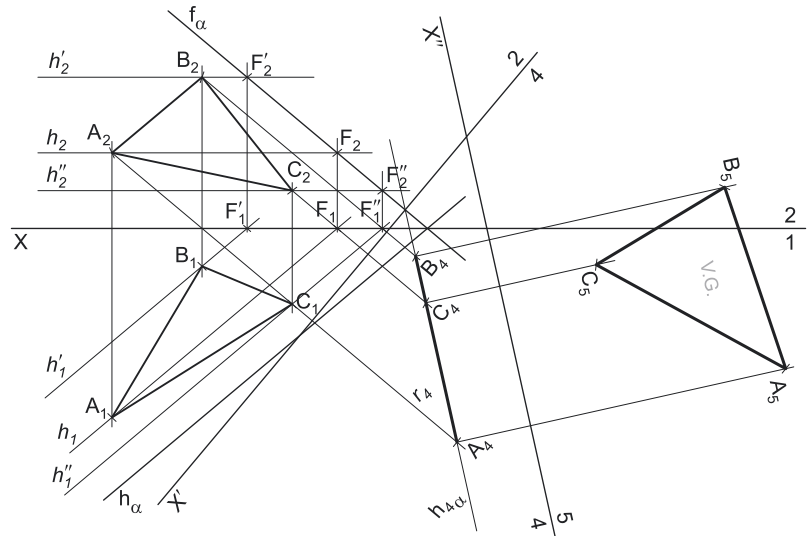
Para transformar o plano α num plano projetante horizontal (um plano vertical) é necessário substituir o Plano Horizontal de Projeção por um outro plano (o **plano 4**), ortogonal ao plano α . Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Frontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções frontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções horizontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se os afastamentos** (que estão referenciados ao plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as cotas** (que estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo X (o eixo X') é a reta de interseção do **plano 2** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinou convenientemente com **2/4**. Como o **plano 4** é ortogonal ao plano α , o eixo X' é perpendicular ao traço frontal do plano (f_α). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo X' (o novo eixo X). A_4 é a projeção do ponto A no **plano 4** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de A_4 ao eixo X' é igual à distância de A_1 ao eixo X (que é 5 cm – o afastamento de A). Em seguida, desenhou-se o traço do plano α no **plano 4** – $h_{4\alpha}$. Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano α é um plano projetante horizontal, o traço do plano α no **plano 4** ($h_{4\alpha}$) está definido por dois pontos – o seu ponto de concorrência com f_α (que se situa no eixo X') e A_4 (a nova projeção horizontal do ponto A). Em seguida, determinaram-se as projeções dos pontos B e C no **plano 4** (B_4 e C_4), que se situam necessariamente sobre $h_{4\alpha}$ (pois, no novo diedro de projeção, o plano α é um plano projetante horizontal). Note que B_4 e C_4 se poderiam ter determinado em função dos respetivos afastamentos, que se situariam igualmente sobre $h_{4\alpha}$. A projeção do triângulo $[ABC]$ no **plano 4** reduz-se a um segmento de reta sobre $h_{4\alpha}$, pois o plano α , no novo diedro de projeção, é um plano projetante horizontal (um plano vertical).

Agora, há que transformar o plano α num plano frontal (de frente) com 2 cm de afastamento. Para tal, é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção por um outro plano (o **plano 5**), paralelo ao plano α . Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o **plano 4**, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o **plano 4**, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as novas projeções horizontais** dos pontos (as projeções no **plano 4** – o plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções dos pontos no novo plano de projeção – o **plano 5**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se manteve – o **plano 4**) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 5**).



(continua na página seguinte)

RESOLUÇÕES

(continuação da página anterior)

Assim, o novo eixo X (o eixo X'') é a reta de interseção do **plano 4** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 5** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **5/4**. Como o **plano 5** é paralelo ao plano α , o eixo X'' é paralelo ao traço horizontal do plano α (h_{α}) e situa-se a 2 cm deste (o afastamento pretendido para o plano α). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo X'' (o novo eixo X). A_5 é a projeção do ponto **A** no **plano 5** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de A_5 ao eixo X'' é igual à distância de A_2 ao eixo X' . B_5 é a projeção do ponto **B** no **plano 5** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de B_5 ao eixo X'' é igual à distância de B_2 ao eixo X' . C_5 é a projeção do ponto **C** no **plano 5** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de C_5 ao eixo X'' é igual à distância de C_2 ao eixo X' .

No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 4** e pelo **plano 5**), o plano α é um plano frontal (de frente) com 2 cm de afastamento – no novo diedro de projeção, o plano α é paralelo ao **plano 5**, pelo que não tem traço frontal. Assim, o triângulo projeta-se em verdadeira grandeza no **plano 5**, pois o plano que o contém (o plano α) é paralelo ao **plano 5**.

A partir das projeções dos três pontos no **plano 5**, desenhou-se a nova projeção frontal do triângulo – o triângulo $[A_5B_5C_5]$ é a verdadeira grandeza do triângulo $[ABC]$.

Traçado:

As projeções do triângulo $[ABC]$ representaram-se a **médio**, pois integram os dados. O eixo X representa-se igualmente a **médio** (é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano α , apesar de integrarem os dados, representaram-se a **médio-leve**, pois, neste exercício, são auxiliares. A projeção do triângulo no **plano 5** representou-se a **forte**, pois é o pedido – é nessa projeção que se pode medir a verdadeira grandeza do triângulo. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas auxiliares (caso do eixo X e do eixo X'') ou são linhas de chamada.

49.

Dados:

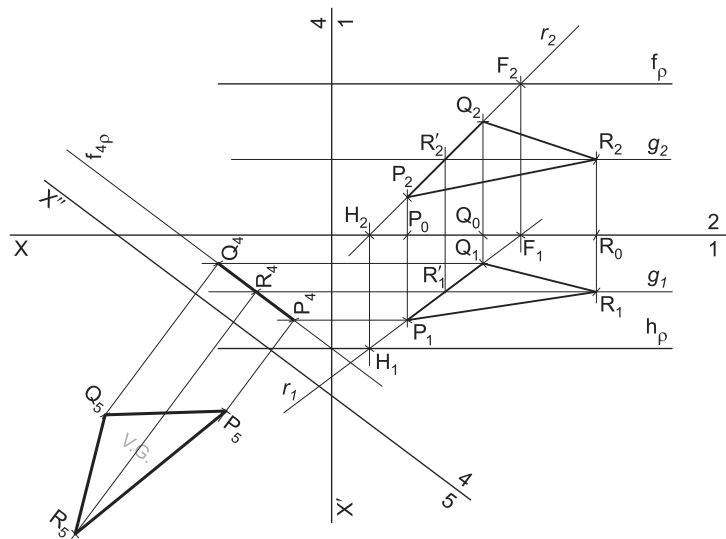
Em primeiro lugar, representou-se o plano ρ , pelos seus traços, em função dos dados. Os dados permitiram-nos, ainda determinar as projeções frontais dos pontos **P**, **Q** e **R**, em função das respetivas cotas e da relação de abcissas existentes entre os três pontos.

Determinação das projeções do triângulo:

Em seguida, determinaram-se as projeções do triângulo $[PQR]$ – os pontos **P**, **Q** e **R**, para pertencerem ao plano ρ , têm de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (têm de pertencer, cada um deles, a uma reta que pertença ao plano).

A reta r é a reta oblíqua do plano a que se recorreu para se determinarem as projeções dos pontos **P** e **Q**. Em primeiro lugar, desenhou-se a projeção frontal da reta r (r_2), passando pelas projeções frontais dos pontos **P** e **Q** (P_2 e Q_2). A reta r , porque pertence ao plano ρ , tem os seus traços sobre os traços homónimos do plano (**condição para que uma reta pertença a um plano**) – a reta r está definida por dois pontos (os pontos **F** e **H**, os seus traços). As projeções horizontais dos pontos **P** e **Q** (P_1 e Q_1) estão sobre a projeção horizontal da reta r (r_1).

A reta g é a reta fronto-horizontal do plano a que se recorreu para se determinar a projeção horizontal do ponto **R** – a projeção frontal da reta g (g_2) passa pela projeção frontal do ponto **R** (R_2). A reta g está definida por um ponto (o ponto R' , o seu ponto de concorrência com a reta r) e por uma direção (é fronto-horizontal). A projeção horizontal do ponto **R** (R_1) está sobre a projeção horizontal da reta g (g_1).



A partir das projeções dos três pontos, desenharam-se as projeções do triângulo $[PQR]$.

Resolução:

Determinação da verdadeira grandeza do triângulo:

O plano que contém o triângulo $[PQR]$ (o plano ρ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o triângulo $[PQR]$ não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção – ambas as projeções do triângulo estão deformadas. Para se determinar a verdadeira grandeza do triângulo, há que transformar o plano ρ num plano que seja paralelo a um dos planos de projeção.

De acordo com o que o enunciado pede expressamente, há que transformar o plano ρ num plano horizontal (de nível) com 1 cm de cota. Um plano horizontal (de nível) é um caso particular dos planos projetantes frontais (é um plano projetante frontal que é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que, antes de mais, há que transformar o plano ρ num plano projetante frontal.

Para transformar o plano ρ num plano projetante frontal (um plano de topo) é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção por um outro plano (o **plano 4**), ortogonal ao plano ρ . Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções**, **mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas**, **mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, o novo eixo X (o eixo X') é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com $1/4$. Como o **plano 4** é ortogonal ao plano ρ , o eixo X' é perpendicular ao traço horizontal do plano (h_p). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo X' (o novo eixo X). Q_4 é a projeção do ponto Q no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de Q_4 ao eixo X' é igual à distância de Q_2 ao eixo X (que é 3 cm – a cota de Q). Em seguida, desenhou-se o traço do plano ρ no **plano 4** – f_{4p} . Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano ρ é um plano projetante frontal, o traço do plano ρ no **plano 4** (f_{4p}) está definido por dois pontos – o seu ponto de concorrência com h_p (que se situa no eixo X') e Q_4 (a nova projeção frontal do ponto Q). Em seguida, determinaram-se as projeções dos pontos P e R no **plano 4** (P_4 e R_4), que se situam necessariamente sobre f_{4p} , (pois, no novo diedro de projeção, o plano ρ é um plano projetante frontal). Note que P_4 e R_4 se poderiam ter determinado em função das respetivas cotas, que se situariam igualmente sobre f_{4p} . A projeção do triângulo $[PQR]$ no **plano 4** reduz-se a um segmento de reta sobre f_{4p} , pois o plano ρ , no novo diedro de projeção, é um plano projetante frontal (um plano de topo).

Agora, há que transformar o plano ρ num plano horizontal (de nível) com 1 cm de cota. Para tal, é necessário substituir o Plano Horizontal de Projeção por um outro plano (o **plano 5**), paralelo ao plano ρ . Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o **plano 4**, que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se mantém o **plano 4**, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as novas projeções frontais** dos pontos (as projeções no **plano 4** – o plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções horizontais** (que passarão a ser as projeções dos pontos no novo plano de projeção – o **plano 5**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se os afastamentos** (que estão referenciados ao plano de projeção que se manteve – o **plano 4**) e **alteram-se as cotas** (que estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao **plano 5**).

Assim, o novo eixo X (o eixo X'') é a reta de interseção do **plano 4** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 5** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com $4/5$. Como o **plano 5** é paralelo ao plano ρ , o eixo X'' é paralelo ao traço frontal do plano ρ (f_{4p}) e situa-se a 1 cm deste (a cota pretendido para o plano ρ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo X'' (o novo eixo X). P_5 é a projeção do ponto P no **plano 5** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de P_5 ao eixo X'' é igual à distância de P_1 ao eixo X' . Q_5 é a projeção do ponto Q no **plano 5** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de Q_5 ao eixo X'' é igual à distância de Q_1 ao eixo X' . R_5 é a projeção do ponto R no **plano 5** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de R_5 ao eixo X'' é igual à distância de R_1 ao eixo X' .

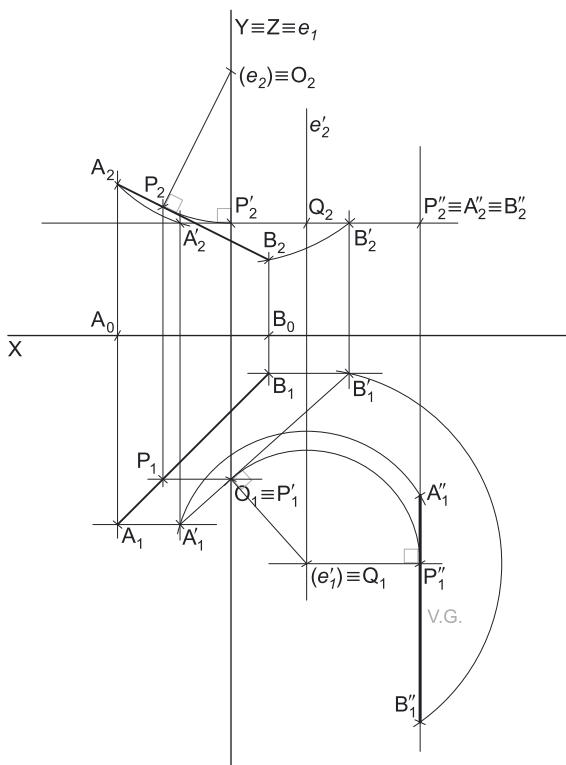
No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 4** e pelo **plano 5**), o plano ρ é um plano horizontal (de nível) com 1 cm de cota – no novo diedro de projeção, o plano ρ é paralelo ao **plano 5**, pelo que não tem traço horizontal. Assim, o triângulo projeta-se em verdadeira grandeza no **plano 5**, pois o plano que o contém (o plano ρ) é paralelo ao **plano 5**.

A partir das projeções dos três pontos no **plano 5**, desenhou-se a nova projeção frontal do triângulo – o triângulo $[A_5B_5C_5]$ é a verdadeira grandeza do triângulo $[ABC]$.

Traçado:

As projeções do triângulo $[PQR]$ representaram-se a **médio**, pois integram os dados. O eixo X representa-se igualmente a **médio** (é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano ρ , apesar de integrarem os dados, representaram-se a **médio-leve**, pois, neste exercício, são auxiliares. A projeção do triângulo no **plano 5** representou-se a **forte**, pois é o pedido – é nessa projeção que se pode medir a verdadeira grandeza do triângulo. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas auxiliares (caso do eixo X e do eixo X'') ou são linhas de chamada.

50.



Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o segmento de reta $[AB]$, pelas suas projeções, em função dos dados.

Resolução:

O segmento de reta $[AB]$ é um segmento de reta oblíquo, pelo que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção – o segmento não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do segmento estão deformadas). Nesse sentido, para determinar a verdadeira grandeza do segmento, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

De acordo com o enunciado, pretende-se determinar a verdadeira grandeza do segmento de reta $[AB]$, transformando-o num segmento de reta de topo. Uma reta de topo é um caso particular das retas horizontais (é uma reta horizontal que é ortogonal ao Plano Frontal de Projeção), pelo que, antes de mais, há que transformar o segmento de reta $[AB]$ num segmento de reta horizontal (de nível).

Transformação do segmento de reta $[AB]$ num segmento de reta horizontal (de nível):

Para transformar o segmento de reta $[AB]$ num segmento de reta horizontal (de nível) é necessário efetuar uma rotação na qual sejam as cotas dos pontos que se alteram, mantendo-se os seus afastamentos. Assim, os arcos de rotação dos pontos do segmento estão contidos em planos frontais (de frente), pelo que o eixo da rotação é uma reta de topo. Nesse sentido, desenharam-se as projeções de um eixo qualquer, de topo – a reta e . Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto que nos permite rodar o segmento – o ponto P . O ponto P é o ponto do segmento de reta $[AB]$, tal que $[OP]$ é simultaneamente perpendicular ao eixo de rotação (reta e) e ao segmento de reta $[AB]$, sendo que O é o centro da rotação do ponto P . O ponto O é o ponto de interseção do eixo da rotação (reta e) com o plano frontal (cuja identificação se omitiu) que contém o arco

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

da rotação do ponto **P**. Para transformar o segmento de reta **[AB]** num segmento de reta horizontal (de nível), **[A₂B₂]** (a projeção frontal do segmento **[AB]**), após a rotação, tem de ficar paralelo ao eixo **X**. Assim, porque o segmento **[OP]** é perpendicular a **[AB]**, o segmento **[OP]** tem de rodar até ficar vertical – a projeção horizontal do ponto **P** (**P₁**), após a rotação, tem de ficar coincidente com **O₁** (a projeção horizontal do ponto **O**). O arco da rotação do ponto **P** projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção, pois está contido num plano frontal (de frente). Assim, com o compasso, fazendo centro em **O₂** (a projeção frontal do ponto **O**) e com raio até **P₂** (a projeção frontal do ponto **P**), desenhou-se a projeção frontal do arco da rotação de **P** até à vertical que passa por **O₂** e na qual se situa **P'₂ – P'₁** fica imediatamente coincidente com **O₁**. O ponto **P'** é o ponto **P** rodado.

Efetuada a rotação de **[OP]**, sabe-se que a projeção frontal da reta suporte do segmento, após a rotação, passa por **P'₂** e é perpendicular a **[O₂P'₂]**, pelo que fica paralela ao eixo **X** (que era precisamente o pretendido). Em seguida, rodaram-se os pontos **A** e **B** ao longo dos planos frontais (de frente) que os contêm, em torno dos respetivos centros de rotação, de forma que **A'₂** e **B'₂** fiquem sobre a projeção frontal da reta suporte do segmento, ou seja, até que **A'₂** e **B'₂** fiquem sobre a paralela ao eixo **X** que passa por **P'₂**. Não se identificaram os centros dos arcos de rotação dos pontos **A** e **B** nem os planos frontais (de frente) que contêm os respetivos arcos de rotação. O arco da rotação do ponto **A** projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (pois também está contido num plano frontal) e a projeção frontal do seu centro (que não se identificou) está coincidente com **O₂ ≡ (e₂)**. Com o compasso, fazendo centro em **e₂** e raio até **A₂**, desenhou-se a projeção frontal do arco da rotação de **A** até à paralela ao eixo **X** que passa por **P'₂**, sobre a qual se situa **A'₂** (**A'** é o ponto **A** rodado). A rotação do ponto **A** processa-se ao longo do plano frontal (de frente) que contém o arco da sua rotação, pelo que **A'₁** (a projeção horizontal do ponto **A** rodado) se situa na paralela ao eixo **X** que passa por **A₁** (o ponto **A** mantém o seu afastamento, na rotação efetuada). O processo exposto para a rotação do ponto **A** repetiu-se para o ponto **B**, o que nos permitiu determinar as projeções do ponto **B'** (o ponto **B** rodado).

Transformação do segmento de reta **[A'B']** num segmento de reta de topo:

O segmento de reta **[A'B']** (o segmento de reta **[AB]** após a rotação) está paralelo ao Plano Horizontal de Projeção (é horizontal) e é o segmento de reta **[AB]** rodado. Agora há que rodar o segmento, até o transformar num segmento de reta de topo, o que se processa com o recurso a uma segunda rotação. Tenha em conta que uma reta de topo é um caso particular das retas horizontais (de nível) e que o segmento **[A'B']** já é um segmento de reta horizontal (de nível).

Assim, para transformar o segmento de reta **[A'B']** num segmento de reta de topo é necessário efetuar uma rotação na qual sejam os afastamentos dos pontos que se alteram, mantendo-se as suas cotas. Assim, os arcos de rotação dos pontos do segmento estão contidos em planos horizontais (de nível), pelo que o eixo da rotação é uma reta vertical. Nesse sentido, desenharam-se as projeções de um eixo qualquer, vertical – a reta **e'**. Note que se localizou a reta **e'** de forma que, nesta segunda rotação, o ponto **P'** seja o ponto que nos permite rodar o segmento de reta. Nesse sentido, posicionou-se a reta **e'** (o segundo eixo de rotação) de forma que **[QP']** seja simultaneamente perpendicular ao eixo de rotação (reta **e'**) e ao segmento de reta **[A'B']**, sendo que **Q** é o centro da rotação do ponto **P'**. O ponto **Q** é o ponto de interseção do eixo da rotação (reta **e'**) com o plano horizontal (cuja identificação se omitiu) que contém o arco da rotação do ponto **P'**. Para transformar o segmento de reta **[A'B']** num segmento de reta de topo, **[A'₁B'₁]** (a projeção horizontal do segmento **[A'B']**), após a rotação, tem de ficar perpendicular ao eixo **X**. Assim, porque o segmento **[QP']** é perpendicular a **[A'B']**, o segmento **[QP']** tem de rodar até ficar paralelo ao eixo **X** – o ponto **P'**, após a rotação, tem de ficar com o afastamento do ponto **Q**. O arco da rotação do ponto **P'** projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção, pois está contido num plano horizontal (de nível). Assim, com o compasso, fazendo centro em **Q₁** (a projeção horizontal do ponto **Q**) e com raio até **P'₁** (a projeção horizontal do ponto **P'**), desenhou-se a projeção horizontal do arco da rotação de **P'** até à paralela ao eixo **X** que passa por **Q₁** e na qual se situa **P''₁**. Uma vez que a rotação do ponto **P'** se processa num plano horizontal (de nível), o ponto **P''** mantém a sua cota. O ponto **P''** é o ponto **P'** rodado.

Efetuada a rotação de **[QP']**, sabe-se que a projeção horizontal da reta suporte do segmento, após a rotação, passa por **P''₁** e é perpendicular a **[Q₁P''₁]**, pelo que fica perpendicular ao eixo **X** (que era precisamente o pretendido). Em seguida, rodaram-se os pontos **A'** e **B'** ao longo dos planos horizontais (de nível) que os contêm, em torno dos respetivos centros de rotação, de forma que **A'₁** e **B'₁** fiquem sobre a projeção horizontal da reta suporte do segmento, ou seja, até que **A'₁** e **B'₁** fiquem sobre a perpendicular ao eixo **X** que passa por **P''₁**. Não se identificaram os centros dos arcos de rotação dos pontos **A'** e **B'** nem os planos horizontais (de nível) que contêm os respetivos arcos de rotação. O arco da rotação do ponto **A'** projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (pois também está contido num plano horizontal) e a projeção horizontal do seu centro (que não se identificou) está coincidente com **Q₁ ≡ (e'₁)**. Com o compasso, fazendo centro em **e'₁** e raio até **A'₁**, desenhou-se a projeção horizontal do arco da rotação de **A'** até à perpendicular ao eixo **X** que passa por **P''₁**, sobre a qual se situa **A''₁** (**A''** é o ponto **A'** rodado). A rotação do ponto **A'** processa-se ao longo do plano horizontal (de nível) que contém o arco da sua rotação, pelo que **A''₂** (a projeção frontal do ponto **A'** rodado) se situa na paralela ao eixo **X** que passa por **A'₂** (o ponto **A'** mantém a sua cota, na rotação efetuada). O processo exposto para a rotação do ponto **A'** repetiu-se para o ponto **B'**, o que nos permitiu determinar as projeções do ponto **B''** (o ponto **B'** rodado).

O segmento **[A''B'']** é o segmento de reta **[AB]** após a segunda rotação e está transformado num segmento de reta de topo.

Determinação da verdadeira grandeza do segmento de reta **[AB]**:

Como o segmento, agora, já está paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, a verdadeira grandeza de **AB** está na projeção horizontal do segmento **[A''B'']** – **A''₁B''₁** é a verdadeira grandeza do segmento de reta **[AB]**. Note que a verdadeira grandeza do segmento já estava na projeção horizontal do segmento **[A'B']** (que já era um segmento de reta horizontal), mas o enunciado pede especificamente para determinar a verdadeira grandeza do segmento, transformando-o previamente num segmento de reta de topo. Por essa razão se assinalou a verdadeira grandeza do segmento apenas após a conclusão do pedido no enunciado.

Traçado:

As projeções do segmento de reta **[AB]** representaram-se a **médio**, pois integram os dados. O eixo **X** representou-se igualmente a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. As projeções dos segmentos de reta **[A''B'']** (um objetivo parcial do exercício) representam-se a **médio-forte**, pois é parte do pedido no exercício. No entanto, o objetivo final do exercício é a determinação da verdadeira grandeza do segmento, que está na projeção horizontal do segmento **[A''B'']**. Assim, a projeção horizontal do segmento **[A''B'']** (o segmento **[A''₁B''₁]**) representou-se a **forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas auxiliares (caso dos eixos de rotação **e** e **e'**, das projeções dos arcos de rotação, etc.) ou são linhas de chamada.

51.

Dados:

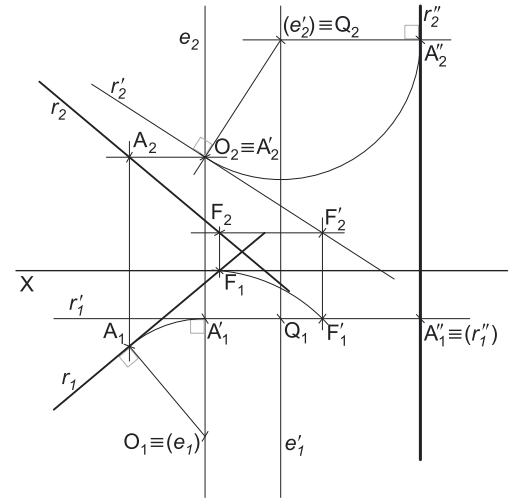
Em primeiro lugar, representou-se a reta r , pelas suas projeções, em função dos dados. A reta r é paralela ao $\beta_{1/3}$, pelo que as suas projeções fazem, com o eixo X , ângulos iguais e com abertura para o mesmo lado (retas paralela ao $\beta_{1/3}$ são retas não passantes cujas projeções fazem, com o eixo X , ângulos iguais e com abertura para o mesmo lado).

Resolução:

Pretende-se transformar a reta r numa reta vertical. Uma reta vertical é um caso particular das retas frontais (é uma reta frontal que é ortogonal ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que, antes de mais, há que transformar a reta r numa reta frontal (de frente).

Transformação da reta r numa reta frontal (de frente):

Para transformar a reta r numa reta frontal (de frente), é necessário efetuar uma rotação na qual sejam os afastamentos dos pontos que se alteram, mantendo-se as suas cotas. Nesse sentido, os arcos de rotação dos pontos da reta r têm de estar contidos em planos horizontais (de nível), para que se mantenham as cotas, pelo que o eixo de rotação é **necessariamente** uma reta vertical (o eixo da rotação é ortogonal aos planos que contêm os arcos da rotação).



Nesse sentido, desenharam-se as projeções de um eixo qualquer, vertical – a reta e . Note que se localizou a reta e de forma que o ponto A seja o ponto que nos permite rodar a reta. Nesse sentido, posicionou-se a reta e (o eixo de rotação) de forma que $[OA]$ seja simultaneamente perpendicular ao eixo de rotação (reta e) e à reta r , sendo que O é o centro da rotação do ponto A . O ponto O é o ponto de interseção do eixo da rotação (reta e) com o plano horizontal (cuja identificação se omitiu) que contém o arco da rotação do ponto A .

Para transformar a reta r numa reta frontal (de frente), a projeção horizontal da reta r (r_1), após a rotação, tem de ficar paralela ao eixo X . Assim, porque o segmento $[OA]$ é perpendicular à reta r , o segmento $[OA]$ tem de rodar até ficar de topo, ou seja, tem de rodar até a projeção frontal do ponto A (A_2), após a rotação, ficar coincidente com O_2 (a projeção frontal do ponto O). O arco da rotação do ponto A projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção, pois está contido num plano horizontal (de nível). Assim, com o compasso, fazendo centro em O_1 (a projeção horizontal do ponto O) e com raio até A_1 (a projeção horizontal do ponto A), desenhou-se a projeção horizontal do arco da rotação de A até à linha de chamada do ponto O e na qual se situa $A'_1 - A'_2$ fica imediatamente coincidente com O_2 . O ponto A' é o ponto A rodado. Efetuada a rotação de $[OA]$, sabe-se que a projeção horizontal da reta r , após a rotação (r'_1), passa por A'_1 e é perpendicular ao segmento $[O_1A'_1]$, sendo r' a reta r rodada. Note que, pelo exposto, r'_1 (a projeção horizontal da reta r rodada) fica paralela ao eixo X , que era o pretendido. Neste momento, já temos um ponto para definir a reta r' – o ponto A' . Falta-nos outro ponto para definir a reta r' .

Nesse sentido, determinou-se um outro ponto da reta r (o ponto F , o seu traço frontal) e efetuou-se a sua rotação. A rotação do ponto F processou-se ao longo do plano horizontal (de nível) que o contém, em torno do centro do arco da sua rotação, de forma que F'_1 fique sobre a projeção horizontal da reta r' (r'_1). Não se identificou o centro do arco da rotação do ponto F nem o plano horizontal (de nível) que contém o arco da sua rotação. O arco da rotação do ponto F projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (pois também está contido num plano horizontal) e a projeção horizontal do seu centro (que não se identificou) está coincidente com $O_1 \equiv (e_1)$. Com o compasso, fazendo centro em e_1 e raio até F_1 , desenhou-se a projeção horizontal do arco da rotação de F até r'_1 (a projeção horizontal da reta r'), sobre a qual se situa F'_1 (F' é o ponto F rodado). A rotação do ponto F processa-se ao longo do plano horizontal (de nível) que o contém, pelo que F'_2 (a projeção frontal do ponto F rodado) se situa na paralela ao eixo X que passa por F_2 (o ponto F mantém a sua cota, na rotação efetuada).

Por fim, desenhou-se a projeção frontal da reta r' (r'_2), que está definida por dois pontos – os pontos A'_2 e F'_2 . A reta r' é a reta rodada e é uma reta frontal (de frente), pois está paralela ao Plano Frontal de Projeção.

Transformação da reta r' numa reta vertical:

Para transformar a reta r' numa reta vertical, é necessário efetuar uma rotação na qual sejam as cotas dos pontos que se alteram, mantendo-se os seus afastamentos. Nesse sentido, os arcos de rotação dos pontos da reta r' têm de estar contidos em planos frontais (de frente), para que se mantenham os afastamentos, pelo que o eixo de rotação é **necessariamente** uma reta de topo (o eixo da rotação é ortogonal aos planos que contêm os arcos da rotação).

Nesse sentido, desenharam-se as projeções de um eixo qualquer, de topo – a reta e' . Note que se localizou a reta e' de forma que o ponto A' seja o ponto que nos permite rodar a reta. Nesse sentido, posicionou-se a reta e' (o eixo da segunda rotação) de forma que $[QA']$ seja simultaneamente perpendicular ao eixo de rotação (reta e') e à reta r' , sendo que Q é o centro da rotação do ponto A' . O ponto Q é o ponto de interseção do eixo da rotação (reta e') com o plano frontal (cuja identificação se omitiu) que contém o arco da rotação do ponto A' .

Para transformar a reta r' numa reta vertical, a projeção frontal da reta r' (r'_2), após a rotação, tem de ficar perpendicular ao eixo X . Assim, porque o segmento $[QA']$ é perpendicular à reta r' , o segmento $[QA']$ tem de rodar até ficar fronto-horizontal, ou seja, tem de rodar até a projeção horizontal do ponto A' (A'_2), após a rotação, ter a mesma cota de Q_2 (a projeção frontal do ponto Q). O arco da rotação do ponto A' projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção, pois está contido num plano frontal (de frente). Assim, com o compasso, fazendo centro em Q_2 (a projeção frontal do ponto Q) e com raio até A'_2 (a projeção frontal do ponto A'), desenhou-se a projeção frontal do arco da rotação de A' até à linha horizontal que passa por Q_2 e na qual se situa $A''_2 - A''_1$ determina-se imediatamente, pois o ponto A' mantém o seu afastamento. O ponto A'' é o ponto A' rodado. Efetuada a rotação de $[QA']$, sabe-se que a projeção frontal da reta r' , após a rotação (r''_2), passa por A''_2 e é perpendicular ao segmento $[Q_2A''_2]$, sendo r'' a reta r' rodada. Note que, pelo exposto, r''_2 (a projeção frontal da reta r' rodada) fica perpendicular ao eixo X , que era o pretendido. Neste momento, já temos um ponto para definir a reta r'' – o ponto A'' . Por outro lado, temos também a direção da reta r'' – é uma reta vertical (a reta foi transformada numa reta vertical). Assim, a reta r'' está definida por um ponto (o ponto A'') e uma direção (é vertical), o que nos permitiu determinar imediatamente a sua projeção horizontal (r''_1), que se reduz a um ponto coincidente com A''_1 .

A reta r'' é a reta r pós a segunda rotação e é uma reta vertical, pois é ortogonal ao Plano Horizontal de Projeção.

Traçado:

As projeções da reta r representaram-se a **médio**, pois integram os dados. O eixo X representou-se igualmente a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. As projeções da reta r'' (a reta r após as duas rotações) representaram-se a **forte**, pois é o objetivo do exercício (é o pedido). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas auxiliares (caso dos eixos de rotação e e e' , das projeções dos arcos de rotação, etc.) ou são linhas de chamada.

52.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o segmento de reta **[RS]**, pelas suas projeções, em função dos dados.

Resolução:

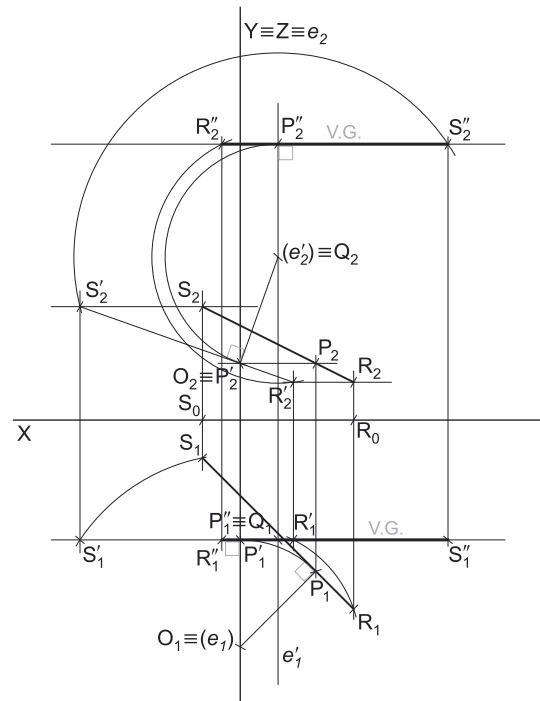
O segmento de reta **[RS]** é um segmento de reta oblíquo, pelo que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção – o segmento não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do segmento estão deformadas). Nesse sentido, para determinar a verdadeira grandeza do segmento, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

De acordo com o enunciado, pretende-se determinar a verdadeira grandeza do segmento de reta **[RS]**, transformando-o num segmento de reta fronto-horizontal. Uma reta fronto-horizontal é simultaneamente um caso particular das retas horizontais (é uma reta horizontal que é paralela ao Plano Frontal de Projeção) e um caso particular das retas frontais (é uma reta frontal que é paralela ao Plano Horizontal de Projeção). Assim, antes de mais, há que transformar o segmento de reta **[RS]** num segmento de reta horizontal (de nível) ou num segmento de reta frontal (de frente).

Optou-se por esta segunda hipótese – por transformar previamente o segmento num segmento de reta frontal (de frente).

Transformação do segmento de reta **[RS]** num segmento de reta frontal (de frente):

Para transformar o segmento de reta **[RS]** num segmento de reta frontal (de frente) é necessário efetuar uma rotação na qual sejam os afastamentos dos pontos que se alteram, mantendo-se as suas cotas. Assim, os arcos de rotação dos pontos do segmento estão contidos em planos horizontais (de nível), pelo que o eixo da rotação é uma reta vertical. Nesse sentido, desenharam-se as projeções de um eixo qualquer, vertical – a reta **e**. Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto que nos permite rodar o segmento – o ponto **P**. O ponto **P** é o ponto do segmento de reta **[RS]**, tal que **[OP]** é simultaneamente perpendicular ao eixo de rotação (reta **e**) e ao segmento de reta **[RS]**, sendo que **O** é o centro da rotação do ponto **P**. O ponto **O** é o ponto de interseção do eixo da rotação (reta **e**) com o plano horizontal (cuja identificação se omitiu) que contém o arco da rotação do ponto **P**. Para transformar o segmento de reta **[RS]** num segmento de reta frontal (de frente), **[R₁S₁]** (a projeção horizontal do segmento **[RS]**), após a rotação, tem de ficar paralelo ao eixo **X**. Assim, porque o segmento **[OP]** é perpendicular a **[RS]**, o segmento **[OP]** tem de rodar até ficar de topo – a projeção frontal do ponto **P** (**P₂**), após a rotação, tem de ficar coincidente com **O₂** (a projeção frontal do ponto **O**). O arco da rotação do ponto **P** projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção, pois está contido num plano horizontal (de nível). Assim, com o compasso, fazendo centro em **O₁** (a projeção horizontal do ponto **O**) e com raio até **P₁** (a projeção horizontal do ponto **P**), desenhou-se a projeção horizontal do arco da rotação de **P** até à linha de chamada do ponto **O**, na qual se situa **P₁' – P₂'** fica imediatamente coincidente com **O₂**. O ponto **P'** é o ponto **P** rodado.



Efetuada a rotação de **[OP]**, sabe-se que a projeção horizontal da reta suporte do segmento, após a rotação, passa por **P₁'** e é perpendicular a **[O₁P₁']**, pelo que fica paralela ao eixo **X** (que era precisamente o pretendido). Em seguida, rodaram-se os pontos **R** e **S** ao longo dos planos horizontais (de nível) que os contêm, em torno dos respetivos centros de rotação, de forma que **R₁'** e **S₁'** fiquem sobre a projeção horizontal da reta suporte do segmento, ou seja, até que **R₁'** e **S₁'** fiquem sobre a paralela ao eixo **X** que passa por **P₁'**. Não se identificaram os centros dos arcos de rotação dos pontos **R** e **S** nem os planos frontais (de frente) que contêm os respetivos arcos de rotação. O arco da rotação do ponto **R** projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (pois também está contido num plano horizontal) e a projeção horizontal do seu centro (que não se identificou) está coincidente com **O₁ ≡ (e₁)**. Com o compasso, fazendo centro em **e₁** e raio até **R₁**, desenhou-se a projeção horizontal do arco da rotação de **R** até à paralela ao eixo **X** que passa por **P₁'**, sobre a qual se situa **R₁'** (**R'** é o ponto **R** rodado). A rotação do ponto **R** processa-se ao longo do plano horizontal (de nível) que contém o arco da sua rotação, pelo que **R₂'** (a projeção frontal do ponto **R** rodado) se situa na paralela ao eixo **X** que passa por **R₂** (o ponto **R** mantém a sua cota, na rotação efetuada). O processo exposto para a rotação do ponto **R** repetiu-se para o ponto **S**, o que nos permitiu determinar as projeções do ponto **S'** (o ponto **S** rodado).

Transformação do segmento de reta **[R'S']** num segmento de reta fronto-horizontal:

O segmento de reta **[R'S']** (o segmento de reta **[RS]** após a rotação) está paralelo ao Plano Frontal de Projeção (é frontal) e é o segmento de reta **[RS]** rodado. Agora há que rodar o segmento, até o transformar num segmento de reta fronto-horizontal, o que se processa com o recurso a uma segunda rotação. Tenha em conta que uma reta fronto-horizontal é um caso particular das retas frontais (de frente) e que o segmento **[R'S']** já é um segmento de reta frontal (de frente).

Assim, para transformar o segmento de reta **[R'S']** num segmento de reta fronto-horizontal é necessário efetuar uma rotação na qual sejam as cotas dos pontos que se alteram, mantendo-se os seus afastamentos. Assim, os arcos de rotação dos pontos do segmento estão contidos em planos frontais (de frente), pelo que o eixo da rotação é uma reta de topo. Nesse sentido, desenharam-se as projeções de um eixo qualquer, de topo – a reta **e'**. Note que se localizou a reta **e'** de forma que, nesta segunda rotação, o ponto **P'** seja o ponto que nos permite rodar o segmento de reta. Nesse sentido, posicionou-se a reta **e'** (o segundo eixo de rotação) de forma que **[QP']** seja simultaneamente perpendicular ao eixo de rotação (reta **e'**) e ao segmento de reta **[R'S']**, sendo que **Q** é o centro da rotação do ponto **P'**. O ponto **Q** é o ponto de interseção do eixo da rotação (reta **e'**) com o plano frontal (cuja identificação se omitiu) que contém o arco da rotação do ponto **P'**. Para transformar o segmento de reta **[R'S']** num segmento de reta fronto-horizontal, **[R₂S₂']** (a projeção frontal do segmento **[R'S']**), após a rotação, tem de ficar paralela ao eixo **X**. Assim, porque o segmento **[QP']** é perpendicular a **[R'S']**, o segmento **[QP']** tem de rodar até ficar vertical – o ponto **P'**, após a rotação, na vertical que passa pelo ponto **Q**. O arco da rotação do ponto **P'** projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção, pois está contido num plano frontal (de frente). Assim, com o compasso, fazendo centro em **Q₂** (a projeção frontal do ponto **Q**) e com raio até **P₂'** (a projeção frontal do ponto **P'**), desenhou-se a projeção frontal do arco da rotação de **P'** até à vertical que passa por **Q₂** e na qual se situa **P₂''**. Uma vez que a rotação do ponto **P'** se processa num plano frontal (de frente), o ponto **P'** mantém o seu afastamento. O ponto **P₂''** é o ponto **P'** rodado.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Efetuada a rotação de $[QP']$, sabe-se que a projeção frontal da reta suporte do segmento, após a rotação, passa por P''_2 e é perpendicular a $[Q_2P''_2]$, pelo que fica paralela ao eixo X (que era precisamente o pretendido). Em seguida, rodaram-se os pontos R' e S' ao longo dos planos frontais (de frente) que os contêm, em torno dos respectivos centros de rotação, de forma que R'_2 e S'_2 fiquem sobre a projeção frontal da reta suporte do segmento, ou seja, até que R'_2 e S'_2 fiquem sobre a paralela ao eixo X que passa por P''_2 . Não se identificaram os centros dos arcos de rotação dos pontos R' e S' nem os planos frontais (de frente) que contêm os respetivos arcos de rotação. O arco da rotação do ponto R' projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (pois também está contido num plano frontal) e a projeção frontal do seu centro (que não se identificou) está coincidente com $Q_2 \equiv (e'_2)$. Com o compasso, fazendo centro em e'_2 e raio até R'_2 , desenhou-se a projeção frontal do arco da rotação de R' até à paralela ao eixo X que passa por P''_2 , sobre a qual se situa R''_2 (R'' é o ponto R' rodado). A rotação do ponto R' processa-se ao longo do plano frontal (de frente) que contém o arco da sua rotação, pelo que R''_1 (a projeção horizontal do ponto R' rodado) se situa na paralela ao eixo X que passa por A'_1 (o ponto A' mantém o seu afastamento, na rotação efetuada). O processo exposto para a rotação do ponto R' repetiu-se para o ponto S' , o que nos permitiu determinar as projeções do ponto S'' (o ponto S' rodado).

Salienta-se que esta rotação do segmento de reta se processa num único plano frontal (de frente), que é, afinal, o plano frontal (de frente) que contém o segmento de reta $[R'S']$ (que já era um segmento de reta frontal).

O segmento $[R''S'']$ é o segmento de reta $[RS]$ após a segunda rotação e está transformado num segmento de reta fronto-horizontal.

Determinação da verdadeira grandeza do segmento de reta $[RS]$:

Como o segmento, agora, está paralelo a ambos os planos de projeção, pelo que a verdadeira grandeza de \overline{RS} está em ambas as projeções do segmento $[R''S''] - R''_1S''_1 = R''_2S''_2$ é a verdadeira grandeza do segmento de reta $[RS]$. Note que a verdadeira grandeza do segmento já estava na projeção frontal do segmento $[R'S']$ (que já era um segmento de reta frontal), mas o enunciado pede especificamente para determinar a verdadeira grandeza do segmento, transformando-o previamente num segmento de reta fronto-horizontal. Por essa razão se assinalou a verdadeira grandeza do segmento apenas após a conclusão do pedido no enunciado.

Traçado:

As projeções do segmento de reta $[RS]$ representaram-se a **médio**, pois integram os dados. O eixo X representou-se igualmente a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. As projeções dos segmentos de reta $[R''S'']$ são um objetivo parcial do exercício, mas o objetivo final do exercício (a verdadeira grandeza do segmento) consiste, também, nas duas projeções do segmento, pelo que se representaram a **forte** ambas as projeções do segmento de reta $[A''B'']$. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas auxiliares (caso dos eixos de rotação e e e' , das projeções dos arcos de rotação, etc.) ou são linhas de chamada.

53.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano α , pelos seus traços, em função dos dados. O plano α tem os seus traços simétricos em relação ao eixo X , pois é um plano ortogonal ao $\beta_{1/3}$ (planos ortogonais ao $\beta_{1/3}$ têm os seus traços simétricos em relação ao eixo X). Em seguida, determinaram-se as projeções do triângulo $[ABC]$, em função dos dados.

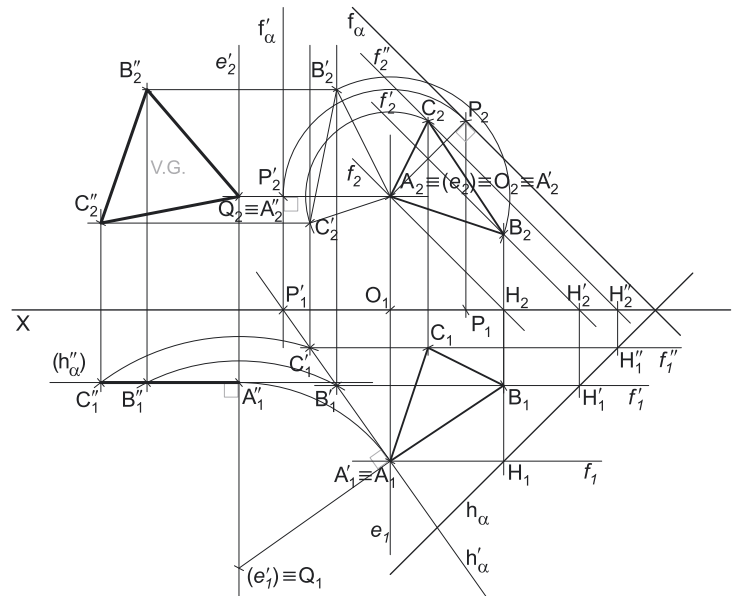
Determinação das projeções do triângulo:

Os pontos A , B e C , para pertencerem ao plano α , têm de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (têm de pertencer, cada um deles, a uma reta que pertença ao plano).

A reta f é a reta frontal (de frente) do plano, com 4 cm de afastamento, a que se recorreu para se determinarem as projeções do ponto A – a reta f está definida por um ponto (o ponto H , o seu traço horizontal) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano α). O ponto A é o ponto da reta f que tem 3 cm de cota.

A reta f' é a reta frontal (de frente) do plano, com 2 cm de afastamento, a que se recorreu para se determinarem as projeções do ponto B – a reta f' está definida por um ponto (o ponto H' , o seu traço horizontal) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano α). O ponto B é o ponto da reta f' que tem 2 cm de cota.

A reta f'' é a reta frontal (de frente) do plano, com 1 cm de afastamento, a que se recorreu para se determinarem as projeções do ponto C – a reta f'' está definida por um ponto (o ponto H'' , o seu traço horizontal) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano α). O ponto C é o ponto da reta f'' que tem 5 cm de cota.



A partir das projeções dos três pontos, desenharam-se as projeções do triângulo $[ABC]$.

Resolução:

O plano que contém o triângulo $[ABC]$ (o plano α) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o triângulo $[ABC]$ não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção – ambas as projeções do triângulo estão deformadas. Para se determinar a verdadeira grandeza do triângulo, há que transformar o plano α num plano que seja paralelo a um dos planos de projeção.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

De acordo com o que o enunciado pede expressamente, há que transformar o plano α num plano frontal (de frente), que é um caso particular dos planos projetantes horizontais (é um plano projetante horizontal que é paralelo ao Plano Frontal de Projeção). Assim, em primeiro lugar, há que transformar o plano α num plano projetante horizontal e só depois será possível transformar o plano projetante horizontal num plano frontal (de frente).

Transformação do plano α num plano projetante horizontal:

Um plano projetante horizontal é um plano vertical, cujo traço frontal é perpendicular ao eixo X . Nesse sentido, a rotação a efetuar tem, como objetivo, rodar o plano α até o seu traço frontal (f_α) ficar vertical (perpendicular ao eixo X). A rotação de f_α processa-se necessariamente no Plano Frontal de Projeção (que é o plano frontal que contém a reta f_α), pelo que se conclui que os arcos da rotação estão contidos em planos frontais (de frente) e que a rotação se processa em torno de um eixo de topo (ortogonal aos planos que contém os arcos da rotação).

Nesse sentido, desenharam-se as projeções de um eixo qualquer, de topo – a reta e . Note que se optou por localizar o eixo e de forma a conter um dos vértices do triângulo – o vértice A , neste caso. Essa opção tem a ver com economia de traçados – o ponto A é um ponto do eixo de rotação, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). Isto evitará a rotação de um ponto – bastará rodar dois pontos (os pontos B e C). Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto que nos permite rodar f_α (e o plano) – o ponto P . O ponto P é o ponto de f_α (o traço frontal do plano α) tal que $[OP]$ é simultaneamente perpendicular ao eixo de rotação (reta e) e a f_α , sendo que O é o centro da rotação do ponto P . O ponto O é o ponto de interseção do eixo da rotação (reta e) com o plano frontal que contém o arco da rotação do ponto P (que é o próprio Plano Frontal de Projeção, pois o ponto P tem afastamento nulo). Para transformar f_α numa reta vertical (que é perpendicular ao eixo X), o segmento $[OP]$ tem de rodar até ficar fronto-horizontal (paralelo ao eixo X) – o ponto P , após a rotação, tem de ficar com a mesma cota do ponto O . O arco da rotação do ponto P está contido no Plano Frontal de Projeção, pelo que está em verdadeira grandeza. Assim, com o compasso, fazendo centro em O_2 (a projeção frontal do ponto O) e com raio até P_2 (a projeção frontal do ponto P), desenhou-se o arco da rotação de P até à linha horizontal que passa por O_2 , na qual se situa $P'_2 - P'_1$ fica no eixo X , pois o ponto manteve o seu afastamento ao longo da sua rotação. O ponto P' é o ponto P rodado.

Por P'_2 conduziu-se f'_{α} , perpendicular ao eixo X – f'_{α} é o traço frontal do plano α , após a sua rotação. Falta-nos rodar os restantes pontos, para definir o plano α após a sua rotação. O ponto A é um ponto do eixo de rotação (reta e), pelo que roda sobre si próprio. Assim, as projeções do ponto A' (o ponto A rodado) estão coincidentes com as projeções do ponto A .

O plano α , após a rotação, é um plano projetante horizontal, pelo que as projeções horizontais de todos os seus pontos (e retas) estão sobre o seu traço horizontal. Assim, é possível, de forma imediata, desenhar o novo traço horizontal do plano α (o traço horizontal do plano após a rotação) – h'_α (o novo traço horizontal do plano α) é concorrente com f'_{α} no eixo X e passa por A'_1 (está definido por dois pontos). O plano α , após a rotação, já é um plano vertical.

Falta-nos rodar os pontos B e C , para ser possível desenhar as projeções do triângulo $[ABC]$, após a rotação. O plano α , após a rotação, foi transformado num plano projetante horizontal, pelo que as projeções horizontais dos pontos B e C (após a rotação) situam-se necessariamente sobre h'_α . Uma vez que os arcos da rotação daqueles pontos estão contidos em planos frontais (de frente), os pontos mantêm os seus afastamentos ao longo da sua rotação – nesse sentido, transportaram-se as projeções horizontais dos pontos B e C para h'_α (através das paralelas ao eixo X que passam por B_1 e C_1), obtendo-se B'_1 e C'_1 sobre h'_α (B' e C' são os pontos B e C rodados, respetivamente).

Analisemos a rotação do ponto B – este tem de rodar em torno do seu centro de rotação, de forma que B'_2 se situe na linha de chamada que passa por B'_1 . Não se identificou o centro do arco de rotação do ponto B nem o plano frontal (de frente) que contém o arco da sua rotação. O arco da rotação do ponto B projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (pois está contido num plano frontal) e a projeção frontal do seu centro (que não se identificou) está coincidente com $O_2 \equiv (e_2)$. Com o compasso, fazendo centro em e_2 e raio até B_2 , desenhou-se a projeção frontal do arco da rotação de B até à linha de chamada de B' , sobre a qual se situa B'_2 (B' é o ponto B rodado). O processo exposto para a rotação do ponto B repetiu-se para o ponto C , o que nos permitiu determinar a projeção frontal do ponto C' (o ponto C rodado) – C'_2 situa-se na linha de chamada que passa por C'_1 .

Por fim, desenharam-se as projeções do triângulo $[A'B'C']$ (o triângulo $[ABC]$, após a rotação do plano α em torno do eixo e) – a projeção horizontal do triângulo reduz-se a um segmento de reta sobre h'_α , pois o plano α , após a rotação, é um plano projetante horizontal.

Transformação do plano α num plano frontal (de frente):

Para transformar o plano α num plano frontal (de frente) é necessário rodar o plano α até que ele fique paralelo ao Plano Frontal de Projeção – as alterações processam-se ao nível dos afastamentos dos pontos, mantendo-se as suas cotas. Assim, os arcos de rotação estão contidos em planos horizontais (porque as cotas se mantêm), pelo que o eixo da rotação tem de ser uma reta vertical (ortogonal aos planos que contém os arcos da rotação).

Nesse sentido, desenharam-se as projeções de um eixo qualquer, vertical (reta e'), de forma a ser ponto A' o ponto que nos permite rodar o plano. Para tal, o segmento de reta $[QA']$ é simultaneamente ortogonal ao plano α e ao eixo de rotação (reta e'), sendo o ponto Q o centro da rotação do ponto A' . Para transformar o plano α num plano frontal (de frente), o seu traço horizontal (h'_α), após a rotação, tem de ficar paralelo ao eixo X . Assim, porque o segmento de reta $[QA']$ é perpendicular a h'_α (o traço horizontal do plano α), o segmento $[QA']$ tem de rodar até ficar de topo (ortogonal ao eixo X). O arco da rotação do ponto A' está contido num plano horizontal (de nível), pelo que se projeta em verdadeira grandeza em projeção horizontal. Assim, com o compasso, fazendo centro em Q_1 (a projeção horizontal do ponto Q) e com raio até A'_1 (a projeção horizontal do ponto A'), desenhou-se o arco da rotação de A' até à vertical que passa por Q_1 , na qual se situa $A''_1 - A''_2$ fica imediatamente coincidente com Q_2 , pois o ponto manteve a sua cota ao longo da sua rotação. O ponto A'' é o ponto A' rodado.

Por A''_1 conduziu-se h''_α , paralelo ao eixo X – h''_α é o traço horizontal do plano α , após a sua rotação. Falta-nos rodar os restantes pontos (os pontos B' e C'), para definir o plano α após a sua rotação e para ser possível desenhar as projeções do triângulo $[A'B'C']$, após a rotação.

O plano α , após a rotação, continua a ser um plano projetante horizontal, pelo que as projeções horizontais dos pontos B' e C' (após a rotação) situam-se necessariamente sobre h''_α . Analisemos a rotação do ponto B' – este tem de rodar em torno do seu centro de rotação, de forma que B''_1 se situe sobre h''_α . Não se identificou o centro do arco de rotação do ponto B' nem o plano horizontal (de nível) que contém o arco da sua rotação. O arco da rotação do ponto B' projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (pois está contido num plano horizontal) e a projeção horizontal do seu centro (que não se identificou) está coincidente com $Q_1 \equiv (e'_1)$. Com o compasso, fazendo centro em e'_1 e raio até B'_1 , desenhou-se a projeção horizontal do arco da rotação de B' até h''_α , sobre a qual se situa B''_1 (B'' é o ponto B' rodado). Uma vez que o arco da rotação do ponto B' está contido num plano horizontal (de nível), o ponto B' mantém a sua cota, o que nos permitiu transportar a cota de B' para a linha de chamada que passa por B''_1 , determinando B''_2 (a projeção frontal do ponto B''). O processo exposto para a rotação do ponto B' repetiu-se para o ponto C' , o que nos permitiu determinar as projeções do ponto C'' (o ponto C' rodado).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por fim, a partir das projeções dos pontos **A''**, **B''** e **C''**, desenharam-se as projeções do triângulo [**A''B''C''**] (o triângulo [**ABC**], após a segunda rotação do plano α em torno do eixo **e'**) – a projeção horizontal do triângulo mantém-se reduzida a um segmento de reta sobre **h''_α**, pois o plano α , após a rotação, continua a ser um plano projetante horizontal. O triângulo projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção, pois o plano α , após a segunda rotação, está paralelo ao Plano Frontal de Projeção – a verdadeira grandeza do triângulo [**ABC**] está no triângulo [**A''₂B''₂C''₂**].

Traçado:

Os traços do plano α , apesar de integrarem os dados, representaram-se a **leve** pois, no contexto do exercício, são meramente auxiliares. As projeções do triângulo [**ABC**] representaram-se a **médio**, pois integram os dados. O eixo **X** representou-se igualmente a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. A projeção frontal do triângulo [**A''B''C''**], que é onde se está a verdadeira grandeza do triângulo (o objetivo do exercício), representou-se a **forte**, pois é o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas **f**, **f'** e **f''**, dos eixos de rotação e das projeções dos arcos das rotações).

54.

Dados:

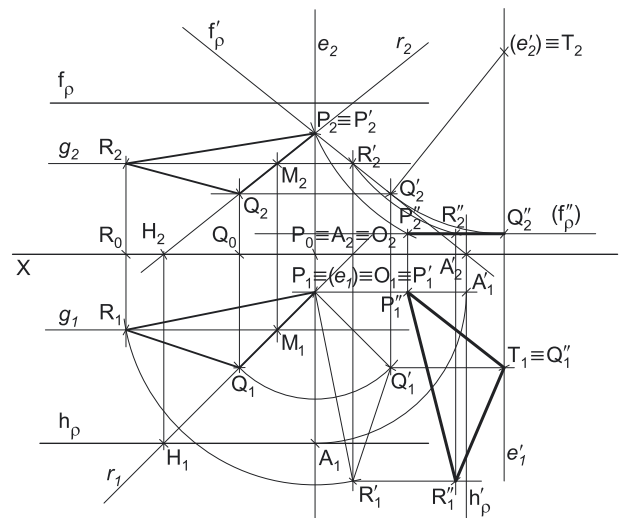
Em primeiro lugar, representou-se o plano ρ , pelos seus traços, em função dos dados. Os dados permitiram-nos, ainda determinar as projeções frontais dos pontos **P**, **Q** e **R**, em função das respetivas cotas e da relação de abscissas existentes entre os três pontos.

Determinação das projeções do triângulo:

Em seguida, determinaram-se as projeções do triângulo [**PQR**] – os pontos **P**, **Q** e **R**, para pertencerem ao plano ρ , têm de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (têm de pertencer, cada um deles, a uma reta que pertença ao plano).

A reta **r** é a reta oblíqua do plano a que se recorreu para se determinarem as projeções dos pontos **P** e **Q**. Em primeiro lugar, desenhou-se a projeção horizontal da reta **r** (**r₁**), passando pelas projeções horizontais dos pontos **P** e **Q** (**P₁** e **Q₁**). A reta **r**, porque pertence ao plano ρ , tem os seus traços sobre os traços homónimos do plano (**condição para que uma reta pertença a um plano**) – a reta **r** está definida por dois pontos (os pontos **F** e **H**, os seus traços). As projeções frontais dos pontos **P** e **Q** (**P₂** e **Q₂**) estão sobre a projeção frontal da reta **r** (**r₂**).

A reta **g** é a reta fronto-horizontal do plano a que se recorreu para se determinar a projeção frontal do ponto **R** – a projeção horizontal da reta **g** (**g₁**) passa pela projeção horizontal do ponto **R** (**R₁**). A reta **g** está definida por um ponto (o ponto **M**, o seu ponto de concorrência com a reta **r**) e por uma direção (é fronto-horizontal). A projeção frontal do ponto **R** (**R₂**) está sobre a projeção frontal da reta **g** (**g₂**).



A partir das projeções dos três pontos, desenharam-se as projeções do triângulo [**PQR**].

Resolução:

O plano que contém o triângulo [**PQR**] (o plano ρ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o triângulo [**PQR**] não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção – ambas as projeções do triângulo estão deformadas. Para se determinar a verdadeira grandeza do triângulo, há que transformar o plano ρ num plano que seja paralelo a um dos planos de projeção.

De acordo com o que o enunciado pede expressamente, há que transformar o plano ρ num plano horizontal (de nível). Um plano horizontal (de nível) é um caso particular dos planos projetantes frontais (é um plano projetante frontal que é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que, antes de mais, há que transformar o plano ρ num plano projetante frontal.

Transformação do plano ρ num plano projetante frontal:

Um plano projetante frontal é um plano de topo, cujo traço horizontal é perpendicular ao eixo **X**. Nesse sentido, a rotação a efetuar tem, como objetivo, rodar o plano ρ até o seu traço horizontal (**h_p**) ficar de topo (perpendicular ao eixo **X**). A rotação de **h_p** processa-se necessariamente no Plano Horizontal de Projeção (que é o plano horizontal que contém a reta **h_p**), pelo que se conclui que os arcos da rotação estão contidos em planos horizontais (de nível) e que a rotação se processa em torno de um eixo vertical (ortogonal aos planos que contêm os arcos da rotação).

Nesse sentido, desenharam-se as projeções de um eixo qualquer, vertical – a reta **e**. Note que se optou por localizar o eixo **e** de forma a conter um dos vértices do triângulo – o vértice **P**, neste caso. Essa opção tem a ver com economia de traçados – o ponto **P** é um ponto do eixo de rotação, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). Isto evitará a rotação de um ponto – bastará rodar dois pontos (os pontos **Q** e **R**). Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto que nos permite rodar **h_p** (e o plano) – o ponto **A**. O ponto **A** é o ponto de **h_p** (o traço horizontal do plano ρ) tal que [**OA**] é simultaneamente perpendicular ao eixo de rotação (reta **e**) e a **h_p**, sendo que **O** é o centro da rotação do ponto **A**. O ponto **O** é o ponto de interseção do eixo da rotação (reta **e**) com o plano horizontal que contém o arco da rotação do ponto **A** (que é o próprio Plano Horizontal de Projeção, pois o ponto **A** tem cota nula). Para transformar **h_p** numa reta de topo (que é perpendicular ao eixo **X**), o segmento [**OA**] tem de rodar até ficar fronto-horizontal (paralelo ao eixo **X**) – o ponto **A**, após a rotação, tem de ficar com o mesmo afastamento do ponto **O**. O arco da rotação do ponto **A** está contido no Plano Horizontal de Projeção, pelo que está em verdadeira grandeza. Assim, com o compasso, fazendo centro em **O₁** (a projeção horizontal do ponto **O**) e com raio até **A₁** (a projeção horizontal do ponto **A**), desenhou-se o arco da rotação de **A** até à linha horizontal que passa por **O₁**, na qual se situa **A'₁** – **A'₂** fica no eixo **X**, pois o ponto manteve a sua cota ao longo da sua rotação. O ponto **A'** é o ponto **A** rodado.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por A'_2 conduziu-se h'_p , perpendicular ao eixo $X - h'_p$ é o traço horizontal do plano ρ , após a sua rotação. Falta-nos rodar os restantes pontos, para definir o plano ρ após a sua rotação. O ponto P é um ponto do eixo de rotação (reta e), pelo que roda sobre si próprio. Assim, as projeções do ponto P' (o ponto P rodado) estão coincidentes com as projeções do ponto P .

O plano ρ , após a rotação, é um plano projetante frontal, pelo que as projeções frontais de todos os seus pontos (e retas) estão sobre o seu traço frontal. Assim, é possível, de forma imediata, desenhar o novo traço frontal do plano ρ (o traço frontal do plano após a rotação) – f'_p (o novo traço frontal do plano ρ) é concorrente com h'_p no eixo X e passa por P'_2 (está definido por dois pontos). O plano ρ , após a rotação, já é um plano de topo.

Falta-nos rodar os pontos Q e R , para ser possível desenhar as projeções do triângulo $[PQR]$, após a rotação. O plano ρ , após a rotação, foi transformado num plano projetante frontal, pelo que as projeções frontais dos pontos Q e R (após a rotação) situam-se necessariamente sobre f'_p . Uma vez que os arcos da rotação daqueles pontos estão contidos em planos horizontais (de nível), os pontos mantêm as suas cotas ao longo da sua rotação – nesse sentido, transportaram-se as projeções frontais dos pontos Q e R para f'_p (através das paralelas ao eixo X que passam por Q_2 e R_2), obtendo-se Q'_2 e R'_2 sobre f'_p (Q' e R' são os pontos Q e R rodados, respetivamente).

Analisemos a rotação do ponto Q – este tem de rodar em torno do seu centro de rotação, de forma que Q'_1 se situe na linha de chamada que passa por Q'_2 . Não se identificou o centro do arco de rotação do ponto Q nem o plano horizontal (de nível) que contém o arco da sua rotação. O arco da rotação do ponto Q projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (pois está contido num plano horizontal) e a projeção horizontal do seu centro (que não se identificou) está coincidente com $O_1 \equiv (e_1)$. Com o compasso, fazendo centro em e_1 e raio até Q_1 , desenhou-se a projeção horizontal do arco da rotação de Q até à linha de chamada de Q' , sobre a qual se situa Q'_1 (Q' é o ponto Q rodado). O processo exposto para a rotação do ponto Q repetiu-se para o ponto R , o que nos permitiu determinar a projeção horizontal do ponto R' (o ponto R rodado) – R'_1 situa-se na linha de chamada que passa por R'_2 .

Por fim, desenharam-se as projeções do triângulo $[P'Q'R']$ (o triângulo $[PQR]$, após a rotação do plano ρ em torno do eixo e) – a projeção frontal do triângulo reduz-se a um segmento de reta sobre f'_p , pois o plano ρ , após a rotação, é um plano projetante frontal.

Transformação do plano ρ num plano horizontal (de nível):

Para transformar o plano ρ num plano horizontal (de nível) é necessário rodar o plano ρ até que ele fique paralelo ao Plano Horizontal de Projeção – as alterações processam-se ao nível das cotas dos pontos, mantendo-se os seus afastamentos. Assim, os arcos de rotação estão contidos em planos frontais (porque os afastamentos se mantêm), pelo que o eixo da rotação tem de ser uma reta de topo (ortogonal aos planos que contêm os arcos da rotação).

Nesse sentido, desenharam-se as projeções de um eixo qualquer, de topo (reta e'), de forma a ser ponto Q' o ponto que nos permite rodar o plano. Para tal, o segmento de reta $[TQ']$ é simultaneamente ortogonal ao plano ρ e ao eixo de rotação (reta e'), sendo o ponto T o centro da rotação do ponto Q' . Para transformar o plano ρ num plano horizontal (de nível), o seu traço frontal (f'_p), após a rotação, tem de ficar paralelo ao eixo X . Assim, porque o segmento de reta $[TQ']$ é perpendicular a f'_p (o traço frontal do plano ρ), o segmento $[TQ']$ tem de rodar até ficar vertical (ortogonal ao eixo X). O arco da rotação do ponto Q' está contido num plano frontal (de frente), pelo que se projeta em verdadeira grandeza em projeção frontal. Assim, com o compasso, fazendo centro em T_2 (a projeção frontal do ponto T) e com raio até Q'_2 (a projeção frontal do ponto Q'), desenhou-se o arco da rotação de Q' até à vertical que passa por T_2 , na qual se situa $Q''_2 - Q''_1$ fica imediatamente coincidente com T_1 , pois o ponto manteve o seu afastamento ao longo da sua rotação. O ponto Q'' é o ponto Q' rodado.

Por Q''_2 conduziu-se f''_p , paralelo ao eixo $X - f''_p$ é o traço frontal do plano ρ , após a sua rotação. Falta-nos rodar os restantes pontos (os pontos P' e R'), para definir o plano ρ após a sua rotação e para ser possível desenhar as projeções do triângulo $[P'Q'R']$, após a rotação.

O plano ρ , após a rotação, continua a ser um plano projetante frontal, pelo que as projeções frontais dos pontos P' e R' (após a rotação) situam-se necessariamente sobre f''_p . Analisemos a rotação do ponto P' – este tem de rodar em torno do seu centro de rotação, de forma que P''_2 se situe sobre f''_p . Não se identificou o centro do arco de rotação do ponto P' nem o plano frontal (de frente) que contém o arco da sua rotação. O arco da rotação do ponto P' projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (pois está contido num plano frontal) e a projeção frontal do seu centro (que não se identificou) está coincidente com $T_2 \equiv (e'_2)$. Com o compasso, fazendo centro em e'_2 e raio até P'_2 , desenhou-se a projeção frontal do arco da rotação de P' até f''_p , sobre a qual se situa P''_2 (P'' é o ponto P' rodado). Uma vez que o arco da rotação do ponto P' está contido num plano frontal (de frente), o ponto P' mantém o seu afastamento, o que nos permitiu transportar o afastamento de P' para a linha de chamada que passa por P''_2 , determinando P''_1 (a projeção horizontal do ponto P''). O processo exposto para a rotação do ponto P' repetiu-se para o ponto R' , o que nos permitiu determinar as projeções do ponto R'' (o ponto R' rodado).

Por fim, a partir das projeções dos pontos P'' , Q'' e R'' , desenharam-se as projeções do triângulo $[P''Q''R'']$ (o triângulo $[PQR]$, após a segunda rotação do plano ρ em torno do eixo e') – a projeção frontal do triângulo mantém-se reduzida a um segmento de reta sobre f''_p , pois o plano ρ , após a rotação, continua a ser um plano projetante frontal. O triângulo projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção, pois o plano ρ , após a segunda rotação, está paralelo ao Plano Horizontal de Projeção – a verdadeira grandeza do triângulo $[PQR]$ está no triângulo $[P''_2Q''_2R''_2]$.

Traçado:

Os traços do plano ρ , apesar de integrarem os dados, representaram-se a **leve** pois, no contexto do exercício, são meramente auxiliares. As projeções do triângulo $[PQR]$ representaram-se a **médio**, pois integram os dados. O eixo X representou-se igualmente a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. A projeção horizontal do triângulo $[P''Q''R'']$, que é onde está a verdadeira grandeza do triângulo (o objetivo do exercício), representou-se a **forte**, pois é o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas r e g , dos eixos de rotação e das projeções dos arcos das rotações).

55.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano α , pelos seus traços, em função dos dados. Em seguida, determinaram-se as projeções do triângulo [ABC], em função dos dados.

Determinação das projeções do triângulo:

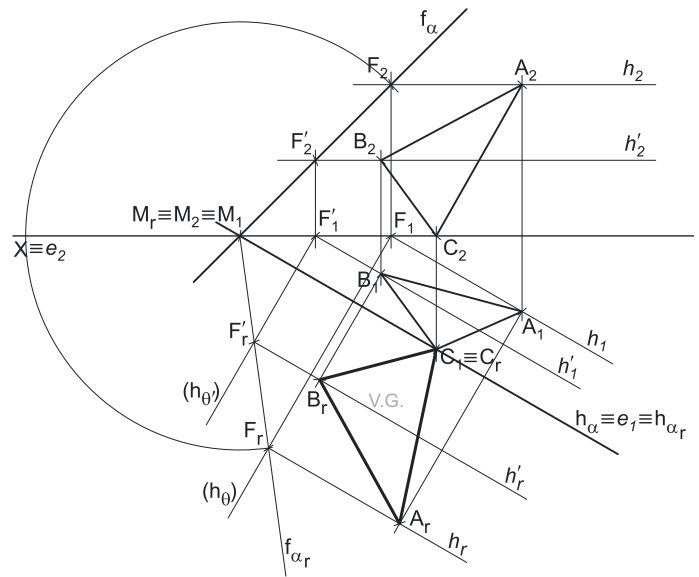
Os pontos A, B e C, para pertencerem ao plano α , têm de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (têm de pertencer, cada um deles, a uma reta que pertença ao plano).

O ponto C tem cota nula, pelo que é um ponto de h_α (o traço horizontal do plano α) – o ponto C é o ponto de h_α que tem 3 cm de afastamento (h_α é uma reta horizontal do plano, com cota nula).

A reta h é a reta horizontal (de nível) do plano, com 4 cm de cota, a que se recorreu para se determinarem as projeções do ponto A – a reta h está definida por um ponto (o ponto F, o seu traço frontal) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano α). O ponto A é o ponto da reta h que tem 2 cm de afastamento.

A reta h' é a reta horizontal (de nível) do plano, com 2 cm de cota, a que se recorreu para se determinarem as projeções do ponto B – a reta h' está definida por um ponto (o ponto F', o seu traço frontal) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano α). O ponto B é o ponto da reta h' que tem 1 cm de afastamento.

A partir das projeções dos três pontos, desenharam-se as projeções do triângulo [ABC].



Resolução:

O plano que contém o triângulo [ABC] (o plano α) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o triângulo [ABC] não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção – ambas as projeções do triângulo estão deformadas. Para se determinar a verdadeira grandeza do triângulo, há que recorrer ao rebatimento do plano α . Optemos por rebater o plano α para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços, como o enunciado pede expressamente). Começemos por identificar a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano α (h_α), que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente, $h_\alpha \equiv e_1 \equiv h_{\alpha_r}$ (e_2 , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo X). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos verticais (ortogonais a h_α).

O ponto C é um ponto de h_α (que é a charneira), pelo que se tem imediatamente $C_r \equiv C_1$. Nesse sentido, o rebatimento do plano α para o Plano Horizontal de Projeção, em oposição ao seu rebatimento para o Plano Frontal de Projeção, permite-nos economizar o rebatimento de um ponto (o ponto C).

Rebatimento do traço frontal do plano α :

Em seguida, é necessário rebater o traço frontal do plano α (f_α), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto de concorrência dos dois traços do plano (o ponto M) é um ponto de f_α e é um ponto da charneira (que é h_α), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente $M_1 \equiv M_2 \equiv M_r$. Já temos um ponto para definir f_{α_r} (o traço frontal do plano α rebatido), que é M_r . Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Optou-se por se rebater o ponto F, o traço frontal da reta h (por uma questão de rigor, por ser o ponto mais distante do ponto de concorrência dos dois traços do plano). Para rebater o ponto F conduziu-se, pelo ponto F, um plano ortogonal à charneira (o plano θ), que se identificou, apenas, pelo seu traço horizontal (que, por essa razão, se representou entre parêntesis). O plano θ é o plano que contém o arco do rebatimento do ponto F e é um plano projetante horizontal, pelo que F_r tem de se situar necessariamente sobre h_θ . A distância \overline{MF} está contida em f_α e, por isso mesmo, está em verdadeira grandeza em $\overline{M_2F_2}$, tal como estará em verdadeira grandeza em rebatimento. Assim, com o compasso, fazendo centro em M_r e com raio $\overline{M_2F_2}$, desenhou-se um arco (que é um arco de transporte) até h_θ , obtendo-se F_r (o ponto F rebatido). Tenha em conta que $\overline{M_rF_r} = \overline{M_2F_2}$. Isto permitiu-nos desenhar f_{α_r} (o traço frontal do plano α rebatido), que passa por F_r e M_r (está definido por dois pontos).

Rebatimento do ponto A:

Para rebater o ponto A é necessário rebater uma reta do plano à qual o ponto A pertença – a reta h, neste caso. Assim, para definirmos a reta h em rebatimento (a reta h_r), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto – o ponto F_r . Falta-nos outro ponto ou uma direção. Tendo em conta que a reta h é uma reta horizontal (de nível) do plano α e que retas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si e ao traço horizontal do plano (o que se verifica no espaço, em projeções e em rebatimento), já temos a direção que nos faltava para definir h_r . A reta h_r (a reta h em rebatimento) passa por F_r e é paralela a h_{α_r} – h_r está definida por um ponto (F_r) e por uma direção (é paralela a h_{α_r}).

O ponto A é um ponto da reta h pelo que, em rebatimento, o ponto continua a ser um ponto da reta. Assim, o ponto A_r está sobre h_r , na perpendicular a h_{α_r} que passa por A_1 (a projeção horizontal do ponto A) – essa perpendicular corresponde ao traço horizontal do plano ortogonal a h_α que contém o arco do rebatimento do ponto A.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Rebatimento do ponto B:

Para rebater o ponto **B** é necessário rebater uma reta do plano à qual o ponto **B** pertença – a reta h' , neste caso. Assim, para definirmos a reta h' em rebatimento (a reta h'_r), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Tendo em conta que a reta h' é uma reta horizontal (de nível) do plano α e que retas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si e ao traço horizontal do plano (o que se verifica no espaço, em projeções e em rebatimento), já temos uma direção para definir h_r – a direção de h_{α_r} e de h_r (a direção das retas horizontais do plano α). Falta-nos um ponto. Esse ponto deverá ser o traço frontal da reta h' – o ponto F' .

Para rebater o ponto **F'** conduziu-se, pelo ponto F'_r , um plano ortogonal à charneira (o plano θ'), que se identificou, apenas, pelo seu traço horizontal (que, por essa razão, se representou entre parêntesis). O plano θ' é o plano que contém o arco do rebatimento do ponto F' e é um plano projetante horizontal, pelo que F'_r tem de se situar necessariamente sobre $h_{\theta'}$. Por outro lado, o ponto F' é um ponto de f_{α} (o traço frontal do plano α), pelo que o ponto F'_r se situa necessariamente sobre f_{α_r} . Assim, F'_r é o ponto de concorrência de $h_{\theta'}$ com f_{α_r} . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta h'_r . A reta h'_r (a reta h em rebatimento) passa por F'_r e é paralela a h_{α_r} e a h_r – h'_r está definida por um ponto (F'_r) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano, em rebatimento).

O ponto **B** é um ponto da reta h' pelo que, em rebatimento, o ponto continua a ser um ponto da reta. Assim, o ponto B_r está sobre h'_r , na perpendicular a h_{α_r} que passa por B_1 (a projeção horizontal do ponto **B**) – essa perpendicular corresponde ao traço horizontal do plano ortogonal a h_{α} que contém o arco do rebatimento do ponto **B**.

A partir dos três pontos rebatidos (**A_r**, **B_r** e **C_r**), desenhou-se o triângulo **[A_rB_rC_r]**, que é o triângulo **[ABC]** em verdadeira grandeza.

Traçado:

Os traços do plano α , apesar de integrarem os dados, representaram-se a **leve** pois, no contexto do exercício, são meramente auxiliares. As projeções do triângulo **[ABC]** representaram-se a **médio**, pois integram os dados. O eixo **X** representou-se igualmente a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O triângulo **[A_rB_rC_r]** (o triângulo **[ABC]** rebatido), que é onde está a verdadeira grandeza do triângulo (o objetivo do exercício), representou-se a **forte**, pois é o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas h e h' , dos traçados relativos ao rebatimento do ponto **F**, das retas h_r e h'_r e, ainda dos planos ortogonais à charneira que nos permitiram rebater os pontos).

56.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano γ , pelos seus traços, em função dos dados. O plano γ tem os seus traços coincidentes, pois é ortogonal ao $\beta_{2/4}$ (planos ortogonais a $\beta_{2/4}$ têm os seus traços coincidentes). Em seguida, determinaram-se as projeções do triângulo **[PQR]**, em função dos dados.

Determinação das projeções do triângulo:

Os pontos **P**, **Q** e **R**, para pertencerem ao plano γ , têm de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (têm de pertencer, cada um deles, a uma reta que pertença ao plano).

O ponto **Q** tem afastamento nulo, pelo que é um ponto de f_γ (o traço frontal do plano γ) – o ponto **Q** é o ponto de f_γ que tem 3 cm de cota (f_γ é uma reta frontal do plano, com afastamento nulo).

A reta f é a reta frontal (de frente) do plano, com 3 cm de afastamento, a que se recorreu para se determinarem as projeções do ponto **P** – a reta f está definida por um ponto (o ponto **H**, o seu traço horizontal) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano γ). O ponto **P** é o ponto da reta f que tem 4 cm de cota.

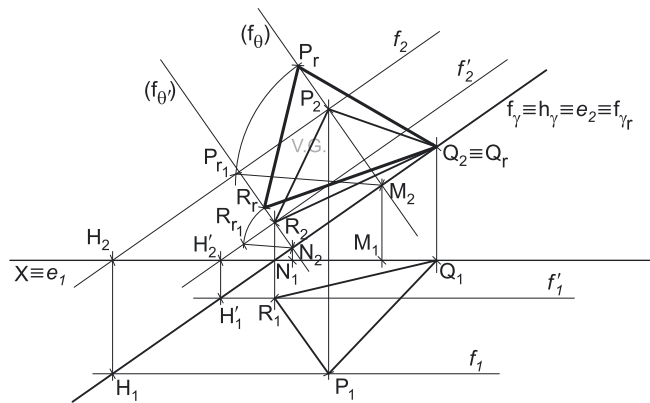
A reta f' é a reta frontal (de frente) do plano, com 1 cm de afastamento, a que se recorreu para se determinarem as projeções do ponto **R** – a reta f' está definida por um ponto (o ponto **H'**, o seu traço horizontal) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano γ). O ponto **R** é o ponto da reta f' que tem 1 cm de cota.

A partir das projeções dos três pontos, desenharam-se as projeções do triângulo **[PQR]**.

Resolução:

O plano que contém o triângulo **[PQR]** (o plano γ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o triângulo **[PQR]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção – ambas as projeções do triângulo estão deformadas. Para se determinar a verdadeira grandeza do triângulo, há que recorrer ao rebatimento do plano γ . Optemos por rebater o plano γ para o Plano Frontal de Projeção (pelo triângulo do rebatimento, como o enunciado pede expressamente). Começemos por identificar a charneira do rebatimento, que é o traço frontal do plano γ (f_γ), que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente, $f_\gamma \equiv e_2 \equiv f_{\gamma_r}$ (e_2 , a projeção horizontal da charneira, situa-se no eixo **X**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de topo (ortogonais a f_γ).

O ponto **Q** é um ponto de f_γ (que é a charneira), pelo que se tem imediatamente $Q_r \equiv Q_2$. Nesse sentido, o rebatimento do plano γ para o Plano Frontal de Projeção, em oposição ao seu rebatimento para o Plano Horizontal de Projeção, permite-nos economizar o rebatimento de um ponto (o ponto **Q**).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O ponto **T** é um ponto de h_p (que é a charneira), pelo que se tem imediatamente $T_r \equiv T_1$. Nesse sentido, o rebatimento do plano ρ para o Plano Horizontal de Projeção, em oposição ao seu rebatimento para o Plano Frontal de Projeção, permite-nos economizar o rebatimento de um ponto (o ponto **T**).

Rebatimento do ponto S:

Para rebater o ponto **S** conduziu-se, por **S**, um plano ortogonal à charneira (o plano π). O plano π é o plano que contém o arco do rebatimento do ponto **S** e é um plano projetante horizontal (é duplamente projetante), pelo que S_r tem de se situar necessariamente sobre h_{π} . Em seguida, determinou-se o centro do arco do rebatimento do ponto **S**, que é o ponto **N** (o ponto de interseção do plano π com a charneira – h_p).

O raio do arco do rebatimento do ponto **S** é \overline{NS} , que é comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto **S** – o triângulo do rebatimento do ponto **S** é o triângulo retângulo $[NSS_1]$. O raio do arco do rebatimento (a distância \overline{NS}) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar – o rebatimento do plano π neste caso. Para tal rebateu-se o plano π para o Plano Horizontal de Projeção e construiu-se o triângulo $[NSS_2]$ em verdadeira grandeza.

Nesse sentido, por S_1 (a projeção horizontal do ponto **S**) conduziu-se uma paralela à charneira, sobre a qual se marcou a cota do ponto **S** (que é um dos catetos do triângulo $[NSS_1]$), o que nos permitiu determinar o ponto S_{r1} . O ponto S_{r1} é o ponto **S**, rebatido pelo rebatimento do plano π . Em seguida, desenhou-se o segmento de reta $[NS_{r1}]$, que é a hipotenusa do triângulo do rebatimento em verdadeira grandeza. Por fim, com o compasso, fazendo centro no ponto **N** e raio $\overline{NS_{r1}}$, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **S** (o arco $\overline{S_{r1}S_r}$) até h_{π} , onde se situa S_r (o ponto **S** rebatido).

Rebatimento do ponto R:

Para rebater o ponto **R** conduziu-se, por **R**, um plano ortogonal à charneira (o plano π'). O plano π' é o plano que contém o arco do rebatimento do ponto **R** e é um plano projetante horizontal (é duplamente projetante), pelo que R_r tem de se situar necessariamente sobre $h_{\pi'}$. Em seguida, determinou-se o centro do arco do rebatimento do ponto **R**, que é o ponto **M** (o ponto de interseção do plano π' com a charneira – h_p).

O raio do arco do rebatimento do ponto **R** é \overline{MR} , que é o comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto **R** – o triângulo do rebatimento do ponto **R** é o triângulo retângulo $[MRR_1]$. O raio do arco do rebatimento (a distância \overline{MR}) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar – o rebatimento do plano π' neste caso. Para tal rebateu-se o plano π' para o Plano Horizontal de Projeção e construiu-se o triângulo $[MRR_1]$ em verdadeira grandeza.

Nesse sentido, por R_1 (a projeção horizontal do ponto **R**) conduziu-se uma paralela à charneira, sobre a qual se marcou a cota do ponto **R** (que é um dos catetos do triângulo $[MRR_1]$), o que nos permitiu determinar o ponto R_{r1} . O ponto R_{r1} é o ponto **R**, rebatido pelo rebatimento do plano π' . Em seguida, desenhou-se o segmento de reta $[MR_{r1}]$, que é a hipotenusa do triângulo do rebatimento em verdadeira grandeza. Por fim, com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e raio $\overline{MR_{r1}}$, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **R** (o arco $\overline{R_{r1}R_r}$) até $h_{\pi'}$, onde se situa R_r (o ponto **R** rebatido).

A partir dos três pontos rebatidos (R_r , S_r e T_r), desenhou-se o triângulo $[RST]$ em rebatimento (o triângulo $[R_rS_rT_r]$), que é o triângulo $[RST]$ em verdadeira grandeza.

Traçado:

Os traços do plano ρ representaram-se a **leve** pois, no contexto do exercício, são meramente auxiliares. As projeções do triângulo $[RST]$ representaram-se a **médio**, pois integram os dados. O eixo **X** representou-se igualmente a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O triângulo $[R_rS_rT_r]$ (o triângulo $[RST]$ rebatido), que é onde se está a verdadeira grandeza do triângulo (o objetivo do exercício), representou-se a **forte**, pois é o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta r , dos planos ortogonais à charneira que nos permitiram rebater os pontos bem como, ainda, os respetivos triângulos do rebatimento).

58.

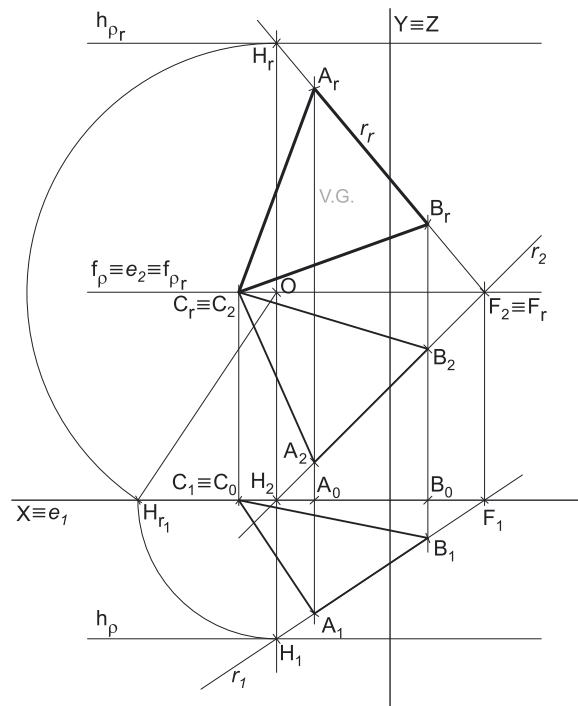
Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Em seguida, determinaram-se os traços do plano ρ . Para tal recorreu-se à reta r , definida pelos pontos **A** e B , e determinaram-se os seus traços nos planos de projeção (**H**, o seu traço horizontal, e **F**, o seu traço frontal). O traço frontal do plano ρ (f_p) passa pelo ponto **F** e é paralelo ao eixo **X** – está definido por um ponto (o ponto **F**) e por uma direção (é fronto-horizontal). O traço horizontal do plano ρ (h_p) passa pelo ponto **H** e é paralelo ao eixo **X** – está definido por um ponto (o ponto **H**) e por uma direção (é fronto-horizontal). Por fim, determinaram-se as projeções do ponto **C**, em função dos dados – o ponto **C**, porque tem afastamento nulo, é um ponto de f_p (o traço frontal do plano).

A partir das projeções dos três pontos, desenharam-se as projeções do triângulo $[ABC]$.

Resolução:

O plano que contém o triângulo $[ABC]$ (o plano ρ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o triângulo $[ABC]$ não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção – ambas as projeções do triângulo estão deformadas. Para se determinar a verdadeira grandeza do triângulo, há que recorrer ao rebatimento do plano ρ . Optemos por rebater o plano ρ para o Plano Frontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços, como o enunciado pede expressamente). Comecemos por identificar a charneira do rebatimento, que é o traço frontal do plano ρ (f_p), que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente, $f_p \equiv e_2 \equiv f_{pr}$ (e_1 , a projeção horizontal da charneira, situa-se no eixo **X**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O ponto **C** é um ponto de f_p (que é a charneira), pelo que se tem imediatamente $C_r \equiv C_2$. Nesse sentido, o rebatimento do plano p para o Plano Frontal de Projeção, em oposição ao seu rebatimento para o Plano Horizontal de Projeção, permite-nos economizar o rebatimento de um ponto (o ponto **C**).

Rebatimento do traço horizontal do plano p :

Em seguida, é necessário rebater o traço horizontal do plano p (h_p), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos a direção – h_p é uma reta fronto-horizontal pelo que, em rebatimento, continua a ser paralela ao eixo **X**. Falta-nos um ponto para definir h_p em rebatimento. Esse ponto tem de ser um ponto qualquer de h_p – o ponto **H** (o traço horizontal da reta r), por exemplo. O ponto **H** tem de ser rebatido pelo triângulo do rebatimento.

Para rebater o ponto **H** conduziu-se, por **H**, um plano ortogonal à charneira (um plano de perfil, que não se identificou) – o plano que contém o arco do rebatimento do ponto **H**. Em seguida, determinou-se o centro do arco do rebatimento do ponto **H**, que é o ponto **O** (o ponto de interseção do plano de perfil com a charneira – h_p).

O raio do arco do rebatimento do ponto **H** é \overline{OH} , que é o comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto **H** – o triângulo do rebatimento do ponto **H** é o triângulo retângulo $[OHH_2]$. O raio do arco do rebatimento (a distância \overline{OH}) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar – o rebatimento do plano de perfil neste caso. Para tal rebateu-se o plano de perfil para o Plano Frontal de Projeção e construiu-se o triângulo $[OHH_2]$ em verdadeira grandeza.

Nesse sentido, por H_2 (a projeção frontal do ponto **H**) conduziu-se uma paralela à charneira (que é o próprio eixo **X**), sobre a qual se marcou o afastamento do ponto **H** (que é um dos catetos do triângulo $[OHH_2]$), o que nos permitiu determinar o ponto H_{r_1} . O ponto H_{r_1} é o ponto **H**, rebatido pelo rebatimento do plano de perfil. Em seguida, desenhou-se o segmento de reta $[OH_{r_1}]$, que é a hipotenusa do triângulo do rebatimento em verdadeira grandeza. Por fim, com o compasso, fazendo centro no ponto **O** e raio $\overline{OH_{r_1}}$, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **H** (o arco $\overline{H_{r_1}H_r}$) até à perpendicular à charneira (que corresponde ao plano de perfil), onde se situa H_r (o ponto **H** rebatido).

Já temos o ponto que nos faltava para definir h_{p_r} (o traço horizontal do plano p em rebatimento). Assim, por H_r conduziu-se uma paralela ao eixo **X**, que é $h_{p_r} - h_{p_r}$, está definido por um ponto (H_r) e por uma direção (é fronto-horizontal).

Rebatimento dos pontos **A** e **B**:

Para rebater o ponto **A** é necessário rebater uma reta do plano à qual o ponto **A** pertença – a reta r , neste caso. Assim, para definirmos a reta r em rebatimento (a reta r_r), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto – o ponto H_r . Falta-nos outro ponto ou uma direção. O traço frontal da reta r (o ponto **F**) é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente $F_r \equiv F_2$. Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta r_r – a reta r_r (a reta r rebatida) está definida por dois pontos, pois passa por F_r (o seu traço frontal rebatido) e por H_r (o seu traço horizontal rebatido).

O ponto **A** é um ponto da reta r pelo que, em rebatimento, o ponto continua a ser um ponto da reta. Assim, o ponto A_r está sobre r_r , na perpendicular a f_{p_r} que passa por A_2 (a projeção frontal do ponto **A**) – essa perpendicular corresponde ao plano ortogonal a f_p que contém o arco do rebatimento do ponto **A**.

O ponto **B** é um ponto da reta r pelo que, em rebatimento, o ponto continua a ser um ponto da reta. Assim, o ponto B_r está sobre r_r , na perpendicular a f_{p_r} que passa por B_2 (a projeção frontal do ponto **B**) – essa perpendicular corresponde ao plano ortogonal a f_p que contém o arco do rebatimento do ponto **B**.

A partir dos três pontos rebatidos (A_r , B_r e C_r), desenhou-se o triângulo $[ABC]$ em rebatimento (o triângulo $[A_rB_rC_r]$), que é o triângulo $[ABC]$ em verdadeira grandeza.

Traçado:

Os traços do plano p representaram-se a **leve** pois, no contexto do exercício, são meramente auxiliares. As projeções do triângulo $[ABC]$ representaram-se a **médio**, pois integram os dados. O eixo **X** representou-se igualmente a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O triângulo $[A_rB_rC_r]$ (o triângulo $[ABC]$ rebatido), que é onde se está a verdadeira grandeza do triângulo (o objetivo do exercício), representou-se a **forte**, pois é o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta r , dos traçados relativos ao rebatimento do ponto **H** e, ainda dos planos ortogonais à charneira que nos permitiram rebater os pontos).

59.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **A**, pelas suas projeções, em função dos dados – o plano ρ está representado pelo eixo **X** (onde se situam os seus traços) e pelas projeções do ponto **A**. Os dados permitiram-nos, ainda, representar as projeções horizontais dos pontos **B** e **C**.

Determinação das projeções do triângulo:

Os pontos **B** e **C**, para pertencerem ao plano ρ , têm de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (têm de pertencer, cada um deles, a uma reta que pertença ao plano).

A reta **r** é a reta do plano ρ a que se recorreu para se determinar a projeção frontal do ponto **B** – a reta **r** é uma reta passante e está definida por dois pontos (o ponto **A** e o seu ponto de concorrência com o eixo **X**). A reta **r** é, também, a reta suporte do lado **[AB]** do triângulo. A projeção frontal do ponto **B** (**B₂**) situa-se na projeção frontal da reta **r** (**r₂**), na linha de chamada de **B₁**.

A reta **s** é a reta do plano ρ a que se recorreu para se determinar a projeção frontal do ponto **C** – a reta **s** é outra reta passante e está definida por dois pontos (o ponto **B** e o seu ponto de concorrência com o eixo **X**). A reta **s** é, também, a reta suporte do lado **[BC]** do triângulo. A projeção frontal do ponto **C** (**C₂**) situa-se na projeção frontal da reta **s** (**s₂**), na linha de chamada de **C₁**.

A partir das projeções dos três pontos, desenharam-se as projeções do triângulo **[ABC]**.

Resolução:

O plano que contém o triângulo **[ABC]** (o plano ρ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o triângulo **[ABC]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção – ambas as projeções do triângulo estão deformadas. Para se determinar a verdadeira grandeza do triângulo, há que recorrer ao rebatimento do plano ρ . Optemos por rebater o plano ρ para o Plano Horizontal de Projeção (pelo triângulo do rebatimento, como o enunciado pede expressamente).

Começamos por identificar a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano ρ (**h_ρ**), que se situa no eixo **X**, pelo que se tem imediatamente **X ≡ f_ρ ≡ h_ρ ≡ e₁ ≡ e₂**. Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil.

Rebatimento do ponto A:

Para rebater o ponto **A** conduziu-se, por **A**, um plano ortogonal à charneira (o plano π). O plano π é o plano que contém o arco do rebatimento do ponto **A** e é um plano projetante horizontal (é duplamente projetante), pelo que **A_r** tem de se situar necessariamente sobre **h_ρ**. Em seguida, determinou-se o centro do arco do rebatimento do ponto **A**, que é o ponto **A₀** (o ponto de interseção do plano π com a charneira – **h_ρ**).

O raio do arco do rebatimento do ponto **A** é **A₀A**, que é o comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto **A** – o triângulo do rebatimento do ponto **A** é o triângulo retângulo **[A₀AA₁]**. O raio do arco do rebatimento (a distância **A₀A**) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar – o rebatimento do plano π neste caso. Para tal rebateu-se o plano π para o Plano Horizontal de Projeção e construiu-se o triângulo **[A₀AA₁]** em verdadeira grandeza.

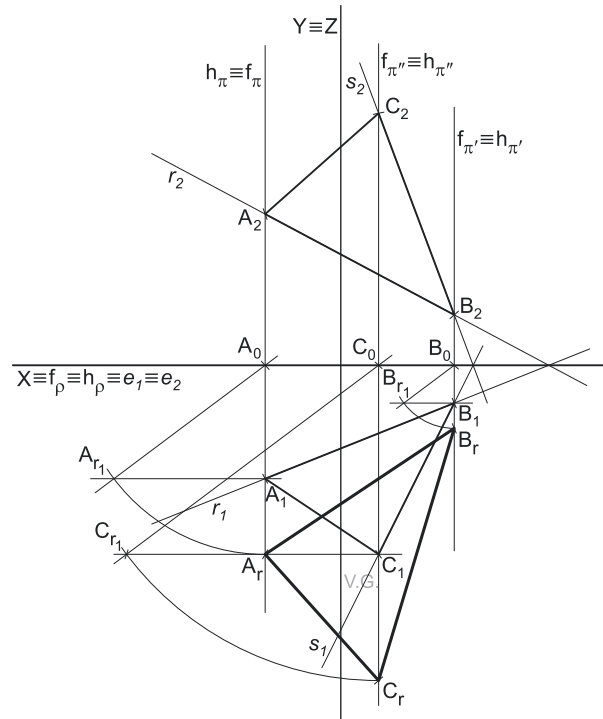
Nesse sentido, por **A₁** (a projeção horizontal do ponto **A**) conduziu-se uma paralela à charneira, sobre a qual se marcou a cota do ponto **A** (que é um dos catetos do triângulo **[A₀AA₁]**), o que nos permitiu determinar o ponto **A_{r1}**. O ponto **A_{r1}** é o ponto **A**, rebatido pelo rebatimento do plano π . Em seguida, desenhou-se o segmento de reta **[A₀A_{r1}]**, que é a hipotenusa do triângulo do rebatimento em verdadeira grandeza. Por fim, com o compasso, fazendo centro no ponto **A₀** e raio **A₀A_{r1}**, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **A** (o arco **A_{r1}A_r**) até **h_ρ**, onde se situa **A_r** (o ponto **A** rebatido).

Rebatimento do ponto B:

Para rebater o ponto **B** conduziu-se, por **B**, um plano ortogonal à charneira (o plano π'). O plano π' é o plano que contém o arco do rebatimento do ponto **B** e é um plano projetante horizontal (é duplamente projetante), pelo que **B_r** tem de se situar necessariamente sobre **h_ρ**. Em seguida, determinou-se o centro do arco do rebatimento do ponto **B**, que é o ponto **B₀** (o ponto de interseção do plano π' com a charneira – **h_ρ**).

O raio do arco do rebatimento do ponto **B** é **B₀B**, que é o comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto **B** – o triângulo do rebatimento do ponto **B** é o triângulo retângulo **[B₀BB₁]**. O raio do arco do rebatimento (a distância **B₀B**) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar – o rebatimento do plano π' , neste caso. Para tal rebateu-se o plano π' para o Plano Horizontal de Projeção e construiu-se o triângulo **[B₀BB₁]** em verdadeira grandeza.

Nesse sentido, por **B₁** (a projeção horizontal do ponto **B**) conduziu-se uma paralela à charneira, sobre a qual se marcou a cota do ponto **B** (que é um dos catetos do triângulo **[B₀BB₁]**), o que nos permitiu determinar o ponto **B_{r1}**. O ponto **B_{r1}** é o ponto **B**, rebatido pelo rebatimento do plano π' . Em seguida, desenhou-se o segmento de reta **[B₀B_{r1}]**, que é a hipotenusa do triângulo do rebatimento em verdadeira grandeza. Por fim, com o compasso, fazendo centro no ponto **B₀** e raio **B₀B_{r1}**, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **B** (o arco **B_{r1}B_r**) até **h_ρ**, onde se situa **B_r** (o ponto **B** rebatido).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Rebatimento do ponto C:

O rebatimento do ponto **C** processou-se de forma idêntica à atrás exposta para os pontos **A** e **B**. O plano π'' é o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **C**. O centro do arco do rebatimento do ponto **C** é o ponto C_0 (o ponto de interseção do plano π'' com a charneira do rebatimento – o eixo **X**). O raio do arco do rebatimento do ponto **C** é $\overline{C_0C}$, que é o comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto **C** – o triângulo do rebatimento do ponto **C** é o triângulo retângulo $[C_0CC_1]$. Para se construir o triângulo do rebatimento do ponto **C** em verdadeira grandeza (pelo rebatimento do plano π'') conduziu-se, por C_1 (a projeção horizontal do ponto **C**) uma paralela à charneira, sobre a qual se marcou a cota do ponto **C** (que é um dos catetos do triângulo $[C_0CC_1]$), o que nos permitiu determinar o ponto C_r , (que é o ponto **C** rebatido pelo rebatimento do plano π''). Em seguida, desenhou-se o segmento de reta $[C_0C_r]$ (que é a hipotenusa do triângulo do rebatimento em verdadeira grandeza) e, com o compasso, fazendo centro no ponto C_0 e raio $\overline{C_0C_r}$, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **C** (o arco $\overline{C_1C_r}$) até $h_{\pi''}$, onde se situa C_r (o ponto **C** rebatido).

A partir dos três pontos rebatidos (A_r , B_r e C_r), desenhou-se o triângulo $[ABC]$ em rebatimento (o triângulo $[A_rB_rC_r]$), que é o triângulo $[ABC]$ em verdadeira grandeza.

Traçado:

O eixo **X** (onde se situam os traços do plano ρ) representou-se igualmente a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. As projeções do triângulo $[ABC]$ representaram-se a **médio**, pois integram os dados. O triângulo $[A_rB_rC_r]$ (o triângulo $[ABC]$ rebatido), que é onde se está a verdadeira grandeza do triângulo (o objetivo do exercício), representou-se a **forte**, pois é o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas r e s , dos planos ortogonais à charneira que nos permitiram rebater os pontos bem como, ainda, os respetivos triângulos do rebatimento e arcos do rebatimento).

60.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **A**, pelas suas projeções, em função dos dados – o plano ρ está representado pelo eixo **X** (onde se situam os seus traços) e pelas projeções do ponto **A**. Os dados permitiram-nos, ainda, representar as projeções horizontais dos pontos **B** e **C**. Note que, na presente situação, a determinação das projeções frontais dos pontos **B** e **C** se processou de forma ligeiramente diferente da apresentada no exercício anterior.

Determinação das projeções do triângulo:

Os pontos **B** e **C**, para pertencerem ao plano ρ , têm de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (têm de pertencer, cada um deles, a uma reta que pertença ao plano).

A reta r é a reta do plano ρ a que se recorreu para se determinar a projeção frontal do ponto **C** – a reta r é uma reta passante e está definida por dois pontos (o ponto **A** e o seu ponto de concorrência com o eixo **X**). A reta r é, também, a reta suporte do lado $[AC]$ do triângulo. A projeção frontal do ponto **C** (C_2) situa-se na projeção frontal da reta r (r_2), na linha de chamada de C_1 .

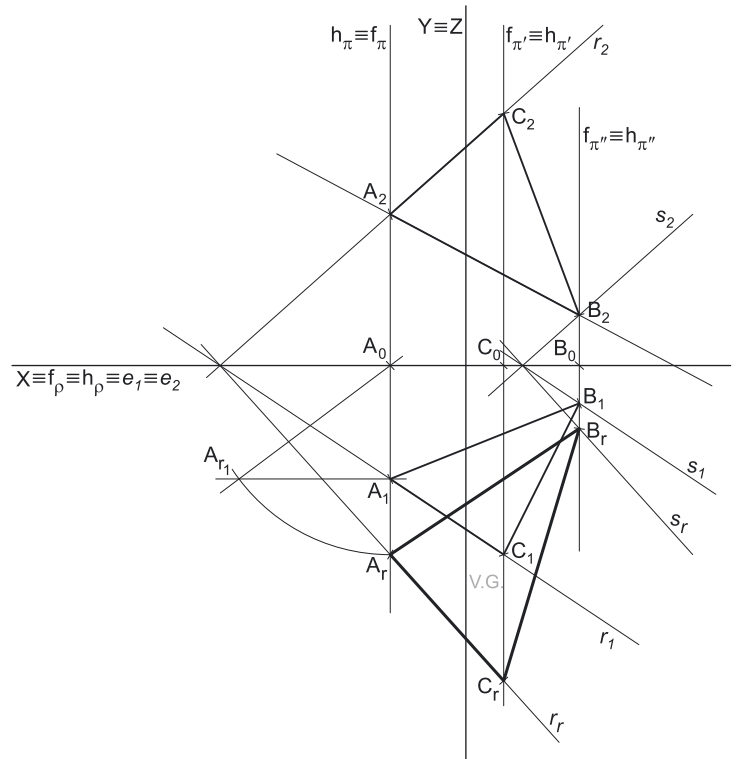
A reta s é a reta do plano ρ a que se recorreu para se determinar a projeção frontal do ponto **B** – a reta s é outra reta passante e está definida por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo **X**) e uma direção (a direção da reta r – a reta s é paralela à reta r). A projeção frontal do ponto **B** (B_2) situa-se na projeção frontal da reta s (s_2), na linha de chamada de B_1 .

A partir das projeções dos três pontos, desenharam-se as projeções do triângulo $[ABC]$.

Resolução:

O plano que contém o triângulo $[ABC]$ (o plano ρ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o triângulo $[ABC]$ não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção – ambas as projeções do triângulo estão deformadas. Para se determinar a verdadeira grandeza do triângulo, há que recorrer ao rebatimento do plano ρ . Optemos por rebater o plano ρ para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento das suas retas, como o enunciado pede expressamente). Começemos por identificar a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano ρ (h_ρ), que se situa no eixo **X**, pelo que se tem imediatamente $X \equiv f_\rho \equiv h_\rho \equiv e_1 \equiv e_2$ (não há necessidade de se identificarem os traços do plano em rebatimento, pois situam-se ambos no eixo **X**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil.

O recurso ao rebatimento de retas do plano (para rebater os pontos do plano que pertencem a essas retas) requer, tal como no rebatimento do plano de rampa, o rebatimento de um ponto do plano pelo triângulo do rebatimento. Optou-se por rebater o ponto **A**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Rebatimento do ponto A:

O rebatimento do ponto **A** processou-se de forma idêntica à exposta no relatório do exercício anterior. O plano π é o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **A**. O centro do arco do rebatimento do ponto **A** é o ponto A_0 (o ponto de interseção do plano π com a charneira do rebatimento – o eixo **X**). O raio do arco do rebatimento do ponto **A** é $\overline{A_0A}$, que é o comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto **A** – o triângulo do rebatimento do ponto **A** é o triângulo retângulo $[A_0AA_1]$. Para se construir o triângulo do rebatimento do ponto **A** em verdadeira grandeza (pelo rebatimento do plano π) conduziu-se, por A_1 (a projeção horizontal do ponto **A**) uma paralela à charneira, sobre a qual se marcou a cota do ponto **A** (que é um dos catetos do triângulo $[A_0AA_1]$), o que nos permitiu determinar o ponto A_{r_1} (que é o ponto **A** rebatido pelo rebatimento do plano π). Em seguida, desenhou-se o segmento de reta $[A_0A_{r_1}]$ (que é a hipotenusa do triângulo do rebatimento em verdadeira grandeza) e, com o compasso, fazendo centro no ponto A_0 e raio $\overline{A_0A_{r_1}}$, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **A** (o arco $\overline{A_{r_1}A_r}$) até h_π , onde se situa A_r (o ponto **A** rebatido).

Rebatimento do ponto C:

Para rebater o ponto **C** é necessário rebater uma reta do plano à qual o ponto **C** pertença – a reta **r**, neste caso (a reta **r** é a reta suporte do lado $[AC]$ do triângulo). Assim, para definirmos a reta **r** em rebatimento (a reta r_r), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto – o seu ponto de concorrência com o eixo **X** (que é um ponto da charneira, pelo que é fixo – roda sobre si próprio). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Por outro lado, já temos também o ponto A_r , pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir a reta r_r – a reta r_r passa por A_r e pelo ponto de concorrência com o eixo **X** (está definida por dois pontos).

O ponto **C** é um ponto da reta **r** pelo que, em rebatimento, o ponto continua a ser um ponto da reta. Por outro lado, o arco do rebatimento do ponto **C** está contido num plano ortogonal à charneira – um plano de perfil (o plano π'). Assim, o ponto C_r está sobre r_r , no ponto de interseção do plano π' (o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **C**) com a reta r_r .

Rebatimento do ponto B:

Para rebater o ponto **B** é necessário rebater uma reta do plano à qual o ponto **B** pertença – a reta **s**, neste caso. Assim, para definirmos a reta **s** em rebatimento (a reta s_r), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto – o seu ponto de concorrência com o eixo **X** (que é um ponto da charneira, pelo que é fixo – roda sobre si próprio). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Por outro lado, a reta **s** é paralela à reta **r**, o que se verifica tanto no espaço, como em projeções como em rebatimento. Assim, já temos a direção que nos faltava para definir a reta s_r – a direção da reta r_r . A reta s_r passa pelo ponto de concorrência com o eixo **X** e é paralela a r_r (está definida por um ponto e uma direção).

O ponto **B** é um ponto da reta **s** pelo que, em rebatimento, o ponto continua a ser um ponto da reta. Por outro lado, o arco do rebatimento do ponto **B** está contido num plano ortogonal à charneira – um plano de perfil (o plano π''). Assim, o ponto B_r está sobre s_r , no ponto de interseção do plano π'' (o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **B**) com a reta s_r .

A partir dos três pontos rebatidos (A_r , B_r e C_r), desenhou-se o triângulo $[A_rB_rC_r]$ em rebatimento (o triângulo $[A_rB_rC_r]$), que é o triângulo $[ABC]$ em verdadeira grandeza.

Traçado:

O eixo **X** (onde se situam os traços do plano ρ) representou-se igualmente a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. As projeções do triângulo $[ABC]$ representaram-se a **médio**, pois integram os dados. O triângulo $[A_rB_rC_r]$ (o triângulo $[ABC]$ rebatido), que é onde está a verdadeira grandeza do triângulo (o objetivo do exercício), representou-se a **forte**, pois é o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas **r** e **s**, dos planos ortogonais à charneira que nos permitiram rebater os pontos bem como, ainda, os traçados relativos ao rebatimento do ponto **A** as retas r_r e s_r).

61.

Dados:

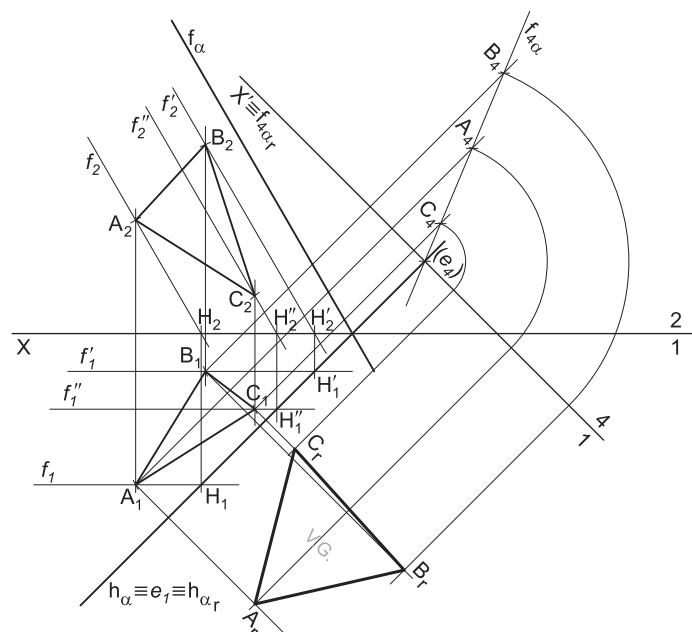
Em primeiro lugar, representou-se o plano α , pelos seus traços, em função dos dados. Em seguida, determinaram-se as projeções do triângulo $[ABC]$, em função dos dados.

Determinação das projeções do triângulo:

Os pontos **A**, **B** e **C**, para pertencerem ao plano α , têm de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (têm de pertencer, cada um deles, a uma reta que pertença ao plano).

A reta **f** é a reta frontal (de frente) do plano, com 4 cm de afastamento, a que se recorreu para se determinarem as projeções do ponto **A** – a reta **f** está definida por um ponto (o ponto **H**, o seu traço horizontal) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano α). O ponto **A** é o ponto da reta **f** que tem 3 cm de cota.

A reta **f'** é a reta frontal (de frente) do plano, com 1 cm de afastamento, a que se recorreu para se determinarem as projeções do ponto **B** – a reta **f'** está definida por um ponto (o ponto **H'**, o seu traço horizontal) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano α). O ponto **B** é o ponto da reta **f'** que tem 5 cm de cota.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A reta f'' é a reta frontal (de frente) do plano, com 2 cm de afastamento, a que se recorreu para se determinarem as projeções do ponto C – a reta f'' está definida por um ponto (o ponto H'' , o seu traço horizontal) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano α). O ponto C é o ponto da reta f'' que tem 1 cm de cota.

A partir das projeções dos três pontos, desenharam-se as projeções do triângulo [PQR].

Resolução:

O plano que contém o triângulo [ABC] (o plano α) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o triângulo [ABC] não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção – ambas as projeções do triângulo estão deformadas. De acordo com o que o enunciado pede expressamente, há que transformar o plano α num plano de topo (com o recurso a uma mudança do diedro de projeção) e, depois rebatê-lo como um plano projetante frontal.

a) Para transformar o plano α num plano de topo (um plano projetante frontal) é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção por um outro plano (o **plano 4**), ortogonal ao plano α . Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se mantém o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo X (o eixo X') é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com $1/4$. Como o **plano 4** é ortogonal ao plano α , o eixo X' é perpendicular ao traço horizontal do plano (h_α). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo X' (o novo eixo X). B_4 é a projeção do ponto B no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de B_4 ao eixo X' é igual à distância de B_2 ao eixo X (que é 5 cm – a cota de B). Em seguida, desenhou-se o traço do plano α no **plano 4** – $f_{4\alpha}$. Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano α é um plano projetante frontal, o traço do plano α no **plano 4** ($f_{4\alpha}$) está definido por dois pontos – o seu ponto de concorrência com h_α (que se situa no eixo X') e B_4 (a nova projeção frontal do ponto B). Em seguida, determinaram-se as projeções dos pontos A e C no **plano 4** (A_4 e C_4), que se situam necessariamente sobre $f_{4\alpha}$ (pois, no novo diedro de projeção, o plano α é um plano projetante frontal). Note que A_4 e C_4 se poderiam ter determinado em função das respetivas cotas, que se situariam igualmente sobre $f_{4\alpha}$. A projeção do triângulo [ABC] no **plano 4** reduz-se a um segmento de reta sobre $f_{4\alpha}$, pois o plano α , no novo diedro de projeção, é um plano projetante frontal (um plano de topo).

b) Optou-se por rebater o plano α para o Plano Horizontal de Projeção. Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano α (h_α), que roda sobre si próprio – tem-se imediatamente $h_\alpha \equiv e_f \equiv h_{\alpha_r}$. Tendo em conta que a charneira é uma reta de topo, a sua projeção no **plano 4** (e_4) é um ponto no eixo X' . O novo traço frontal do plano ($f_{4\alpha_r}$) roda até ao eixo X' , pelo que se tem $f_{4\alpha_r} \equiv X'$.

A charneira do rebatimento (o eixo de rotação) é uma reta de topo, pelo que os planos ortogonais à charneira que contém os arcos do rebatimento são planos frontais (no novo diedro de projeção – planos paralelos ao **plano 4**) – os pontos mantêm os seus afastamentos (no novo diedro de projeção) ao longo do rebatimento. Por fim, os arcos do rebatimento, porque estão contidos em planos frontais (paralelos ao **plano 4**), projetam-se em verdadeira grandeza no **plano 4**. Em seguida, efetuou-se o rebatimento de cada um dos pontos.

Para rebater o ponto B , conduziu-se uma paralela ao eixo X' por B_1 (que corresponde ao traço horizontal do plano que contém o arco do seu rebatimento) – B_r tem necessariamente o afastamento de B (no novo diedro de projeção). Em seguida, fez-se centro em e_4 (onde se situam as projeções, no **plano 4**, dos centros dos arcos do rebatimento) e, com raio até B_4 , desenhou-se a projeção, no **plano 4**, do arco do rebatimento do ponto B , rodando (rebatendo) B_4 até ao eixo X' (onde se situa $f_{4\alpha_r}$). A partir do extremo do arco (que se situa no eixo X') conduziu-se uma linha de chamada do eixo X' até à paralela ao eixo X' que passa por B_1 – o ponto de interseção das duas linhas é B_r .

Para rebater o ponto A , conduziu-se uma paralela ao eixo X' por A_1 (que corresponde ao traço horizontal do plano que contém o arco do seu rebatimento) – A_r tem necessariamente o afastamento de A (no novo diedro de projeção). Em seguida, fez-se centro em e_4 (onde se situam as projeções, no **plano 4**, dos centros dos arcos do rebatimento) e, com raio até A_4 , desenhou-se a projeção, no **plano 4**, do arco do rebatimento do ponto A , rodando (rebatendo) A_4 até ao eixo X' (onde se situa $f_{4\alpha_r}$). A partir do extremo do arco (que se situa no eixo X') conduziu-se uma linha de chamada do eixo X' até à paralela ao eixo X' que passa por A_1 – o ponto de interseção das duas linhas é A_r .

Para rebater o ponto C , conduziu-se uma paralela ao eixo X' por C_1 (que corresponde ao traço horizontal do plano que contém o arco do seu rebatimento) – C_r tem necessariamente o afastamento de C (no novo diedro de projeção). Em seguida, fez-se centro em e_4 (onde se situam as projeções, no **plano 4**, dos centros dos arcos do rebatimento) e, com raio até C_4 , desenhou-se a projeção, no **plano 4**, do arco do rebatimento do ponto C , rodando (rebatendo) C_4 até ao eixo X' (onde se situa $f_{4\alpha_r}$). A partir do extremo do arco (que se situa no eixo X') conduziu-se uma linha de chamada do eixo X' até à paralela ao eixo X' que passa por C_1 – o ponto de interseção das duas linhas é C_r .

Por fim, desenhou-se o triângulo definido pelos pontos A_r , B_r e C_r – o triângulo $[A_r B_r C_r]$ é o triângulo [ABC] rebatido no Plano Horizontal de Projeção, pelo que está em verdadeira grandeza, o que se identificou no desenho.

Traçado:

Os traços do plano α , apesar de integrarem os dados, representaram-se a **leve** pois, no contexto do exercício, são meramente auxiliares. As projeções do triângulo [ABC] representaram-se a **médio**, pois integram os dados. O eixo X representou-se igualmente a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O triângulo $[A_r B_r C_r]$ (o triângulo [ABC] rebatido), que é onde se está a verdadeira grandeza do triângulo (o objetivo do exercício), representou-se a **forte**, pois é o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas f , f' e f'' , do eixo X' , dos traçados referentes à mudança do diedro de projeção, bem como todos os traçados referentes ao rebatimento dos três pontos).

62.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano δ , pelos seus traços, em função dos dados. Em seguida, determinaram-se as projeções do triângulo $[ABC]$, em função dos dados.

Determinação das projeções do triângulo:

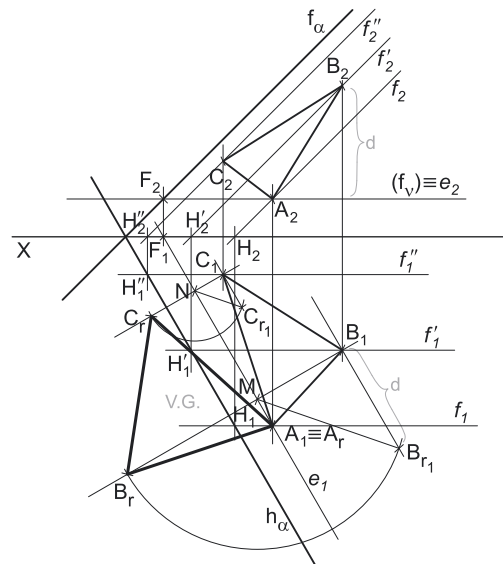
Os pontos A , B e C , para pertencerem ao plano δ , têm de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (têm de pertencer, cada um deles, a uma reta que pertença ao plano).

A reta f é a reta frontal (de frente) do plano, com 5 cm de afastamento, a que se recorreu para se determinarem as projeções do ponto A – a reta f está definida por um ponto (o ponto H , o seu traço horizontal) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano δ). O ponto A é o ponto da reta f que tem 1 cm de cota.

A reta f' é a reta frontal (de frente) do plano, com 3 cm de afastamento, a que se recorreu para se determinarem as projeções do ponto B – a reta f' está definida por um ponto (o ponto H' , o seu traço horizontal) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano δ). O ponto B é o ponto da reta f' que tem 4 cm de cota.

A reta f'' é a reta frontal (de frente) do plano, com 1 cm de afastamento, a que se recorreu para se determinarem as projeções do ponto C – a reta f'' está definida por um ponto (o ponto H'' , o seu traço horizontal) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano δ). O ponto C é o ponto da reta f'' que tem 2 cm de cota.

A partir das projeções dos três pontos, desenharam-se as projeções do triângulo $[PQR]$.



a) Resolução:

O plano que contém o triângulo $[ABC]$ (o plano δ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o triângulo $[ABC]$ não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção – ambas as projeções do triângulo estão deformadas. Para se determinar a verdadeira grandeza do triângulo, há que recorrer ao rebatimento do plano δ . Efetuemos o rebatimento do plano δ para o plano horizontal (de nível) que contém o vértice A do triângulo (como o enunciado pede expressamente). Nesse sentido, em primeiro lugar, representou-se o plano v (o plano horizontal que contém o ponto A) pelo seu traço frontal. O plano v não tem traço horizontal, pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis. Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (reta e), que é a reta de interseção do plano δ com o plano v . A reta e é uma reta horizontal (de nível) do plano δ , que está definida por um ponto (o ponto F , o seu traço frontal) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano δ). Note que a reta e tem necessariamente de conter o ponto A (porque o ponto A pertence aos dois planos).

Efetuando o rebatimento do plano δ para um plano horizontal (de nível), que é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, após o rebatimento tudo o que estiver no plano v (em rebatimento) projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção.

O ponto A é um ponto da reta e (que é a charneira), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente $A_r \equiv A_1$. Em seguida, efetuou-se o rebatimento dos outros dois pontos (os pontos B e C), pelo triângulo do rebatimento.

Rebatimento do ponto B:

Para rebater o ponto B conduziu-se, por B , uma perpendicular à charneira (que corresponde à representação do plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto B , e que não se identificou). Em seguida, determinou-se o centro do arco do rebatimento do ponto B , que é o ponto M (o ponto de interseção da perpendicular à charneira com a charneira – a reta e). O raio do arco do rebatimento do ponto B é MB , que é o comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto B . Em seguida, construiu-se o triângulo do rebatimento do ponto B em verdadeira grandeza. Para tal conduziu-se, por B_1 (a projeção horizontal do ponto B) uma paralela à charneira, sobre a qual se marcou a distância do ponto B ao plano v – a distância d (que é a cota do ponto B em relação ao plano v). Isso permitiu-nos determinar o ponto B_{r1} (que é o ponto B rebatido pelo rebatimento do plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento). Em seguida, desenhou-se o segmento de reta $[MB_{r1}]$ (que é a hipotenusa do triângulo do rebatimento em verdadeira grandeza) e, com o compasso, fazendo centro no ponto M e raio MB_{r1} , desenhou-se o arco do rebatimento do ponto B (o arco $B_r B_{r1}$) até à perpendicular à charneira, onde se situa B_r (o ponto B rebatido).

Rebatimento do ponto C:

Para rebater o ponto C conduziu-se, por C , uma perpendicular à charneira (que corresponde à representação do plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto C , e que não se identificou). Em seguida, determinou-se o centro do arco do rebatimento do ponto C , que é o ponto N (o ponto de interseção da perpendicular à charneira com a charneira – a reta e). O raio do arco do rebatimento do ponto C é NC , que é o comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto C . Em seguida, construiu-se o triângulo do rebatimento do ponto C em verdadeira grandeza. Para tal conduziu-se, por C_1 (a projeção horizontal do ponto C) uma paralela à charneira, sobre a qual se marcou a distância do ponto C ao plano v (a cota do ponto C em relação ao plano v). Isso permitiu-nos determinar o ponto C_{r1} (que é o ponto C rebatido pelo rebatimento do plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento). Em seguida, desenhou-se o segmento de reta $[NC_{r1}]$ (que é a hipotenusa do triângulo do rebatimento em verdadeira grandeza) e, com o compasso, fazendo centro no ponto N e raio NC_{r1} , desenhou-se o arco do rebatimento do ponto C (o arco $C_r C_{r1}$) até à perpendicular à charneira, onde se situa C_r (o ponto C rebatido).

A partir dos três pontos rebatidos (A_r , B_r e C_r), desenhou-se o triângulo $[ABC]$ em rebatimento (o triângulo $[A_r B_r C_r]$), que é o triângulo $[ABC]$ em verdadeira grandeza.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

b) Vantagens do rebatimento do plano δ para o plano ν , em relação ao rebatimento do plano δ para qualquer dos planos de projeção: o rebatimento do plano δ para o plano ν (que contém o ponto **A**) permitiu-nos economizar o rebatimento de um ponto – o ponto **A**. De facto, uma vez que o ponto **A** se situa na charneira do rebatimento (por pertencer aos dois planos – o plano a rebater e o plano para o qual se processa o rebatimento), o ponto **A** roda sobre si próprio pelo que o seu rebatimento é imediato, sem quaisquer outros traçados auxiliares acrescidos – foi necessário, apenas, efetuar o rebatimento dos outros dois vértices do triângulo (os vértices **B** e **C**). Caso se efetuasse o rebatimento do plano δ para qualquer dos planos de projeção, seria necessário rebater os três vértices do triângulo, com todos os traçados de que tal procedimento exige.

Traçado:

Os traços do plano δ , apesar de integrarem os dados, representaram-se a **leve** pois, no contexto do exercício, são meramente auxiliares. As projeções do triângulo **[ABC]** representaram-se a **médio**, pois integram os dados. O eixo **X** representou-se igualmente a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O plano ν (o plano para o qual se efetuou o rebatimento) é igualmente auxiliar, pelo que se representou igualmente a **leve**. O triângulo **[A_rB_rC_r]** (o triângulo **[ABC]** rebatido), que é onde se está a verdadeira grandeza do triângulo (o objetivo do exercício), representou-se a **forte**, pois é o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas **f**, **f'** e **f''**, bem como todos os traçados referentes ao rebatimento dos pontos **B** e **C**).

63.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Em seguida, determinaram-se os traços do plano ρ . Para tal recorreu-se à reta **r**, definida pelos pontos **A** e **B**, e determinaram-se os seus traços nos planos de projeção (**H**, o seu traço horizontal, e **F**, o seu traço frontal). O traço frontal do plano ρ (**f_p**) passa pelo ponto **F** e é paralelo ao eixo **X** – está definido por um ponto (o ponto **F**) e por uma direção (é fronto-horizontal). O traço horizontal do plano ρ (**h_p**) passa pelo ponto **H** e é paralelo ao eixo **X** – está definido por um ponto (o ponto **H**) e por uma direção (é fronto-horizontal). Em seguida, desenharam-se as projeções da reta **g**, a reta fronto-horizontal que é a reta suporte do lado **[BC]** do triângulo e determinaram-se as projeções do ponto **C**, pertencente à reta **g**, em função da sua abscissa.

A partir das projeções dos três pontos, desenharam-se as projeções do triângulo **[ABC]**.

Resolução:

O plano que contém o triângulo **[ABC]** (o plano ρ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o triângulo **[ABC]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção – ambas as projeções do triângulo estão deformadas. Para se determinar a verdadeira grandeza do triângulo, há que recorrer ao rebatimento do plano ρ . Efetuemos o rebatimento do plano ρ para o plano frontal (de frente) que contém o lado **[BC]** do triângulo (como o enunciado pede expressamente). Nesse sentido, em primeiro lugar, representou-se o plano ϕ (o plano frontal que contém o lado **[BC]**) pelo seu traço horizontal. O plano ϕ não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis. Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano ρ com o plano ϕ – a reta **e** é, imediatamente, a reta **g** (a reta suporte do lado **[BC]**, pois os pontos **B** e **C** pertencem aos dois planos).

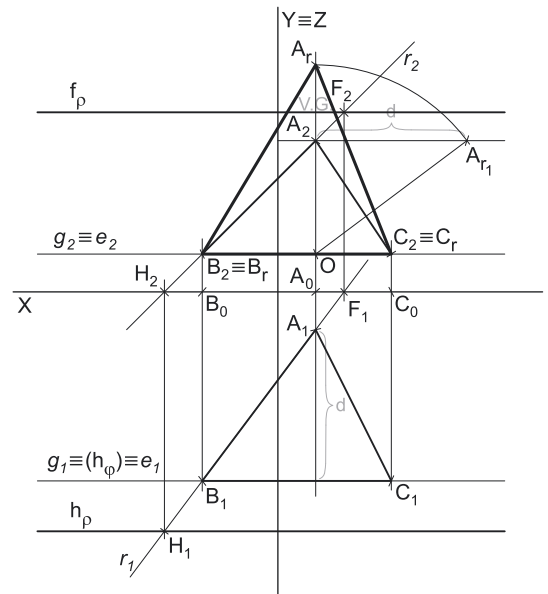
Efetuando o rebatimento do plano ρ para um plano frontal (de frente), que é paralelo ao Plano Frontal de Projeção, após o rebatimento tudo o que estiver no plano ϕ (em rebatimento) projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção.

O ponto **B** é um ponto da reta **e** (que é a charneira), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente **B_r ≡ B₂**. Da mesma forma, o ponto **C** é outro ponto da reta **e** (que é a charneira), pelo que roda igualmente sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente **C_r ≡ C₂**. Em seguida, efetuou-se o rebatimento do terceiro vértice do triângulo (o ponto **A**), pelo triângulo do rebatimento.

Rebatimento do ponto A:

Para rebater o ponto **A** conduziu-se, por **A**, uma perpendicular à charneira, que corresponde à representação do plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **A** (um plano de perfil) e que não se identificou. Em seguida, determinou-se o centro do arco do rebatimento do ponto **A**, que é o ponto **O** (o ponto de interseção da perpendicular à charneira com a charneira – a reta **e**). O raio do arco do rebatimento do ponto **A** é **OA**, que é o comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto **A**. Em seguida, construiu-se o triângulo do rebatimento do ponto **A** em verdadeira grandeza. Para tal conduziu-se, por **A₂** (a projeção frontal do ponto **A**) uma paralela à charneira, sobre a qual se marcou a distância do ponto **A** ao plano ϕ – a distância **d** (que é o afastamento do ponto **A** em relação ao plano ϕ). Isso permitiu-nos determinar o ponto **A₁** (que é o ponto **A** rebatido pelo rebatimento do plano de perfil que contém o arco do seu rebatimento). Em seguida, desenhou-se o segmento de reta **[OA_r]** (que é a hipotenusa do triângulo do rebatimento em verdadeira grandeza) e, com o compasso, fazendo centro no ponto **O** e raio **OA_r**, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **A** (o arco **A_rA₁**) até à perpendicular à charneira, onde se situa **A_r** (o ponto **A** rebatido).

A partir dos três pontos rebatidos (**A_r**, **B_r** e **C_r**), desenhou-se o triângulo **[ABC]** em rebatimento (o triângulo **[A_rB_rC_r]**), que é o triângulo **[ABC]** em verdadeira grandeza.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Vantagens do rebatimento do plano ρ para o plano φ , em relação ao rebatimento do plano ρ para qualquer dos planos de projeção: o rebatimento do plano ρ para o plano φ (que contém os pontos **B** e **C**) permitiu-nos economizar o rebatimento de dois pontos – os pontos **B** e **C**, precisamente. De facto, uma vez que aqueles dois pontos se situam na charneira do rebatimento (por pertencerem aos dois planos – o plano a rebater e o plano para o qual se processa o rebatimento), os pontos **B** e **C** rodam sobre si próprios, pelo que os respetivos rebatimentos são imediatos, sem quaisquer outros traçados auxiliares acrescentados – foi necessário, apenas, efetuar o rebatimento do terceiro vértice do triângulo (o vértice **A**). Caso se efetuasse o rebatimento do plano ρ para qualquer dos planos de projeção, seria necessário rebater os três vértices do triângulo, com todos os traçados de que tal procedimento exige.

Traçado:

Os traços do plano ρ representaram-se a **leve** pois, no contexto do exercício, são meramente auxiliares. As projeções do triângulo **[ABC]** representaram-se a **médio**, pois integram os dados. O eixo **X** representou-se igualmente a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O plano φ (o plano para o qual se efetuou o rebatimento) é igualmente auxiliar, pelo que se representou igualmente a **leve**. O triângulo **[A,B,C₁]** (o triângulo **[ABC]** rebatido), que é onde se está a verdadeira grandeza do triângulo (o objetivo do exercício), representou-se a **forte**, pois é o pedido. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas **r** e **g**, bem como todos os traçados necessários ao rebatimento do ponto **A**).

16

REPRESENTAÇÃO DE FIGURAS PLANAS III

64.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respetivas projeções, em função dos dados, e desenharam-se as projeções da reta **r** (que passa por **A** e por **B**). Em seguida, determinaram-se os traços do plano δ .

Determinação dos traços do plano δ :

A reta **r** é uma reta de maior inclinação do plano δ , sendo esse dado que nos permite determinar os traços do plano δ . Nesse sentido, determinaram-se os traços da reta **r**. O ponto **A** é, imediatamente, o traço frontal da reta **r** (pois tem afastamento nulo). O ponto **H** é o traço horizontal da reta **r**.

A reta **r**, sendo uma reta de maior inclinação do plano δ , é uma reta do plano δ que faz o ângulo máximo com o Plano Frontal de Projeção, é perpendicular ao traço frontal do plano (e a todas as retas frontais do plano) e a sua projeção frontal é perpendicular ao traço frontal do plano (a perpendicularidade é direta em projeção frontal). Assim, o traço frontal do plano δ (f_δ) é uma reta que está definida por um ponto (o ponto **A**) e por uma direção (é perpendicular à projeção frontal da reta **r**).

O traço horizontal do plano δ (h_δ) é outra reta que está definida por dois pontos – o ponto **H** (o traço horizontal da reta **r**) e o ponto de concorrência dos traços do plano (um ponto do eixo **X** – o ponto **K**).

Resolução:

O plano que contém o triângulo **[ABC]** (o plano δ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o triângulo **[ABC]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do triângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. De todos os processos geométricos auxiliares estudados, o que melhor se adequa à resolução deste tipo de problemas é o do rebatimento do plano oblíquo, pelo rebatimento dos seus traços (pela rapidez de execução e pelo rigor que possibilita).

Nesse sentido, optou-se pelo rebatimento do plano δ para o Plano Frontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Começou-se por se identificar a charneira do rebatimento, que é o traço frontal do plano δ (f_δ), que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente, $f_\delta \equiv e_2 \equiv f_{\delta_r}$ (e_1 , a projeção horizontal da charneira, situa-se no eixo **X**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de topo (ortogonais a f_δ).

O ponto **A** é um ponto de f_δ (que é a charneira), pelo que se tem imediatamente $A_r \equiv A_2$ – o rebatimento efetuado permitiu-nos economizar o rebatimento de um ponto (o ponto **A**).

Rebatimento do traço horizontal do plano δ :

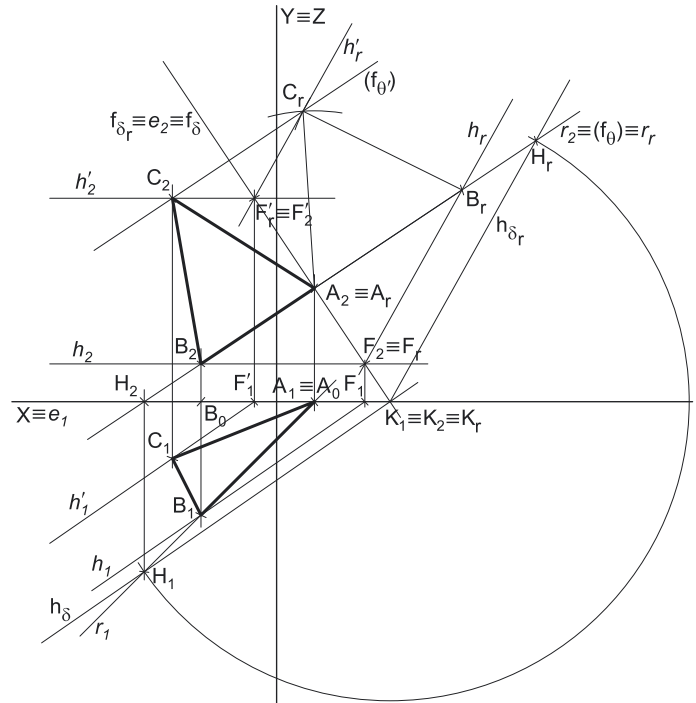
Em seguida, rebateu-se o traço horizontal do plano δ (h_δ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto de concorrência dos dois traços do plano (o ponto **K**) é um ponto de h_δ e situa-se na charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente $K_1 \equiv K_2 \equiv K_r$. Já temos um ponto para definir h_{δ_r} (o traço horizontal do plano em rebatimento), que é K_r . Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Optou-se por se rebater o ponto **H**, o traço frontal da reta **r**. Para rebater o ponto **H** conduziu-se, pelo ponto **H**, um plano ortogonal à charneira (o plano θ), que se identificou, apenas, pelo seu traço frontal (que, por essa razão, se representou entre parêntesis). Note que f_θ fica coincidente com r_2 (a projeção frontal da reta **r**), por serem ambos, perpendiculares a f_δ e passando ambos pelo mesmo ponto. O plano θ é o plano que contém o arco do rebatimento do ponto **H** e é um plano projetante frontal – F_r , tem de se situar necessariamente sobre f_θ . A distância \overline{KH} está contida em h_δ e, por isso mesmo, está em verdadeira grandeza tanto em K_1H_1 como em rebatimento. Assim, com o compasso, fazendo centro em K_r e com raio K_1H_1 , desenhou-se um arco (de transporte) até f_θ , obtendo-se H_r (o ponto **H** rebatido). Isto permitiu-nos desenhar h_{δ_r} (o traço horizontal do plano δ rebatido), que passa por H_r e K_r (está definido por dois pontos).

Rebatimento do ponto **B**:

Para rebater o ponto **B** é necessário rebater uma reta do plano à qual o ponto **B** pertença – a reta **r**, por exemplo. A reta r_r (a reta **r** rebatida) fica definida por A_r e por H_r , pelo que fica coincidente com $r_2 \equiv (f_\theta)$ – nesse sentido, a utilidade da reta **r** para o rebatimento do ponto **B** é absolutamente nula.

Assim, recorreu-se a uma outra reta do plano – a reta **h**, horizontal (de nível), passando pelo ponto **B**. A reta **h** está definida por um ponto (o ponto **F**, o seu traço frontal) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano δ). O ponto **B** é, assim, o ponto de concorrência da reta **h** com a reta **r**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Para definirmos a reta h em rebatimento (a reta h_r), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O traço frontal da reta h (o ponto F) é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio – tem-se imediatamente $F_r \equiv F_2$. Já temos um ponto para definir a reta h_r – o ponto F_r . Falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta h é uma reta horizontal (de nível) do plano δ e que retas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si e ao traço horizontal do plano (no espaço, em projeções e em rebatimento), pelo que já temos a direção que nos faltava para definir h_r . A reta h_r (a reta h rebatida) passa por F_r e é paralela a $h_{\delta_r} - h_r$, está definida por um ponto (F_r) e por uma direção (é paralela a h_{δ_r}).

O ponto B_r é o ponto de concorrência das retas r_r e h_r (e situa-se na perpendicular a f_{δ_r} que passa por B_2 , que é o traço frontal do plano ortogonal a f_{δ} que contém o arco do rebatimento do ponto B).

Determinação das projeções do ponto C e do triângulo [ABC]:

A partir dos pontos A_r e B_r , construiu-se o triângulo [ABC] em verdadeira grandeza (em rebatimento), e determinou-se o ponto C_r . Para determinar as projeções do triângulo, inverteu-se o rebatimento do plano δ , determinando-se as projeções do ponto C.

A inversão do rebatimento do ponto C processa-se com o recurso a uma reta do plano δ à qual o ponto C pertença. Nesse sentido, recorreu-se à reta h' , outra reta horizontal (de nível) do plano δ . A reta h'_r (a reta h' rebatida) está definida por um ponto (o ponto C_r) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano δ – é paralela a h_r e a h_{δ_r}).

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta h' . O ponto F' é o traço frontal da reta h' e é um ponto da charneira (que é f_{δ}), pelo que roda sobre si próprio – tem-se imediatamente $F'_r \equiv F'_2$ (F'_1 situa-se no eixo X). Já temos um ponto para definir a reta h' em projeções – o ponto F' . Já temos a direção (que é a direção das retas horizontais do plano δ), o que nos permitiu desenhar as duas projeções da reta h' .

Por fim, pelo ponto C_r conduziu-se o plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento (o plano θ'), plano esse que foi representado, apenas, pelo seu traço frontal (razão pela qual este se identificou entre parêntesis). O ponto de interseção de $f_{\theta'}$ com h'_2 (a projeção frontal da reta h') é C_2 (a projeção frontal do ponto C) – a projeção horizontal do ponto C (C_1) situa-se sobre h'_1 (a projeção horizontal da reta h').

A partir das projeções dos três pontos (A, B e C), desenharam-se as projeções do triângulo [ABC].

Traçado:

Os traços do plano δ representaram-se a **leve** pois, no contexto do exercício, são apenas auxiliares. O eixo X representa-se a **médio** (é a linha estruturante do exercício). As duas projeções do triângulo [ABC] (o objetivo do exercício) representam-se a **forte**, pois são o pedido. O triângulo [ABC], em rebatimento, representa-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso das retas r , h e h' , dos planos ortogonal à charneira e, ainda, do arco de transporte que nos permitiu rebater h_{δ}).

65.

Dados:

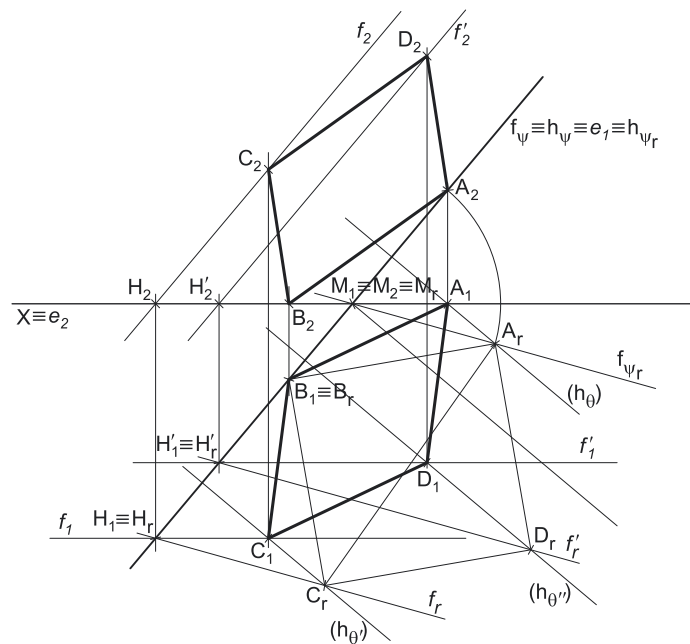
Em primeiro lugar, representou-se o plano ψ , pelos seus traços, em função dos dados. O plano ψ tem os seus traços coincidentes, pois é ortogonal ao $\beta_{2/4}$ (planos ortogonais a $\beta_{2/4}$ têm os seus traços coincidentes). Sublinha-se que os traços do plano ψ só estão coincidentes na folha de papel (após o rebatimento do Plano Frontal de Projeção sobre o Plano Horizontal de Projeção) e não no espaço. Em seguida, representaram-se os pontos A e B, pelas suas projeções e pertencentes ao plano, em função dos dados. O ponto A tem afastamento nulo, pelo que é um ponto de f_{ψ} (o traço frontal do plano ψ) – A é o ponto de f_{ψ} que tem 3 cm de cota. O ponto B tem cota nula, pelo que é um ponto de h_{ψ} (o traço horizontal do plano ψ) – B é o ponto de h_{ψ} que tem 2 cm de afastamento.

Resolução:

O plano que contém o quadrado [ABCD] (o plano ψ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o quadrado [ABCD] não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do quadrado estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. De todos os processos geométricos auxiliares estudados, o que melhor se adequa à resolução deste tipo de problemas é o do rebatimento do plano oblíquo, pelo rebatimento dos seus traços (pela rapidez de execução e pelo rigor que possibilita).

Nesse sentido, optou-se pelo rebatimento do plano ψ para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Começou-se por se identificar a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano ψ (h_{ψ}), que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente, $h_{\psi_r} \equiv e_1 \equiv h_{\psi_r}$ (e_2 , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo X). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos verticais (ortogonais a h_{ψ}).

O ponto B é um ponto de h_{ψ} (que é a charneira), pelo que se tem imediatamente $B_r \equiv B_1$ – o rebatimento efetuado permitiu-nos economizar o rebatimento de um ponto (o ponto B). Note que, caso se efetuasse o rebatimento do plano ψ para o Plano Frontal de Projeção, a situação referida para o ponto B verificar-se-ia, igualmente, para o ponto A.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Rebatimento do traço frontal do plano ψ :

Em seguida, rebateu-se o traço frontal do plano ψ (f_ψ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto de concorrência dos dois traços do plano (o ponto M) é um ponto de f_ψ e situa-se na charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente $M_1 \equiv M_2 \equiv M_r$. Já temos um ponto para definir f_{ψ_r} (o traço frontal do plano ψ em rebatimento), que é M_r . Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Optou-se por se rebater o ponto A , que é um ponto de f_ψ e, simultaneamente, é um vértice do quadrado. Para rebater o ponto A conduziu-se, pelo ponto A , um plano ortogonal à charneira (o plano θ) que se identificou, apenas, pelo seu traço horizontal (que, por essa razão, se representou entre parêntesis). O plano θ é o plano que contém o arco do rebatimento do ponto A e é um plano projetante horizontal – A_r tem de se situar necessariamente sobre h_θ . A distância MA está contida em f_ψ e, por isso mesmo, está em verdadeira grandeza tanto em M_2A_2 como em rebatimento. Assim, com o compasso, fazendo centro em M_r e com raio M_2A_2 , desenhou-se um arco (de transporte) até h_θ , obtendo-se A_r (o ponto A rebatido). Isto permitiu-nos desenhar f_{ψ_r} (o traço frontal do plano ψ rebatido), que passa por A_r e M_r (está definido por dois pontos).

Determinação das projeções dos pontos C e D e do quadrado $[ABCD]$:

A partir dos pontos A_r e B_r , construiu-se o quadrado $[ABCD]$ em verdadeira grandeza (em rebatimento), e determinaram-se os pontos C_r e D_r . Para determinar as projeções do quadrado, inverteu-se o rebatimento do plano ψ , determinando-se as projeções dos pontos C e D .

A inversão do rebatimento do ponto C processa-se com o recurso a uma reta do plano ψ à qual o ponto C pertença. Nesse sentido, recorreu-se à reta f , uma reta frontal (de frente) do plano ψ . A reta f_r (a reta f rebatida) está definida por um ponto (o ponto C_r) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano ψ – é paralela a f_ψ).

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta f . O ponto H é o traço horizontal da reta f e é um ponto da charneira (que é h_ψ), pelo que roda sobre si próprio – tem-se imediatamente $H_r \equiv H_1$ (H_2 situa-se no eixo X). Já temos um ponto para definir a reta f em projeções – o ponto H . Já temos a direção (que é a direção das retas frontais do plano ψ), o que nos permitiu desenhar as duas projeções da reta f .

Por fim, pelo ponto C_r conduziu-se o plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento (o plano θ'), plano esse que foi representado, apenas, pelo seu traço horizontal (razão pela qual este se identificou entre parêntesis). O ponto de interseção de f_r com f_1 (a projeção horizontal da reta f) é C_1 (a projeção horizontal do ponto C) – a projeção frontal do ponto C (C_2) situa-se sobre f_2 (a projeção frontal da reta f).

A inversão do rebatimento do ponto D e a determinação das suas projeções processou-se de forma idêntica à exposta para o ponto C , e também com o recurso a uma reta frontal (de frente) do plano ψ – a reta f' foi a reta frontal (de frente) do plano ψ a que se recorreu, para inverter o rebatimento do ponto D .

A partir das projeções dos quatro pontos (A , B , C e D), desenharam-se as projeções do quadrado $[ABCD]$.

Traçado:

Os traços do plano ψ , apesar de serem dados, representaram-se a **leve** pois, no contexto do exercício, são apenas auxiliares. O eixo X representa-se a **médio** (é a linha estruturante do exercício). As duas projeções do quadrado $[ABCD]$ (o objetivo do exercício) representam-se a **forte**, pois são o pedido. O quadrado $[ABCD]$, em rebatimento, representa-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso das retas f e f' , dos planos ortogonais à charneira e, ainda, do arco de transporte que nos permitiu rebater f_ψ).

66.

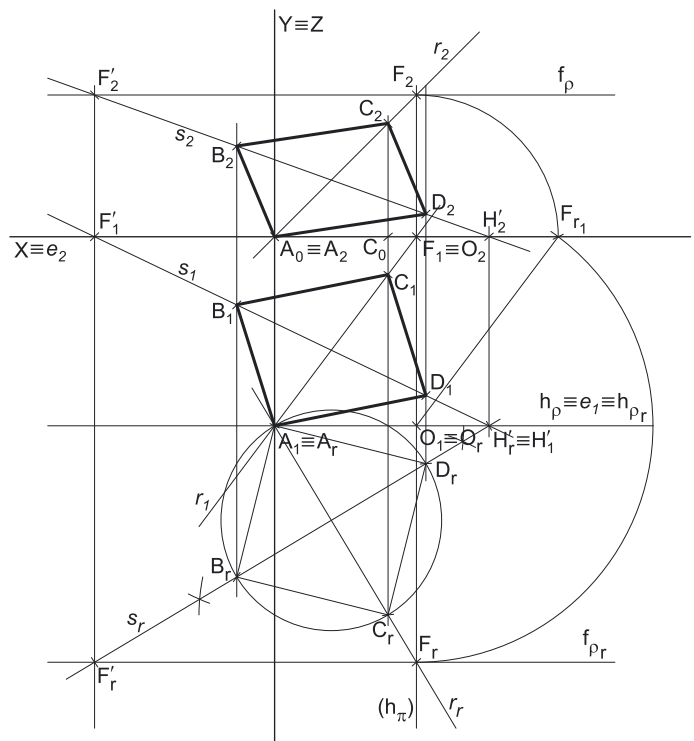
Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos A e C , pelas respetivas projeções, em função dos dados. Em seguida, determinaram-se os traços do plano ρ . Para tal recorreu-se à reta r , definida pelos pontos A e C , e determinaram-se os seus traços nos planos de projeção (H , o seu traço horizontal, e F , o seu traço frontal). O traço frontal do plano ρ (f_ρ) passa pelo ponto F e é paralelo ao eixo X – está definido por um ponto (o ponto F) e por uma direção (é fronto-horizontal). O traço horizontal do plano ρ (h_ρ) passa pelo ponto H e é paralelo ao eixo X – está definido por um ponto (o ponto H) e por uma direção (é fronto-horizontal).

Resolução:

O plano que contém o quadrado $[ABCD]$ (o plano ρ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o quadrado $[ABCD]$ não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do quadrado estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. De todos os processos geométricos auxiliares estudados, o que melhor se adequa à resolução deste tipo de problemas é o do rebatimento do plano de rampa, pelo rebatimento dos seus traços (pela rapidez de execução e pelo rigor que possibilita).

Nesse sentido, optou-se pelo rebatimento do plano ρ para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Começou-se por se identificar a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano ρ (h_ρ), que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente, $h_p \equiv e_1 \equiv h_{p_r}$ (e_2 , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo X). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O ponto **A** é um ponto de h_p (que é a charneira), pelo que se tem imediatamente $A_r \equiv A_1$ – o rebatimento efetuado permitiu-nos economizar o rebatimento de um ponto (o ponto **A**).

Rebatimento do traço frontal do plano ρ :

Em seguida, é necessário rebater o traço frontal do plano ρ (f_p), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos a direção – f_p é uma reta fronto-horizontal pelo que, em rebatimento, continua a ser paralela ao eixo **X**. Falta-nos um ponto para definir f_p em rebatimento. Esse ponto tem de ser um ponto qualquer de f_p – o ponto **F** (o traço frontal da reta r), por exemplo. O ponto **F** tem de ser rebatido pelo triângulo do rebatimento.

Por F_1 (a projeção horizontal do ponto **F**) conduziu-se uma perpendicular à charneira, que corresponde ao plano ortogonal à charneira (o plano de perfil) que contém o arco do rebatimento do ponto **F** (mas que não se identificou). O centro do arco do rebatimento do ponto **F** é o ponto **O** (o ponto de interseção da perpendicular à charneira com a charneira – h_p). O raio do arco do rebatimento do ponto **F** é \overline{OF} , que é o comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto **F**. Construiu-se o triângulo do rebatimento do ponto **F** em verdadeira grandeza (pelo rebatimento do plano de perfil) conduzindo, por F_1 (a projeção horizontal do ponto **F**) uma paralela à charneira (que é o próprio eixo **X**), para a qual se transportou a cota do ponto **F** com o compasso. Este procedimento permitiu-nos determinar o ponto F_{r_1} (que é o ponto **F** rebatido pelo rebatimento do plano de perfil). Em seguida, desenhou-se o segmento de reta $[OF_{r_1}]$ (que é a hipotenusa do triângulo do rebatimento em verdadeira grandeza) e, com o compasso, fazendo centro no ponto **O** e raio $\overline{OF_{r_1}}$, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **F** (o arco $\overline{F_r F_r}$) até à perpendicular à charneira, onde se situa F_r (o ponto **F** rebatido).

Pelo ponto F_r (o ponto **F** rebatido) conduziu-se f_{pr} (o traço frontal do plano ρ , em rebatimento), paralelo ao eixo **X** – f_{pr} está definido por um ponto (ponto F_r) e por uma direção (é fronto-horizontal).

Rebatimento do ponto **C**:

Para rebater o ponto **C** é necessário rebater uma reta do plano à qual o ponto **C** pertença – a reta r , neste caso. Assim, para definirmos a reta r em rebatimento (a reta r_r), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto – o ponto A_r . Falta-nos outro ponto ou uma direção. Também já temos o traço frontal da reta r rebatido (o ponto F_r), pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir a reta r_r . A reta r_r (a reta r em rebatimento) está definida por dois pontos – os pontos A_r e F_r .

O ponto **C** é um ponto da reta r pelo que, em rebatimento, o ponto continua a ser um ponto da reta. Assim, o ponto C_r está sobre r_r , na perpendicular à charneira (h_p) que passa por C_1 (a projeção horizontal do ponto **C**) – essa perpendicular corresponde ao plano de perfil que contém o arco do rebatimento do ponto **C**.

Determinação das projeções dos pontos **B** e **D** e do quadrado [ABCD]:

A partir dos pontos A_r e C_r , construiu-se o quadrado [ABCD] em verdadeira grandeza (em rebatimento), e determinaram-se os pontos B_r e D_r . Para determinar as projeções do quadrado, inverteu-se o rebatimento do plano ρ , determinando-se as projeções dos pontos **B** e **D**.

A inversão do rebatimento dos pontos **B** e **D** processa-se com o recurso a retas do plano ρ às quais os pontos **B** e **D** pertençam. Nesse sentido, recorreu-se à reta s , uma reta oblíqua do plano ρ , que é a reta suporte da diagonal [BD] do quadrado – o recurso a esta reta permite-nos, com uma única reta, inverter o rebatimento dos dois pontos. A reta s_r (a reta s rebatida) está definida por dois pontos – os pontos B_r e D_r .

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta s . O ponto H' é o traço horizontal da reta s e é um ponto da charneira (que é h_p), pelo que roda sobre si próprio – tem-se imediatamente $H'_r \equiv H'_1$ (H'_2 situa-se no eixo **X**). Já temos um ponto para definir a reta s em projeções – o ponto H' . O ponto F' é o traço frontal da reta s – F'_r é, assim, o ponto de interseção da reta s_r com f_{pr} (o traço frontal do plano rebatido). Por F'_r conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto F'). Tendo em conta que o ponto F' é um ponto do traço frontal do plano ρ (f_p), as projeções do ponto F' determinaram-se de forma imediata. Assim, desenharam-se as projeções da reta s , que está definida por dois pontos – os pontos H' e F' .

Por fim, pelo ponto B_r conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com s_1 (a projeção horizontal da reta s) é B_1 (a projeção horizontal do ponto **B**). A projeção frontal do ponto **B** (B_2) situa-se sobre s_2 (a projeção frontal da reta s).

De forma semelhante conduziu-se, pelo ponto D_r , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com s_1 (a projeção horizontal da reta s) é D_1 (a projeção horizontal do ponto **D**). A projeção frontal do ponto **D** (D_2) situa-se sobre s_2 (a projeção frontal da reta s).

A partir das projeções dos quatro pontos (**A**, **B**, **C** e **D**), desenharam-se as projeções do quadrado [ABCD].

Traçado:

Os traços do plano ρ representaram-se a **leve** pois, no contexto do exercício, são apenas auxiliares. O eixo **X** representa-se a **médio** (é a linha estruturante do exercício). As duas projeções do quadrado [ABCD] (o objetivo do exercício) representam-se a **forte**, pois são o pedido. O quadrado [ABCD], em rebatimento, representa-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso das retas r e s , das perpendiculares à charneira e, ainda, dos traçados necessários ao rebatimento do ponto **F**).

67.

Dados:

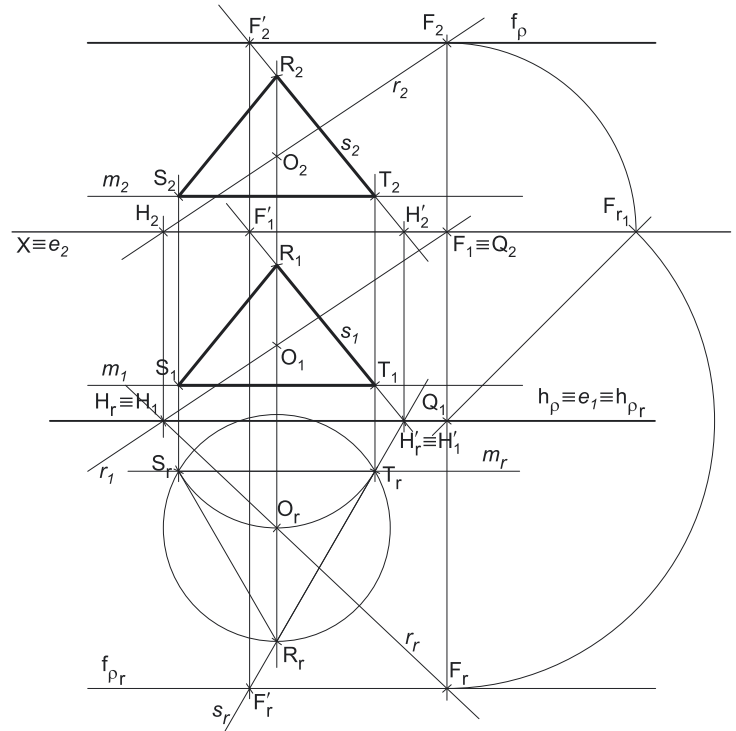
Em primeiro lugar, representou-se o plano ρ , pelos seus traços, em função dos dados. O plano ρ tem os seus traços simétricos em relação ao eixo X , pois é ortogonal a $\beta_{1/3}$ (planos ortogonais a $\beta_{1/3}$ têm os seus traços simétricos em relação ao eixo X).

Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto O , pertencente ao plano ρ – o ponto O tem de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano). A reta r é a reta auxiliar do plano a que se recorreu, para se determinarem as projeções do ponto O – a reta r está definida por dois pontos (o ponto H , o seu traço horizontal, e o ponto F , o seu traço frontal). O ponto O é o ponto da reta r que tem 3 cm de afastamento.

Resolução:

O plano que contém o triângulo $[ABC]$ (o plano ρ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o triângulo $[ABC]$ não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do triângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. De todos os processos geométricos auxiliares estudados, o que melhor se adequa à resolução deste tipo de problemas é o do rebatimento do plano de rampa, pelo rebatimento dos seus traços (pela rapidez de execução e pelo rigor que possibilita).

Nesse sentido, optou-se pelo rebatimento do plano ρ para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Começou-se por se identificar a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano ρ (h_ρ), que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente, $h_\rho \equiv e_1 \equiv h_{\rho_r}$ (e_2 , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo X). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil.



Rebatimento do traço frontal do plano ρ :

Em seguida, é necessário rebater o traço frontal do plano ρ (f_ρ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos a direção – f_ρ é uma reta fronto-horizontal pelo que, em rebatimento, continua a ser paralela ao eixo X . Falta-nos um ponto para definir f_ρ em rebatimento. Esse ponto tem de ser um ponto qualquer de f_ρ – o ponto F (o traço frontal da reta r), por exemplo. O ponto F tem de ser rebatido pelo triângulo do rebatimento.

Por F_1 (a projeção horizontal do ponto F) conduziu-se uma perpendicular à charneira, que corresponde ao plano ortogonal à charneira (o plano de perfil) que contém o arco do rebatimento do ponto F (mas que não se identificou). O centro do arco do rebatimento do ponto F é o ponto Q (o ponto de interseção da perpendicular à charneira com a charneira – h_ρ). O raio do arco do rebatimento do ponto F é \overline{QF} , que é o comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto F . Construiu-se o triângulo do rebatimento do ponto F em verdadeira grandeza (pelo rebatimento do plano de perfil) conduzindo, por F_1 (a projeção horizontal do ponto F) uma paralela à charneira (que é o próprio eixo X), para a qual se transportou a cota do ponto F com o compasso. Este procedimento permitiu-nos determinar o ponto F_r (que é o ponto F rebatido pelo rebatimento do plano de perfil). Em seguida, desenhou-se o segmento de reta $[QF_r]$ (que é a hipotenusa do triângulo do rebatimento em verdadeira grandeza) e, com o compasso, fazendo centro no ponto Q e raio $\overline{QF_r}$, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto F (o arco F_rF_1) até à perpendicular à charneira, onde se situa F_r (o ponto F rebatido).

Pelo ponto F_r (o ponto F rebatido) conduziu-se f_{ρ_r} (o traço frontal do plano ρ , em rebatimento), paralelo ao eixo X – f_ρ está definido por um ponto (o ponto F_r) e por uma direção (é fronto-horizontal).

Rebatimento do ponto O :

Para rebater o ponto O é necessário rebater uma reta do plano à qual o ponto O pertença – a reta r , neste caso. Assim, para definirmos a reta r em rebatimento (a reta r_r), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto – o ponto F_r . Falta-nos outro ponto ou uma direção. O traço horizontal da reta r (o ponto H) é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente $H_r \equiv H_1$. Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta r_r – a reta r_r (a reta r rebatida) está definida por dois pontos (os pontos F_r e H_r).

O ponto O é um ponto da reta r pelo que, em rebatimento, o ponto continua a ser um ponto da reta. Assim, o ponto O_r está sobre r_r , na perpendicular à charneira (h_ρ) que passa por O_1 (a projeção horizontal do ponto O) – essa perpendicular corresponde ao plano de perfil que contém o arco do rebatimento do ponto O .

Determinação das projeções dos pontos B e D e do quadrado $[ABCD]$:

Com o compasso, fazendo centro no ponto O_r e com 3 cm de raio, desenhou-se a circunferência circunscrita ao triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza). Em seguida, construiu-se o triângulo $[RST]$ em rebatimento (em verdadeira grandeza), respeitando os dados – o lado $[ST]$ é fronto-horizontal (é paralelo aos traços do plano em rebatimento) e o ponto R é o vértice de maior cota do polígono (é o vértice mais próximo de f_ρ). Para determinar as projeções do triângulo, inverteu-se o rebatimento do plano ρ , determinando-se as projeções dos pontos A , B e C .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A inversão do rebatimento dos pontos **R** e **T** processa-se com o recurso a retas do plano ρ às quais os pontos **R** e **T** pertençam. Nesse sentido, recorreu-se à reta **s**, uma reta oblíqua do plano ρ , que é a reta suporte do lado **[RT]** do triângulo – o recurso a esta reta permite-nos, com uma única reta, inverter o rebatimento dos dois pontos. A reta **s_r** (a reta **s** rebatida) está definida por dois pontos – os pontos **R_r** e **T_r**.

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta **s**. O ponto **H'** é o traço horizontal da reta **s** e é um ponto da charneira (que é **h_p**), pelo que roda sobre si próprio – tem-se imediatamente **H'_r ≡ H'₁** (**H'₂** situa-se no eixo **X**). Já temos um ponto para definir a reta **s** em projeções – o ponto **H'**. O ponto **F'** é o traço frontal da reta **s** – **F'_r** é, assim, o ponto de interseção da reta **s_r** com **f_p** (o traço frontal do plano rebatido). Por **F'_r** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **F'**). Tendo em conta que o ponto **F'** é um ponto do traço frontal do plano ρ (**f_p**), as projeções do ponto **F'** determinaram-se de forma imediata. Assim, desenharam-se as projeções da reta **s**, que está definida por dois pontos – os pontos **H'** e **F'**.

Por fim, pelo ponto **R_r** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com **s_r** (a projeção horizontal da reta **s**) é **R₁** (a projeção horizontal do ponto **R**). A projeção frontal do ponto **R** (**R₂**) situa-se sobre **s₂** (a projeção frontal da reta **s**).

De forma semelhante conduziu-se, pelo ponto **T_r**, uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com **s_r** (a projeção horizontal da reta **s**) é **T₁** (a projeção horizontal do ponto **T**). A projeção frontal do ponto **T** (**T₂**) situa-se sobre **s₂** (a projeção frontal da reta **s**).

A inversão do rebatimento do ponto **S** processa-se com o recurso a uma reta do plano ρ à qual o ponto **S** pertença. Nesse sentido, recorreu-se à reta **m**, uma reta fronto-horizontal do plano ρ , que é a reta suporte do lado **[TS]** do triângulo. A reta **m_r** (a reta **m** rebatida) está definida por dois pontos (os pontos **S_r** e **T_r**) e ainda pela sua direção (é fronto-horizontal).

As projeções da reta **m** desenharam-se de forma imediata – a reta **m** está definida por um ponto (o ponto **T**) e uma direção (é fronto-horizontal). Por fim, pelo ponto **S_r** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com **m_r** (a projeção horizontal da reta **m**) é **S₁** (a projeção horizontal do ponto **S**). A projeção frontal do ponto **S** (**S₂**) situa-se sobre **m₂** (a projeção frontal da reta **m**).

A partir das projeções dos três pontos (**R**, **S** e **T**), desenharam-se as projeções do triângulo **[RST]**.

Traçado:

Os traços do plano ρ , apesar de integrarem os dados, representaram-se a **leve** pois, no contexto do exercício, são apenas auxiliares. O eixo **X** representa-se a **médio** (é a linha estruturante do exercício). As duas projeções do triângulo **[RST]** (o objetivo do exercício) representam-se a **forte**, pois são o pedido. O triângulo **[RST]**, em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso das retas **r**, **s** e **m**, das perpendiculares à charneira e, ainda, dos traçados necessários ao rebatimento do ponto **F** e à construção do triângulo em rebatimento).

68.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **A**, pelas suas projeções, em função dos dados – o plano ρ está representado pelo eixo **X** (onde se situam os seus traços) e pelas projeções do ponto **A**.

Resolução:

O plano que contém o triângulo **[ABC]** (o plano ρ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o triângulo **[ABC]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do triângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo rebatimento do plano passante, pelo triângulo do rebatimento.

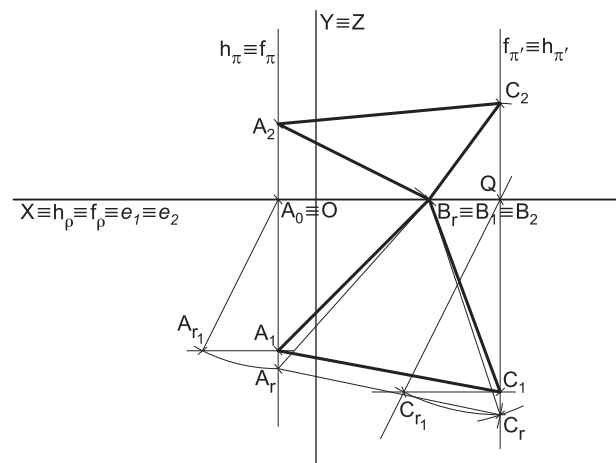
Optemos por rebater o plano ρ para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento das suas retas). Começemos por identificar a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano ρ (**h_p**), que se situa no eixo **X**, pelo que se tem imediatamente **X ≡ f_p ≡ h_p ≡ e₁ ≡ e₂** (não há necessidade de se identificarem os traços do plano em rebatimento, pois situam-se ambos no eixo **X**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil.

Rebatimento do ponto A:

Efetou-se o rebatimento do ponto **A**. O plano π é o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **A**. O centro do arco do rebatimento do ponto **A** é o ponto **O** (o ponto de interseção do plano π com a charneira do rebatimento – o eixo **X**). O raio do arco do rebatimento do ponto **A** é **OA**, que é o comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto **A** – o triângulo do rebatimento do ponto **A** é o triângulo retângulo **[OAA₁]**. Para se construir o triângulo do rebatimento do ponto **A** em verdadeira grandeza (pelo rebatimento do plano π) conduziu-se, por **A₁** (a projeção horizontal do ponto **A**) uma paralela à charneira, sobre a qual se marcou a cota do ponto **A** (que é um dos catetos do triângulo **[OAA₁]**), o que nos permitiu determinar o ponto **A_{r1}** (que é o ponto **A** rebatido pelo rebatimento do plano π). Em seguida, desenhou-se o segmento de reta **[OA_{r1}]** (que é a hipotenusa do triângulo do rebatimento em verdadeira grandeza) e, com o compasso, fazendo centro no ponto **O** e raio **OA_{r1}**, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **A** (o arco **A_{r1}A_r**) até **h_p**, onde se situa **A_r** (o ponto **A** rebatido).

Note que, por uma questão de simplificação do traçado, se omitiu a representação das projeções do ponto **O**.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Determinação das projeções dos pontos B e C e do triângulo [ABC]:

Em seguida, efetuaram-se os procedimentos necessários à construção do triângulo em verdadeira grandeza, em rebatimento. Com o compasso, fazendo centro em A_r e com 6 cm de lado, determinou-se o ponto B_r , no eixo X – uma vez que o vértice B , do triângulo, se situa no eixo X , B_r é o ponto do eixo X tal que $A_r B_r = 6$ cm (a medida do lado do polígono). A partir de A_r e de B_r construiu-se o triângulo [ABC] em rebatimento (o triângulo $[A_r B_r C_r]$), o que nos permitiu determinar o ponto C_r .

Para determinar as projeções do triângulo, há que inverter o rebatimento do plano p e determinar as projeções dos pontos B e C . O ponto B é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). Assim, as projeções do ponto B determinam-se imediatamente – $B_1 \equiv B_2 \equiv B_r$.

Para determinar as projeções do ponto C inverteu-se o rebatimento do plano p , através da construção do triângulo do rebatimento do ponto C – esse procedimento corresponde ao procedimento exposto para rebatimento do ponto A , mas efetuado pela ordem inversa. Assim, em primeiro lugar, conduziu-se o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto C – o plano π' . Em seguida, determinou-se o centro do arco do rebatimento do ponto C , que é o ponto de interseção do plano π' com a charneira – o ponto Q .

Note que, por uma questão de simplificação do traçado, se omitiu a representação das projeções do ponto Q . (à semelhança do referido para o ponto O).

Pelo ponto Q conduziu-se uma paralela ao segmento $[O A_{r1}]$ – essa paralela é a reta suporte da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto C (que será $[Q C_{r1}]$). Com o compasso, fazendo centro no ponto Q e com raio $Q C_r$, a partir de C_r , desenhou-se o arco do rebatimento do ponto C (o arco $\widehat{C_r C_{r1}}$), em sentido inverso ao do arco do rebatimento do ponto A , até à reta suporte da hipotenusa, onde se situa $C_{r1} - C_{r1}$ é, assim, o extremo do arco $\widehat{C_r C_{r1}}$ e é, também, o ponto de interseção desse arco com a reta suporte do segmento de reta $[Q C_{r1}]$.

Por C_{r1} conduziu-se uma paralela à charneira (que é um dos catetos do triângulo do rebatimento) e determinou-se C_1 (a projeção horizontal do ponto C) no ponto de interseção dessa paralela à charneira com o plano π' (o plano que contém o arco do rebatimento do ponto C). O comprimento do segmento $[C_1 C_{r1}]$ é a cota do ponto C , que se transportou para a linha de chamada do ponto C e nos permitiu determinar C_2 (a projeção frontal do ponto C).

A partir das projeções dos três pontos (A , B e C), desenharam-se as projeções do triângulo [ABC].

Traçado:

O eixo X representou-se a **médio** (é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano p , porque estão coincidentes com o eixo X , representaram-se a **médio** (a expressividade que já tinha sido atribuída ao eixo X). As duas projeções do triângulo [ABC] (o objetivo do exercício) representam-se a **forte**, pois são o pedido. O triângulo [ABC], em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos planos ortogonais à charneira e dos triângulos do rebatimento em verdadeira grandeza).

69.

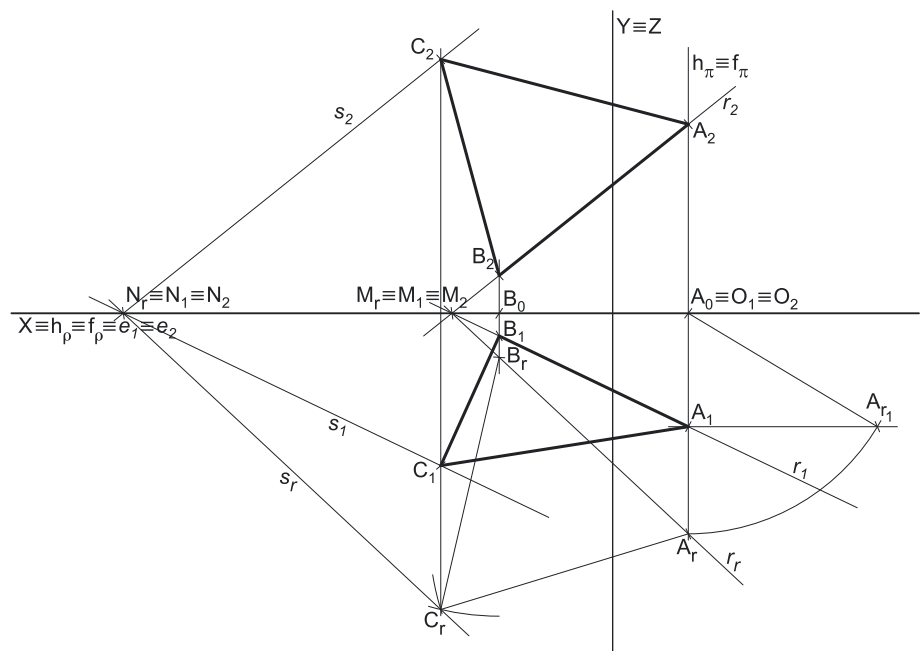
Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto A , pelas suas projeções, em função dos dados – o plano p está representado pelo eixo X (onde se situam os seus traços) e pelas projeções do ponto A . Os dados permitiram-nos, ainda, determinar a projeção frontal do ponto B .

O ponto B , para pertencer ao plano p , tem de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (tem de pertencer uma reta que pertença ao plano). A reta r é a reta do plano p a que se recorreu para se determinar a projeção horizontal do ponto B – a reta r é uma reta passante e está definida por dois pontos (o ponto A e o ponto M – o seu ponto de concorrência com o eixo X). A reta r é, também, a reta suporte do lado [AB] do triângulo. A projeção horizontal do ponto B (B_1) situa-se na projeção horizontal da reta r (r_1), na linha de chamada de B_2 .

Resolução:

O plano que contém o triângulo [ABC] (o plano p) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o triângulo [ABC] não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do triângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. De todos os processos geométricos auxiliares estudados, o que melhor se adequa à resolução deste tipo de problemas é o do rebatimento do plano passante, pelo rebatimento das suas retas (pela rapidez de execução e pelo rigor que possibilita).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Optemos por rebater o plano ρ para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento das suas retas). Começemos por identificar a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano ρ (h_ρ), que se situa no eixo X , pelo que se tem imediatamente $X \equiv f_\rho \equiv h_\rho \equiv e_1 \equiv e_2$ (não há necessidade de se identificarem os traços do plano em rebatimento, pois situam-se ambos no eixo X). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil.

O recurso ao rebatimento de retas do plano (para rebater os pontos do plano que pertencem a essas retas) requer o rebatimento de um ponto do plano pelo triângulo do rebatimento.

Rebatimento do ponto A:

Efetuiu-se o rebatimento do ponto **A**. Pelo ponto **A** conduziu-se uma perpendicular à charneira, que corresponde ao plano de perfil (o plano ortogonal à charneira) que contém o arco do rebatimento do ponto **A** – no entanto, por uma questão de simplificação de traçado, optou-se por não se identificar o plano. O centro do arco do rebatimento do ponto **A** é o ponto A_0 (o ponto de interseção do plano de perfil com a charneira do rebatimento – o eixo X). O raio do arco do rebatimento do ponto **A** é A_0A , que é o comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto **A** – o triângulo do rebatimento do ponto **A** é o triângulo retângulo $[A_0AA_1]$. Para se construir o triângulo do rebatimento do ponto **A** em verdadeira grandeza (pelo rebatimento do plano de perfil) conduziu-se, por A_1 (a projeção horizontal do ponto **A**) uma paralela à charneira, sobre a qual se marcou a cota do ponto **A** (que é um dos catetos do triângulo $[A_0AA_1]$), o que nos permitiu determinar o ponto A_{r_1} (que é o ponto **A** rebatido pelo rebatimento do plano de perfil). Em seguida, desenhou-se o segmento de reta $[A_0A_{r_1}]$ (que é a hipotenusa do triângulo do rebatimento em verdadeira grandeza) e, com o compasso, fazendo centro no ponto A_0 e raio $A_0A_{r_1}$, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **A** (o arco A_rA_1) até à perpendicular à charneira, onde se situa A_r (o ponto **A** rebatido).

Rebatimento do ponto B:

Para rebater o ponto **B** é necessário rebater uma reta do plano à qual o ponto **B** pertença – a reta r , neste caso (a reta r é a reta suporte do lado $[AB]$ do triângulo). Assim, para definirmos a reta r em rebatimento (a reta r_r), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto – o ponto **M** (o seu ponto de concorrência com o eixo X). O ponto **M** é um ponto da charneira, pelo que é fixo (roda sobre si próprio) – tem-se imediatamente $M_r \equiv M_1 \equiv M_2$. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Por outro lado, já temos também o ponto A_r , pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir a reta r_r – a reta r_r passa por A_r e por M_r (está definida por dois pontos).

O ponto **B** é um ponto da reta r pelo que, em rebatimento, o ponto continua a ser um ponto da reta. Por outro lado, o arco do rebatimento do ponto **B** está contido num plano ortogonal à charneira – um plano de perfil (que também não se identificou). Assim, o ponto B_r está sobre r_r , no ponto de interseção da perpendicular à charneira que passa por B_1 (e que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **B**) com a reta r_r .

Determinação das projeções do ponto C e do triângulo [ABC]:

A partir de A_r e de B_r construiu-se o triângulo $[ABC]$ em rebatimento (o triângulo $[A_rB_rC_r]$), o que nos permitiu determinar o ponto C_r .

A inversão do rebatimento do ponto **C** processa-se com o recurso a uma reta do plano ρ à qual o ponto **C** pertença. Nesse sentido, recorreu-se à reta s , uma reta oblíqua do plano ρ , paralela à reta r . A reta s_r (a reta s rebatida) está definida por um ponto (o ponto C_r) e uma direção (a direção da reta r_r).

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta s . A reta s é necessariamente uma reta passante, pelo que o seu ponto de concorrência com o eixo X (o ponto **N**) é um ponto fixo (é um ponto da charneira) – tem-se imediatamente $N_r \equiv N_1 \equiv N_2$. Assim, já temos um ponto para definir a reta s em projeções – o ponto **N**. Falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta r é paralela à reta s , pelo que já temos a direção para definir a reta s – a direção da reta r . Desenharam-se as projeções da reta s , que está definida por um ponto (o ponto **N**) e uma direção (a direção da reta r). Por fim, pelo ponto C_r conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com s_1 (a projeção horizontal da reta s) é C_1 (a projeção horizontal do ponto **C**). A projeção frontal do ponto **C** (C_2) situa-se sobre s_2 (a projeção frontal da reta s).

A partir das projeções dos três pontos (**A**, **B** e **C**), desenharam-se as projeções do triângulo $[ABC]$.

Traçado:

O eixo X representou-se a **médio** (é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano ρ , porque estão coincidentes com o eixo X , representaram-se a **médio** (a expressividade que já tinha sido atribuída ao eixo X). As duas projeções do triângulo $[ABC]$ (o objetivo do exercício) representam-se a **forte**, pois são o pedido. O triângulo $[ABC]$, em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso das retas r e s e das retas r_r e s_r , bem como das perpendiculares à charneira que correspondem aos planos ortogonais à charneira e do triângulo do rebatimento do ponto **A**).

70.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano λ , pelos seus traços, em função dos dados. Em seguida, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas suas projeções e pertencentes ao plano, em função dos dados. Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto **O**, em função dos dados. O ponto **O**, para pertencer ao plano λ , tem de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano). A reta **f** é a reta frontal (de frente) do plano, com 4 cm de afastamento, a que se recorreu para se determinarem as projeções do ponto **O** – a reta **f** está definida por um ponto (o ponto **H**, o seu traço horizontal) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano λ). O ponto **O** é o ponto da reta **f** que tem 3 cm de cota.

Resolução:

O plano que contém o círculo (o plano λ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o círculo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do círculo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. De todos os processos geométricos auxiliares estudados, o que melhor se adequa à resolução deste tipo de problemas é o do rebatimento do plano oblíquo, pelo rebatimento dos seus traços (pela rapidez de execução e pelo rigor que possibilita).

Nesse sentido, optou-se pelo rebatimento do plano λ para o Plano Frontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Começou-se por se identificar a charneira do rebatimento, que é o traço frontal do plano λ (f_λ), que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente, $f_\lambda \equiv e_2 \equiv f_{\lambda_r}$ (e_1 , a projeção horizontal da charneira, situa-se no eixo **X**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de topo (ortogonais a f_λ).

Rebatimento do traço horizontal do plano λ e do ponto **O:**

Em seguida, rebateu-se o traço horizontal do plano λ (h_λ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto de concorrência dos dois traços do plano é um ponto de h_λ e situa-se na charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). Já temos um ponto para definir h_{λ_r} (o traço horizontal do plano em rebatimento). Falta-nos outro ponto ou uma direção.

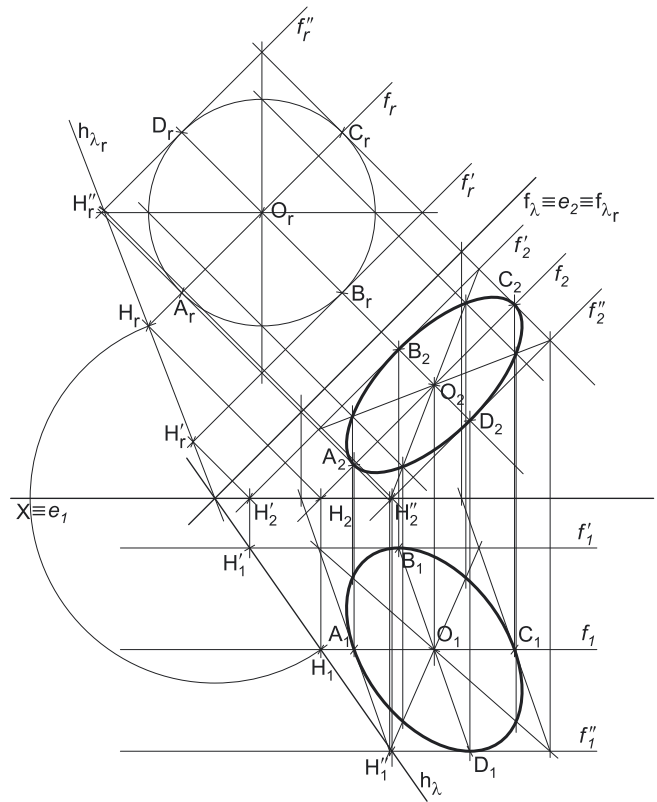
Optou-se por se rebater o ponto **H** (o traço horizontal da reta **f**), que é um ponto de h_λ e, simultaneamente, é um ponto da reta **f** (que nos permitirá, em seguida, rebater o ponto **O**). Para rebater o ponto **H** conduziu-se, por **H**, uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **H**, e que não se identificou). Em seguida, com o compasso, fazendo centro no ponto de concorrência dos traços do plano e com raio até **H**₁, desenhou-se um arco (de transporte) até à perpendicular à charneira, obtendo-se **H**_r (o ponto **H** rebatido). Isto permitiu-nos desenhar h_{λ_r} (o traço horizontal do plano λ rebatido), que passa por **H**_r e pelo ponto de concorrência dos dois traços do plano (h_{λ_r} está definido por dois pontos).

Para rebater o ponto **O** é necessário rebater uma reta do plano à qual o ponto **O** pertença – a reta **f**, neste caso. Assim, para definirmos a reta **f** em rebatimento (a reta **f**_r), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto – o ponto **H**_r. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Tendo em conta que a reta **f** é uma reta frontal (de frente) do plano λ e que retas frontais (de frente) de um plano são paralelas entre si e ao traço horizontal do plano (o que se verifica no espaço, em projeções e em rebatimento), já temos a direção que nos faltava para definir **f**_r. A reta **f**_r (a reta **f** em rebatimento) passa por **H**_r e é paralela a $f_{\lambda_r} - f_r$, está definida por um ponto (**H**_r) e por uma direção (é paralela a f_{λ_r}).

O ponto **O** é um ponto da reta **f** pelo que, em rebatimento, o ponto continua a ser um ponto da reta. Assim, o ponto **O**_r está sobre **f**_r, na perpendicular a f_{λ_r} (a charneira) que passa por **O**₂ (a projeção frontal do ponto **O**) – essa perpendicular corresponde ao plano ortogonal a f_λ que contém o arco do rebatimento do ponto **O**.

Determinação das projeções do círculo:

Com o compasso, fazendo centro em **O**_r e com 3 cm de raio, desenhou-se o círculo em verdadeira grandeza (em rebatimento). As **duas projeções** do círculo serão **elipses**, ao contrário das situações estudadas no 10º ano de lecionação da disciplina (em **apenas uma** das projeções era uma **elipse**). De facto, o estudo efetuado nessa altura (Capítulo 10) referia-se **exclusivamente** a círculos e circunferências contidas em planos projetantes, sendo que uma das suas projeções ficava reduzida a um segmento de reta, em função, precisamente, de se tratar de **planos projetantes** (o que não é este o caso). Assim, tratando-se de **duas elipses**, é necessário ter em conta que o desenho de cada uma requer alguns cuidados particulares, nomeadamente **um mínimo** de oito pontos e, se possível, os dois eixos (de cada uma) e um paralelogramo envolvente.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A relação mais direta entre o **objeto dado** (o círculo) e o **seu transformado** (as suas projeções) é a que existe entre o **círculo** em verdadeira grandeza e a **elipse** que é a sua projeção frontal, sendo uma relação homológica cujo eixo de homologia é f_λ (a charneira do rebatimento). Tratemos, então, da **elipse** que é a **projeção frontal da circunferência**. Assim, inscreveu-se a circunferência num quadrado de lados paralelos ao eixo de homologia (f_λ) e desenharam-se as suas medianas e as suas diagonais. Os extremos das medianas do quadrado são os pontos em que a circunferência é tangente aos quatro lados do quadrado e dão-nos, imediatamente, os extremos dos dois eixos da elipse que é a projeção frontal da circunferência. Assim, a projeção frontal do diâmetro **[AC]** corresponderá ao eixo maior da referida elipse (por ser paralelo ao eixo de homologia e, por isso, não sofrer qualquer deformação), enquanto a projeção frontal do diâmetro **[BD]** corresponderá ao eixo menor da elipse (por ser aquele que é perpendicular ao eixo de homologia e, por isso, sofrer a maior redução). Estes pontos serão, já, quatro pontos da elipse – os outros quatro pontos serão os pontos de interseção da circunferência com as diagonais do quadrado em que aquela se inscreve.

As projeções dos pontos **A** e **C** determinaram-se imediatamente, através das perpendiculares à charneira que passam por **A_r** e **C_r** (que correspondem aos planos ortogonais à charneira que contêm os respetivos arcos do rebatimento). Uma vez que são, ambos, pontos da reta **f**, as projeções dos pontos **A** e **C** situam-se sobre as projeções homónimas da reta **f**.

A inversão do rebatimento do ponto **B** processa-se com o recurso a uma reta do plano λ à qual o ponto **B** pertença – a reta **f'**, que é a reta suporte do lado do quadrado que passa pelo ponto **B**. Tenha em conta que se trata de um dos dois lados do quadrado que são paralelos à charneira do rebatimento (f_λ), pelo que são lados frontais – a reta **f'** é outra reta frontal (de frente) do plano λ . A reta **f'**, (a reta **f'** rebatida) está definida por um ponto (o ponto **B_r**) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano λ – é paralela a **f_r** e a **f_{λr}**). Em seguida, determinaram-se as projeções da reta **f'**. O ponto **H'** é o traço horizontal da reta **f'**. Conduzindo, por **H'**, uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **H'**), o que nos permitiu determinar **H'₂** (a projeção frontal do ponto **H'**) sobre o eixo **X – H'₁** (a projeção horizontal de **H'**) situa-se sobre **h_λ**. Já temos um ponto para definir a reta **f'** em projeções – o ponto **H'**. Já temos também a direção (que é a direção das retas frontais do plano λ), o que nos permitiu desenhar as duas projeções da reta **f'**.

Por fim, pelo ponto **B_r** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção dessa perpendicular à charneira com **f'₂** (a projeção frontal da reta **f'**) é **B₂** (a projeção frontal do ponto **B**). A projeção horizontal do ponto **B** (**B₁**) situa-se sobre **f'₁** (a projeção horizontal da reta **f'**).

A determinação das projeções do ponto **D** processou-se de forma idêntica à atrás exposta para o ponto **B**, sendo que a reta **f''** foi a reta frontal (de frente) que nos permitiu determinar as projeções do ponto **D** (o ponto **D** é um ponto da reta **f''** e a reta **f''** é, ainda, a reta suporte de um outro lado do quadrado). A partir das premissas atrás referidas (os lados do quadrado estarem contidos nas retas frontais **f'** e **f''**) e, ainda, das projeções dos pontos **A**, **B**, **C** e **D**, desenharam-se as duas projeções do quadrado circunscrito ao círculo – a projeção frontal do quadrado é um retângulo e a projeção horizontal do quadrado é um paralelogramo. Já temos quatro pontos de cada uma das elipses. Tenha em conta que dois dos lados do quadrado são paralelos ao segmento **[AC]** (que é uma mediana do quadrado) e que os outros dois lados do quadrado são paralelos ao segmento **[BD]** (que é outra mediana do quadrado). As situações de paralelismo referidas mantêm-se em ambas as projeções. As projeções dos pontos **A**, **B**, **C** e **D** são, imediatamente, **quatro pontos** de cada uma das duas elipses que são as projeções do círculo.

Em seguida, desenharam-se as projeções das diagonais do quadrado (diretamente em projeções), que se bisetam sobre as projeções homónimas do ponto **O** (o centro do quadrado). Com o recurso a perpendiculares à charneira (que correspondem a planos ortogonais à charneira), transportaram-se, para as projeções frontais das diagonais do quadrado, os pontos em que a circunferência interseca aquelas diagonais. A partir das projeções frontais desses quatro pontos, determinaram-se as projeções horizontais desses mesmos pontos, sobre as projeções horizontais das diagonais do quadrado. Já temos **oito pontos** para desenhar cada uma das duas elipses.

No que respeita à **elipse** que é a **projeção frontal da circunferência**, **[A₂C₂]** é o seu eixo maior e **[B₂D₂]** é o seu eixo menor e a curva é tangente aos lados do retângulo em **A₂**, **B₂**, **C₂** e **D₂**, precisamente.

No que respeita à **elipse** que é a **projeção horizontal da circunferência**, optou-se por desenhá-la imediatamente, a partir dos oito pontos determinados e dos seus pontos de tangência ao paralelogramo envolvente (**A₁**, **B₁**, **C₁** e **D₁**). No entanto, este desenho carece do rigor da outra elipse, uma vez que não foram determinados os seus dois eixos.

Para tal seria necessário, em rebatimento, determinar o diâmetro da circunferência que é paralelo a **h_{λr}**, e o outro que lhe é perpendicular – a projeção horizontal do primeiro seria o eixo maior dessa elipse e a projeção horizontal do segundo seria o eixo menor dessa mesma elipse. Esse procedimento dar-nos-ia mais quatro pontos da curva em cada uma das projeções, o que permitiria um desenho ainda mais preciso das duas elipses (com um total de doze pontos). No entanto, optou-se por não efetuar esses procedimentos na solução apresentada, uma vez que a quantidade de informação gráfica que tal iria provocar dificultaria, em muito, a leitura da resolução gráfica proposta.

Traçado:

Os traços do plano λ , apesar de serem dados, representaram-se a **leve** pois, no contexto do exercício, são apenas auxiliares. O eixo **X** representa-se a **médio** (é a linha estruturante do exercício). As duas projeções do círculo (o objetivo do exercício) representam-se a **forte**, pois são o pedido. O círculo, em rebatimento, representa-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso das retas **f**, **f'** e **f''** (em projeções e em rebatimento), do quadrado envolvente com as suas medianas e as diagonais (em projeções e em rebatimento), das perpendiculares à charneira e, ainda, do arco de transporte que nos permitiu rebater **h_λ**.

71.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano ρ , pelos seus traços, em função dos dados. Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto O , pertencente ao plano ρ – o ponto O tem de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (tem de pertencer a uma reta que pertença ao plano). A reta r é a reta auxiliar do plano a que se recorreu, para se determinarem as projeções do ponto O – a reta r está definida por dois pontos (o ponto H , o seu traço horizontal, e o ponto F , o seu traço frontal). O ponto O é o ponto da reta r que tem 3 cm de cota.

Resolução:

O plano que contém o círculo (o plano ρ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o círculo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do círculo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. De todos os processos geométricos auxiliares estudados, o que melhor se adequa à resolução deste tipo de problemas é o do rebatimento do plano de rampa, pelo rebatimento dos seus traços (pela rapidez de execução e pelo rigor que possibilita).

Nesse sentido, optou-se pelo rebatimento do plano ρ para o Plano Frontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Começou-se por se identificar a charneira do rebatimento, que é o traço frontal do plano ρ (f_p), que roda sobre si próprio – tem-se, imediatamente, $f_p \equiv e_2 \equiv f_{p_r}$ (e_1 , a projeção horizontal da charneira, situa-se no eixo X). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil (ortogonais a f_p).

Rebatimento do traço horizontal do plano ρ :

Em seguida, é necessário rebater o traço horizontal do plano ρ (f_p), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos a direção – h_p é uma reta fronto-horizontal pelo que, em rebatimento, continua a ser paralela ao eixo X . Falta-nos um ponto para definir h_p em rebatimento. Esse ponto tem de ser um ponto qualquer de h_p – o ponto H (o traço horizontal da reta r), por exemplo. O ponto H tem de ser rebatido pelo triângulo do rebatimento.

Por H_2 (a projeção frontal do ponto H) conduziu-se uma perpendicular à charneira, que corresponde ao plano ortogonal à charneira (o plano de perfil) que contém o arco do rebatimento do ponto H (mas que não se identificou). O centro do arco do rebatimento do ponto H é o ponto de interseção da perpendicular à charneira com a charneira do rebatimento (f_p). O raio do arco do rebatimento do ponto H é o comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto H . Para se construir o triângulo do rebatimento do ponto H em verdadeira grandeza (pelo rebatimento do plano de perfil) conduziu-se, por H_2 (a projeção frontal do ponto H) uma paralela à charneira (que é o próprio eixo X), para a qual se transportou, com o compasso, o afastamento do ponto H (que é um dos catetos do triângulo do rebatimento do ponto H), o que nos permitiu determinar o ponto H_r (que é o ponto H rebatido pelo rebatimento do plano de perfil, mas que não se identificou). Em seguida, desenhou-se a hipotenusa do triângulo do rebatimento e, com o compasso, fazendo centro na charneira e raio igual à hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto H até à perpendicular à charneira, onde se situa H_r (o ponto H rebatido).

Pelo ponto H_r (o ponto H rebatido) conduziu-se h_{p_r} (o traço horizontal do plano ρ , em rebatimento), paralelo ao eixo X – h_{p_r} está definido por um ponto (o ponto H_r) e por uma direção (é fronto-horizontal).

Rebatimento do ponto O :

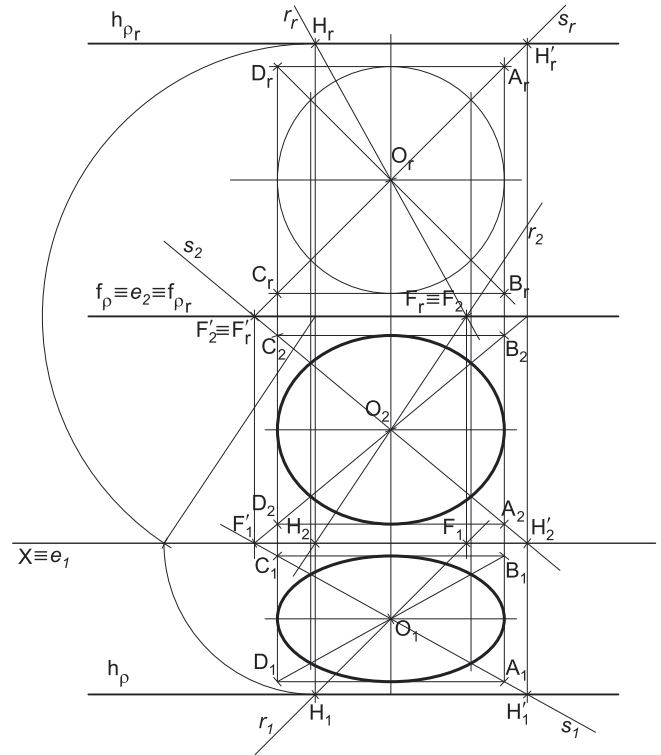
Para rebater o ponto O é necessário rebater uma reta do plano à qual o ponto O pertença – a reta r , neste caso. Assim, para definirmos a reta r em rebatimento (a reta r_r), são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto – o ponto H_r . Falta-nos outro ponto ou uma direção. O traço frontal da reta r (o ponto F) é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente $F_r \equiv F_2$. Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta r_r – a reta r_r (a reta r rebatida) está definida por dois pontos (os pontos F_r e H_r).

O ponto O é um ponto da reta r pelo que, em rebatimento, o ponto continua a ser um ponto da reta. Assim, o ponto O_r está sobre r_r , na perpendicular à charneira (h_{p_r}) que passa por O_2 (a projeção frontal do ponto O) – essa perpendicular corresponde ao plano de perfil que contém o arco do rebatimento do ponto O .

Determinação das projeções do círculo:

Com o compasso, fazendo centro em O_r e com 3 cm de raio, desenhou-se o círculo em verdadeira grandeza (em rebatimento). Tal como na situação do exercício anterior, as **duas projeções** do círculo serão **elipses**. Assim, tratando-se de **duas elipses**, é necessário ter em conta que o desenho de cada uma requer alguns cuidados particulares, nomeadamente **um mínimo** de oito pontos e, se possível, os dois eixos (de cada uma) e um paralelogramo envolvente.

No entanto, ao contrário da situação anterior, o diâmetro que **não sofre deformação em projeção frontal** (o diâmetro fronto-horizontal) é o mesmo que também **não sofre deformação em projeção horizontal**. Por outro lado, o diâmetro da circunferência que **sofre a deformação máxima em projeção frontal** (o diâmetro de perfil) é o mesmo que também **sofre a deformação máxima em projeção horizontal**. Assim, os diâmetros que nos darão os eixos da elipse que é a projeção frontal da circunferência são os mesmos que nos darão os eixos da elipse que é a projeção horizontal da circunferência.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A relação mais direta entre o **objeto dado** (o círculo) e o **seu transformado** (as suas projeções) é a que existe entre o **círculo** em verdadeira grandeza e a **elipse** que é a sua projeção frontal, sendo uma relação homológica cujo eixo de homologia é f_p (a charneira do rebatimento). Assim, inscreveu-se o círculo num quadrado de lados paralelos ao eixo de homologia (f_p) – o quadrado [ABCD] – e desenharam-se as suas medianas e as suas diagonais (em rebatimento). Os pontos em que as medianas se apoiam nos lados do quadrado dão-nos, imediatamente, os extremos dos dois eixos das elipses – a **mediana fronto-horizontal** é o diâmetro cujas projeções são **os eixos maiores** das duas elipses, enquanto a **mediana de perfil** é o diâmetro cujas projeções são **os eixos menores** das duas elipses.

A inversão do rebatimento dos pontos **A** e **C** processa-se com o recurso a retas do plano ρ às quais os pontos **A** e **C** pertençam. Nesse sentido, recorreu-se à reta **s**, uma reta oblíqua do plano ρ , que é a reta suporte da diagonal [AC] do quadrado – o recurso a esta reta permite-nos, com uma única reta, inverter o rebatimento dos dois pontos. A reta s_r (a reta **s** rebatida) está definida por dois pontos – os pontos **A_r** e **C_r**.

Em seguida, determinaram-se as projeções da reta **s**. O ponto **F'** é o traço frontal da reta **s** e é um ponto da charneira (que é f_p), pelo que roda sobre si próprio – tem-se imediatamente **F'_r \equiv F'₂** (**F'₁** situa-se no eixo **X**). Já temos um ponto para definir a reta **s** em projeções – o ponto **F'**. O ponto **H'** é o traço horizontal da reta **s** – **H'_r** é, assim, o ponto de interseção da reta s_r com h_{p_r} (o traço horizontal do plano rebatido). Por **H'_r**, conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **H'**). Tendo em conta que o ponto **H'** é um ponto do traço horizontal do plano ρ (h_p), as projeções do ponto **H'** determinaram-se de forma imediata. Assim, desenharam-se as projeções da reta **s**, que está definida por dois pontos – os pontos **H'** e **F'**.

Por fim, pelo ponto **A_r**, conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com s_2 (a projeção frontal da reta **s**) é **A₂** (a projeção frontal do ponto **A**). A projeção horizontal do ponto **A** (**A₁**) situa-se sobre s_1 (a projeção horizontal da reta **s**).

De forma semelhante conduziu-se, pelo ponto **C_r**, uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com s_2 (a projeção frontal da reta **s**) é **C₂** (a projeção frontal do ponto **C**). A projeção horizontal do ponto **C** (**C₁**) situa-se sobre s_1 (a projeção horizontal da reta **s**).

Em seguida, determinaram-se as projeções do quadrado, a partir dos vértices **A** e **C**. A partir das projeções dos pontos **A** e **C**, e atendendo a que o quadrado tem dois lados fronto-horizontais (os lados [AD] e [BC]), determinaram-se as projeções dos **B** e **D** (que se situam nas perpendiculares à charneira que passam por **B_r** e **D_r**, respetivamente) e desenharam-se as duas projeções do quadrado [ABCD].

Em seguida, desenharam-se as projeções das medianas do quadrado. A **mediana fronto-horizontal** está definida por um ponto (o ponto **O**) e por uma direção (é fronto-horizontal). A **mediana de perfil** está igualmente definida por um ponto (o ponto **O**) e uma direção (é de perfil). Os pontos em que as medianas do quadrado se apoiam nos lados do polígono (em projeções) são, imediatamente, quatro pontos de cada uma das duas **elipses** e são, também, os pontos de tangência das elipses aos lados do quadrado. Já temos quatro pontos para o desenho de cada uma das elipses.

Em seguida, desenharam-se as projeções das diagonais do quadrado. Os quatro pontos que nos faltam para o desenho das duas elipses são os pontos de interseção da circunferência com as diagonais do quadrado – estes pontos transportaram-se para as projeções das diagonais através dos planos de perfil (os planos ortogonais à charneira) que contém os respetivos arcos do rebatimento. A partir dos **oito pontos** assim determinados, desenharam-se as **duas elipses** que são as projeções do círculo pedido.

Traçado:

Os traços do plano ρ , apesar de serem dados, representaram-se a **leve** pois, no contexto do exercício, são apenas auxiliares. O eixo **X** representa-se a **médio** (é a linha estruturante do exercício). As duas projeções do círculo (o objetivo do exercício) representam-se a **forte**, pois são o pedido. O círculo, em rebatimento, representa-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso das retas **r** e **s** (em projeções e em rebatimento), do quadrado envolvente com as suas medianas e as diagonais (em projeções e em rebatimento), das perpendiculares à charneira e, ainda, do arco do rebatimento do ponto **H**.

72.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados – o plano p está representado pelo eixo **X** (onde se situam os seus traços) e pelas projeções do ponto **O**.

Resolução:

O plano que contém o quadrado **[ABCD]** (o plano p) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o quadrado **[ABCD]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do quadrado estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. De todos os processos geométricos auxiliares estudados, o que melhor se adequa à resolução deste tipo de problemas é o do rebatimento do plano passante, pelo rebatimento das suas retas (pela rapidez de execução e pelo rigor que possibilita).

Optemos por rebater o plano p para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento das suas retas). Começemos por identificar a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano p (h_p), que se situa no eixo **X**, pelo que se tem imediatamente $X \equiv h_p \equiv e_1 \equiv e_2$ (não há necessidade de se identificarem os traços do plano em rebatimento, pois situam-se ambos no eixo **X**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil.

O recurso ao rebatimento de retas do plano (para rebater os pontos do plano que pertencem a essas retas) requer o rebatimento de um ponto do plano pelo triângulo do rebatimento.

Rebatimento do ponto O:

Efetou-se o rebatimento do ponto **O**. Pelo ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira, que corresponde ao plano de perfil (o plano ortogonal à charneira) que contém o arco do rebatimento do ponto **O** (mas que não se identificou). O centro do arco do rebatimento do ponto **A** é o ponto de interseção da perpendicular à charneira com a charneira do rebatimento – o eixo **X**. O raio do arco do rebatimento do ponto **O** é o comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto **O**. Para se construir o triângulo do rebatimento do ponto **O** em verdadeira grandeza (pelo rebatimento do plano de perfil) conduziu-se, por O_1 (a projeção horizontal do ponto **O**) uma paralela à charneira, sobre a qual se marcou a cota do ponto **O** (que é um dos catetos do triângulo do rebatimento do ponto **O**), o que nos permitiu determinar o ponto O_{r1} (que é o ponto **O** rebatido pelo rebatimento do plano de perfil). Em seguida, desenhou-se a hipotenusa do triângulo do rebatimento e, com o compasso, fazendo centro na charneira e raio até O_{r1} , desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **O** (o arco $O_1 O_{r1}$) até à perpendicular à charneira, onde se situa O_r (o ponto **O** rebatido).

Construção do quadrado [ABCD] em verdadeira grandeza:

A partir de O_r construiu-se o quadrado **[ABCD]** em rebatimento, respeitando os dados no enunciado. Assim, com o compasso, fazendo centro em O_r e com 4 cm de raio, desenhou-se, em rebatimento (em verdadeira grandeza) a circunferência circunscrita ao quadrado. Tendo em conta que o lado **[AB]** faz um ângulo de 35° como eixo **X** (de abertura para a esquerda), e atendendo a que as diagonais de um quadrado fazem ângulos de 45° com os lados do polígono, foi possível desenhar, imediatamente, o diâmetro da circunferência que corresponde à diagonal **[AC]** do quadrado – esse diâmetro faz, com o eixo **X** (em rebatimento), um ângulo de 80° ($35^\circ + 45^\circ = 80^\circ$) de abertura para a esquerda. Dos dois extremos desse diâmetro, o ponto A_r (ponto **A** rebatido) é o de menor afastamento, para que se respeite o enunciado – o outro extremo é o ponto C_r (ponto **C** rebatido). Em seguida, concluiu-se a construção do quadrado, em rebatimento (em verdadeira grandeza – o quadrado $[A_r B_r C_r D_r]$), o que nos permitiu determinar os outros dois vértices em rebatimento – **B_r** e **D_r**.

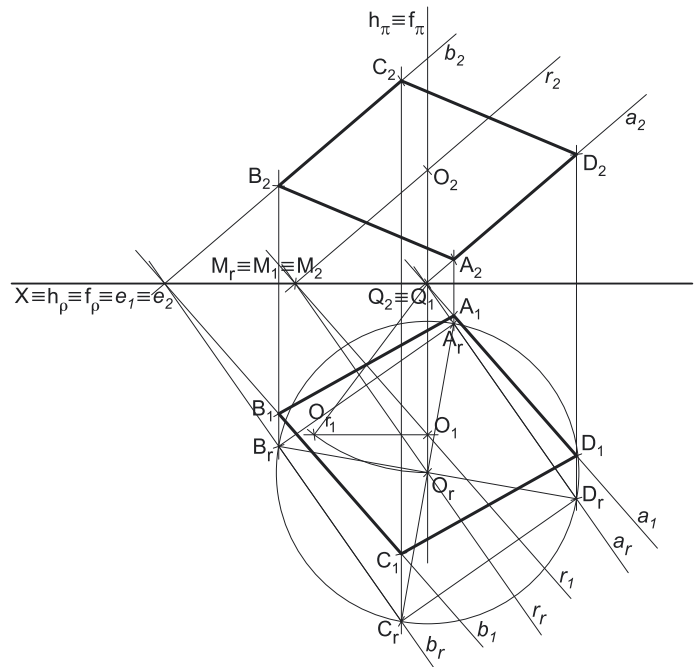
A inversão do rebatimento dos vértices do quadrado processa-se com o recurso a retas do plano p às quais aqueles pontos pertencem.

Determinação das projeções dos pontos A e D:

Nesse sentido, recorreu-se à reta a , uma reta oblíqua do plano p , que é a reta suporte do lado **[AD]** do quadrado – esta reta tem a vantagem de, com uma única reta, ser possível inverter o rebatimento de dois vértices do polígono. A reta a_r (a reta a rebatida) está definida por dois pontos – os pontos A_r e D_r . É necessário, em seguida, definir a reta a em projeções. A reta a é necessariamente uma reta passante, pelo que o seu ponto de concorrência com o eixo **X** é um ponto fixo (é um ponto da charneira), pelo que roda sobre si próprio. Assim, já temos um ponto para definir a reta a em projeções. Falta-nos outro ponto ou uma direção.

Os dados do plano são insuficientes para definir a reta a , pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano, reta essa também ela definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Recorreu-se à reta r , como reta auxiliar do plano – a reta r_r (a reta r rebatida) está definida pelo ponto O_r (o único do plano cujas projeções são conhecidas) e por uma direção (a direção da reta a_r – a reta r_r é, assim, paralela à reta a_r). A reta r_r é necessariamente uma reta passante, pelo que o seu ponto de concorrência com o eixo **X** é um ponto fixo (é um ponto da charneira), pelo que roda sobre si próprio. Assim, já temos um ponto para definir a reta r em projeções. Falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta r passa pelo ponto **O**, cujas projeções são conhecidas (é o ponto dado no enunciado), pelo que já temos o ponto que nos faltava. A reta r , em projeções, está definida por dois pontos – o ponto **O** e o seu ponto de concorrência com o eixo **X**.

Por fim, já temos a direção que nos faltava para definir a reta a em projeções – a direção da reta r . Assim, a reta a está definida por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo **X**) e pela sua direção (a direção da reta r). Este procedimento permitiu-nos desenhar as projeções da reta a .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por fim, pelo ponto A_r conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com a_1 (a projeção horizontal da reta a) é A_1 (a projeção horizontal do ponto A). A projeção frontal do ponto A (A_2) situa-se sobre a_2 (a projeção frontal da reta a). A determinação das projeções do ponto D processou-se de forma idêntica à atrás exposta para o ponto A (ponto D é outro ponto da reta a), com o recurso à perpendicular à charneira que passa pelo ponto D (e que corresponde a plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto D).

Determinação das projeções dos pontos B e C e do quadrado [ABCD]:

Para determinar as projeções dos pontos B e C recorreu-se à reta b , outra reta oblíqua do plano p , que é a reta suporte do lado $[BC]$ do quadrado – esta reta também tem a vantagem de, com uma única reta, ser possível inverter o rebatimento de dois vértices do polígono. A reta b_r (a reta b rebatida) está definida por dois pontos – os pontos B_r e C_r . A reta b_r é ainda paralela às retas a_r e r_r .

É necessário, em seguida, definir a reta b em projeções. A reta b é necessariamente uma reta passante, pelo que o seu ponto de concorrência com o eixo X é um ponto fixo (é um ponto da charneira), pelo que roda sobre si próprio. Assim, já temos um ponto para definir a reta a em projeções. Falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta b é paralela às retas r e a , pelo que também já temos a direção que nos faltava para definir a reta b em projeções – a direção das retas r e a . Assim, a reta b está definida por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo X) e pela sua direção (a direção da reta r), o que nos permitiu desenhar as projeções da reta b .

Por fim, pelo ponto B_r conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com b_1 (a projeção horizontal da reta b) é B_1 (a projeção horizontal do ponto B). A projeção frontal do ponto B (B_2) situa-se sobre b_2 (a projeção frontal da reta b). A determinação das projeções do ponto C processou-se de forma idêntica à atrás exposta para o ponto C (o ponto C é outro ponto da reta b), com o recurso à perpendicular à charneira que passa pelo ponto C (e que corresponde a plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto C).

Note que as retas utilizadas correspondem a uma das muitas situações a que se pode recorrer para a resolução do exercício – poder-se-ia ter recorrido, por exemplo, às retas suportes dos outros dois lados do quadrado.

A partir das projeções dos quatro pontos (A , B , C e D), desenharam-se as projeções do quadrado $[ABCD]$.

Traçado:

O eixo X representou-se a **médio** (é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano p , porque estão coincidentes com o eixo X , representaram-se a **médio** (a expressividade que já tinha sido atribuída ao eixo X). As duas projeções do quadrado $[ABCD]$ (o objetivo do exercício) representam-se a **forte**, pois são o pedido. O quadrado $[ABCD]$, em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso das retas a , b e r , em projeção e em rebatimento, bem como das perpendiculares à charneira que correspondem aos planos ortogonais à charneira e do triângulo do rebatimento do ponto O).

17 PROBLEMAS MÉTRICOS

73.

Dados:

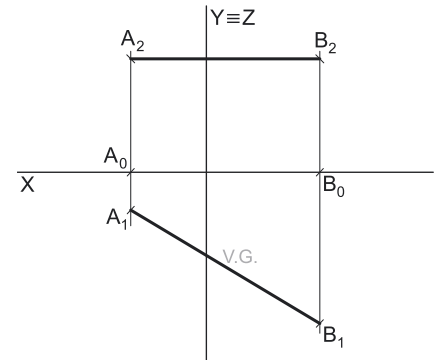
Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B** pelas respetivas projeções, em função dos dados.

Resolução:

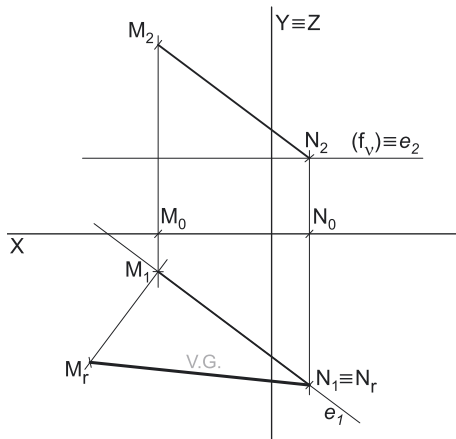
Em seguida, desenharam-se as duas projeções do segmento de reta **[AB]**, que é o segmento representativo da distância entre os dois pontos. O segmento de reta é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que o segmento de reta se projeta em verdadeira grandeza em projeção horizontal – a verdadeira grandeza da distância entre os pontos **A** e **B** está na projeção horizontal do segmento de reta **[AB]**. $\overline{A_1B_1}$ é a verdadeira grandeza da distância entre os dois pontos, o que se identificou no desenho.

Traçado:

O eixo **X** representa-se igualmente a **médio** (é a linha estruturante do exercício). As projeções do segmento de reta representaram-se a **médio-forte**, pois integram o pedido (são pedidas também as projeções da distância). A projeção horizontal do segmento de reta **[AB]** (o segmento de reta **[A₁B₁]**) representou-se a **forte**, pois é a parte final do que é pedido – é em $\overline{A_1B_1}$ que se pode medir a verdadeira grandeza da distância entre os dois pontos. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois são linhas de chamada.



74.



Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **M** e **N** pelas respetivas projeções, em função dos dados.

Resolução:

Em seguida, desenharam-se as duas projeções do segmento de reta **[MN]**, que é o segmento representativo da distância entre os dois pontos. O segmento de reta **[MN]** não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o segmento não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do segmento apresentam deformação), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

O enunciado refere expressamente que o processo geométrico auxiliar a utilizar é o do rebatimento do plano projetante horizontal do segmento para o plano horizontal (de nível) que contém o ponto **N**. Nesse sentido, conduziu-se, pela projeção frontal do ponto **N** (**N₂**) o traço frontal do plano ν (o plano horizontal que contém o ponto **N**). Em seguida, representou-se o plano projetante horizontal do segmento **[MN]** (o plano α) – o plano está definido por uma reta (a charneira do rebatimento) e por um ponto exterior (o ponto **M**). Note que se determinaram diretamente as projeções da charneira do rebatimento (a reta \mathbf{e}), pois a reta \mathbf{e} é a reta de interseção entre dois planos projetantes. A projeção frontal (\mathbf{e}_2) está coincidente com o traço frontal do plano ν (\mathbf{f}_ν), pois o plano ν é um plano projetante frontal. A projeção horizontal da charneira (\mathbf{e}_1) está sobre a projeção horizontal do segmento de reta **[MN]**, pois o plano α é um plano projetante horizontal.

O ponto **N** é um ponto da charneira, pelo que é fixo – roda sobre si próprio. Assim, tem-se imediatamente $\mathbf{N}_r \equiv \mathbf{N}_1$. Falta-nos rebater o ponto **M**. O arco do rebatimento do ponto **M** está contido num plano vertical ortogonal à reta \mathbf{e} (que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção), pelo que o arco do rebatimento do ponto **M** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção. Assim, conduziu-se, por \mathbf{M}_1 , uma perpendicular à charneira – esta corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento de **M**. Sobre esta perpendicular representou-se a distância do ponto **M** ao plano ν (3 cm – a cota do ponto **M** em relação ao plano ν), determinando-se \mathbf{M}_r .

Por fim, desenhou-se o segmento de reta que tem extremos em \mathbf{M}_r e \mathbf{N}_r – o segmento de reta **[M_rN_r]** é o segmento de reta **[MN]** rebatido e situa-se no plano ν (que é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que está em verdadeira grandeza. $\overline{M_r N_r}$ é a verdadeira grandeza da distância entre os dois pontos, o que se identificou no desenho.

Traçado:

O eixo **X** representa-se igualmente a **médio** (é a linha estruturante do exercício). As projeções do segmento de reta representaram-se a **médio-forte**, pois integram o pedido (são pedidas também as projeções da distância). O segmento de reta **[M_rN_r]** representou-se a **forte**, pois é a parte final do que é pedido – é em $\overline{M_r N_r}$ que está a verdadeira grandeza da distância entre os dois pontos. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas auxiliares (caso do traço frontal do plano ν) ou são linhas de chamada.

75.

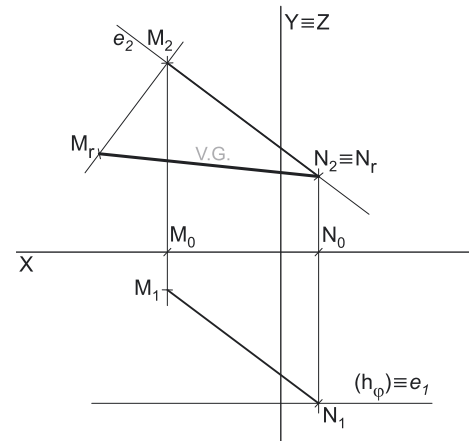
Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **M** e **N** pelas respectivas projeções, em função dos dados.

Resolução:

Em seguida, desenharam-se as duas projeções do segmento de reta **[MN]**, que é o segmento representativo da distância entre os dois pontos. O segmento de reta **[MN]** não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o segmento não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do segmento apresentam deformação), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

O enunciado refere expressamente que o processo geométrico auxiliar a utilizar é o do rebatimento do plano projetante frontal do segmento para o plano frontal (de frente) que contém o ponto **N**. Nesse sentido, conduziu-se, pela projeção horizontal do ponto **N** (N_1) o traço horizontal do plano φ (o plano frontal que contém o ponto **N**). Em seguida, representou-se o plano projetante frontal do segmento **[MN]** (o plano α) – o plano está definido por uma reta (a charneira do rebatimento) e por um ponto exterior (o ponto **M**). Note que se determinaram diretamente as projeções da charneira do rebatimento (a reta **e**), pois a reta **e** é a reta de interseção entre dois planos projetantes. A projeção horizontal (e_1) está coincidente com o traço horizontal do plano φ (h_φ), pois o plano φ é um plano projetante horizontal. A projeção frontal da charneira (e_2) está sobre a projeção frontal do segmento de reta **[MN]**, pois o plano α é um plano projetante frontal.



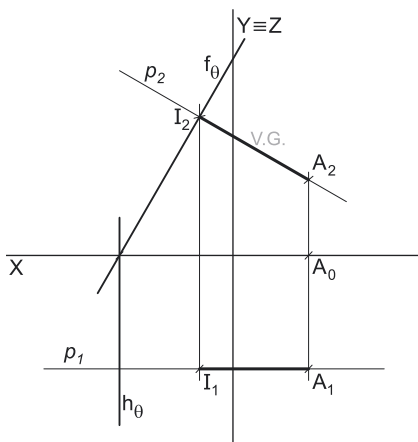
O ponto **N** é um ponto da charneira, pelo que é fixo – roda sobre si próprio. Assim, tem-se imediatamente $N_r \equiv N_2$. Falta-nos rebater o ponto **M**. O arco do rebatimento do ponto **M** está contido num plano vertical ortogonal à reta **e** (que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção), pelo que o arco do rebatimento do ponto **M** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção. Assim, conduziu-se, por M_2 , uma perpendicular à charneira – esta corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento de **M**. Sobre esta perpendicular representou-se a distância do ponto **M** ao plano φ (3 cm – o afastamento do ponto **M** em relação ao plano φ), determinando-se M_r .

Por fim, desenhou-se o segmento de reta que tem extremos em M_r e N_r – o segmento de reta **[M_rN_r]** é o segmento de reta **[MN]** rebatido e situa-se no plano φ (que é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que está em verdadeira grandeza. M_rN_r é a verdadeira grandeza da distância entre os dois pontos, o que se identificou no desenho.

Traçado:

O eixo **X** representa-se igualmente a **médio** (é a linha estruturante do exercício). As projeções do segmento de reta representaram-se a **médio-forte**, pois integram o pedido (são pedidas também as projeções da distância). O segmento de reta **[M_rN_r]** representou-se a **forte**, pois é a parte final do que é pedido – é em M_rN_r , que está a verdadeira grandeza da distância entre os dois pontos. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas auxiliares (caso do traço horizontal do plano φ) ou são linhas de chamada.

76.



Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o plano θ , pelos seus traços, bem como o ponto **A**, pelas suas projeções, em função dos dados.

Resolução:

A resolução do exercício passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a planos**, que se executa em três etapas: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se o ponto de interseção entre a reta e o plano dado; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto ao plano.

Etapa 1. Pelo ponto **A** conduziu-se uma reta **p**, ortogonal ao plano θ . A reta **p** é uma reta frontal (de frente), cujas projeções são perpendiculares aos traços homónimos do plano θ . A reta **p** verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos**, pois é ortogonal a duas retas concorrentes do plano θ (os traços do plano).

Etapa 2. Determina-se o ponto de interseção da reta **p** com o plano θ . O plano θ é um plano projetante frontal, pelo que o ponto de interseção entre a reta **p** e o plano θ (ponto **I**) determinou-se de forma direta, a partir da sua projeção frontal (I_2).

Etapa 3. A distância entre os dois pontos é a distância do ponto **A** ao plano θ . A partir das projeções dos pontos **A** e **I**, desenharam-se as projeções do segmento **[AI]**. O segmento **[AI]** é segmento representativo da distância do ponto **A** ao plano θ .

O segmento de reta **[AI]** é paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pelo que o segmento de reta se projeta em verdadeira grandeza em projeção frontal – a verdadeira grandeza da distância do ponto **A** ao plano θ está na projeção frontal do segmento de reta **[AI]**. A_2I_2 é, assim, a verdadeira grandeza da distância do ponto **A** ao plano θ , o que se identificou no desenho.

Traçado:

Os dados (os traços do plano θ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso da reta **p**), representaram-se a **leve**.

77.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o plano v , pelo seu traço frontal, bem como o ponto P , pelas suas projeções, em função dos dados. O plano v não tem traço horizontal, pelo que o seu traço frontal se identificou com o recurso a parêntesis.

Resolução:

A resolução do exercício passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a planos**, que se executa em três etapas: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se o ponto de interseção entre a reta e o plano dado; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto ao plano.

Etapa 1. Pelo ponto P conduziu-se uma reta p , ortogonal ao plano v . A reta p é uma reta vertical. A reta p verifica o **Crítério de ortogonalidade entre retas e planos**, pois é ortogonal a duas retas concorrentes do plano (quaisquer duas retas do plano).

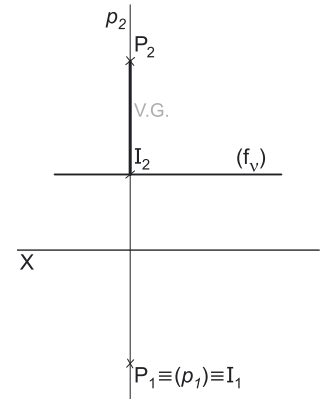
Etapa 2. Determina-se o ponto de interseção da reta p com o plano v . Trata-se da interseção entre uma reta projetante horizontal e um plano projetante frontal, pelo que o ponto I (o ponto de interseção) tem determinação direta. A reta p é uma reta projetante horizontal, pelo que a projeção horizontal do ponto I (I_1) se determinou de forma direta. De forma semelhante, atendendo a que o plano v é um plano projetante frontal, a projeção frontal do ponto I (I_2) determinou-se igualmente de forma direta.

Etapa 3. A distância entre os dois pontos é a distância do ponto P ao plano v . A partir das projeções dos pontos P e I , desenharam-se as projeções do segmento $[PI]$ (a sua projeção horizontal é um ponto). O segmento $[PI]$ é segmento representativo da distância do ponto P ao plano v .

O segmento de reta $[PI]$ é paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pelo que o segmento de reta se projeta em verdadeira grandeza em projeção frontal – a verdadeira grandeza da distância do ponto P ao plano v está na projeção frontal do segmento de reta $[PI]$. $\overline{P_2I_2}$ é, assim, a verdadeira grandeza da distância do ponto P ao plano v , o que se identificou no desenho.

Traçado:

Os dados (o traço frontal do plano v) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso da reta p), representaram-se a **leve**.



78.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o plano φ , pelo seu traço horizontal, bem como o ponto T , pelas suas projeções, em função dos dados. O plano φ não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal se identificou com o recurso a parêntesis.

Resolução:

A resolução do exercício passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a planos**, que se executa em três etapas: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se o ponto de interseção entre a reta e o plano dado; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto ao plano.

Etapa 1. Pelo ponto T conduziu-se uma reta p , ortogonal ao plano φ . A reta p é uma reta de topo. A reta p verifica o **Crítério de ortogonalidade entre retas e planos**, pois é ortogonal a duas retas concorrentes do plano (quaisquer duas retas do plano).

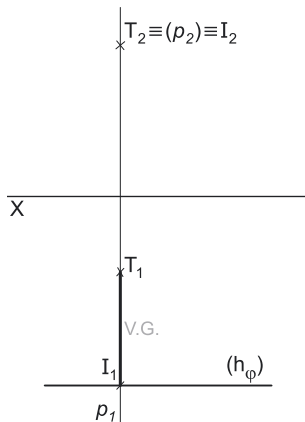
Etapa 2. Determina-se o ponto de interseção da reta p com o plano φ . Trata-se da interseção entre uma reta projetante frontal e um plano projetante horizontal, pelo que o ponto I (o ponto de interseção) tem determinação direta. A reta p é uma reta projetante frontal, pelo que a projeção frontal do ponto I (I_2) se determinou de forma direta. De forma semelhante, atendendo a que o plano φ é um plano projetante horizontal, a projeção horizontal do ponto I (I_2) determinou-se igualmente de forma direta.

Etapa 3. A distância entre os dois pontos é a distância do ponto T ao plano φ . A partir das projeções dos pontos T e I , desenharam-se as projeções do segmento $[TI]$ (a sua projeção frontal é um ponto). O segmento $[TI]$ é segmento representativo da distância do ponto T ao plano φ .

O segmento de reta $[TI]$ é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que o segmento de reta se projeta em verdadeira grandeza em projeção horizontal – a verdadeira grandeza da distância do ponto T ao plano φ está na projeção horizontal do segmento de reta $[TI]$. $\overline{T_1I_1}$ é, assim, a verdadeira grandeza da distância do ponto T ao plano φ , o que se identificou no desenho.

Traçado:

Os dados (o traço horizontal do plano φ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso da reta p), representaram-se a **leve**.



79.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o plano γ , pelos seus traços, bem como o ponto M , pelas suas projeções, em função dos dados. O plano γ é um plano ortogonal a $\beta_{1/3}$, pelo que os seus traços são simétricos em relação ao eixo X .

Resolução:

A resolução do exercício passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a planos**, que se executa em três etapas: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se o ponto de interseção entre a reta e o plano dado; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto ao plano.

Etapla 1. Pelo ponto M conduziu-se uma reta p , ortogonal ao plano γ . A reta p é uma reta oblíqua, cujas projeções são perpendiculares aos traços homónimos do plano γ . A reta p verifica o **Crítério de ortogonalidade entre retas e planos**, pois é ortogonal a duas retas concorrentes do plano γ (os seus traços).

Etapla 2. Determina-se o ponto de interseção da reta p com o plano γ . Nem a reta p nem o plano γ são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**, que se executa em três etapas, a saber: **A.** conduz-se, pela reta, um plano auxiliar que a contenha; **B.** determina-se a reta de interseção do plano auxiliar com o plano dado; **C.** o ponto de concorrência das duas retas é o ponto de interseção da reta dada com o plano dado.

A. Assim, conduziu-se, pela reta p , o plano α , que é o plano projetante horizontal da reta p .

B. Em seguida, determinou-se a reta de interseção do plano α (o plano auxiliar) com o plano γ – a reta i . A reta i é a reta de interseção entre os dois planos e está definida por dois pontos – os pontos F e H (os seus traços nos planos de projeção).

C. O ponto de concorrência das retas p e i é o ponto de interseção da reta p com o plano γ – o ponto I .

Neste momento, com a determinação do ponto de interseção da reta p com o plano γ (o ponto I), foi concluída a **Etapla 2 do método geral da distância de pontos a planos**.

Etapla 3. A distância entre os dois pontos é a distância do ponto M ao plano γ . A partir das projeções dos pontos M e I , desenharam-se as projeções do segmento $[MI]$. O segmento $[MI]$ é segmento representativo da distância do ponto M ao plano γ .

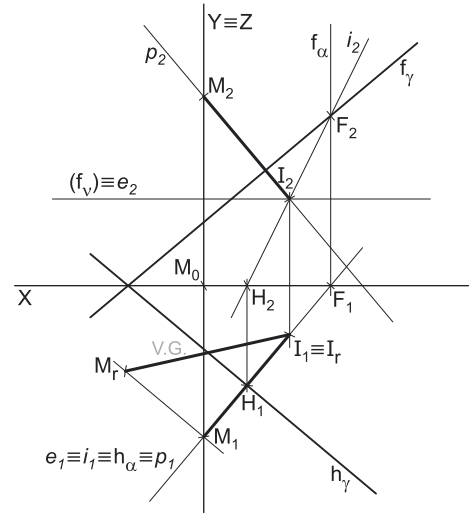
O segmento $[MI]$ não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pois é oblíquo a ambos os planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Para determinar a **verdadeira grandeza da distância** pretendida (que está deformada em ambos os planos de projeção), optou-se por rebater o plano α (o plano projetante horizontal de $[MI]$) para o plano horizontal (de nível) v que contém o ponto I (cujo traço frontal se desenhou imediatamente, passando por I_2). Para tal, determinaram-se as projeções da charneira do rebatimento (a reta e), o que se processou de forma direta. A projeção frontal (e_2) está coincidente com o traço frontal do plano v (f_v), pois o plano v é um plano projetante frontal. A projeção horizontal da charneira (e_1) está coincidente com o traço horizontal do plano α (h_α), pois o plano α é um plano projetante horizontal.

O ponto I é um ponto da charneira, pelo que é fixo – roda sobre si próprio. Assim, tem-se imediatamente $I_r \equiv I_1$. Falta-nos rebater o ponto M . O arco do rebatimento do ponto M está contido num plano vertical ortogonal à reta e (que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção), pelo que o arco do rebatimento do ponto M não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção. Assim, conduziu-se, por M_1 , uma perpendicular à charneira – esta corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento de M . Sobre esta perpendicular representou-se a distância do ponto M ao plano v (a cota de M em relação a v), determinando-se M_r .

Por fim, desenhou-se o segmento de reta que tem extremos em M_r e I_r – o segmento de reta $[M_r I_r]$ é o segmento de reta $[MI]$ rebatido e situa-se no plano v (que é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que está em verdadeira grandeza. $\overline{M_r I_r}$ é a verdadeira grandeza da distância do ponto M ao plano γ , o que se identificou no desenho.

Traçado:

Os dados (os traços do plano γ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso da reta p , do plano α ou, ainda, da reta i), representaram-se a **leve**.



80.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o plano α , pelos seus traços, bem como o ponto P , pelas suas projeções, em função dos dados.

Resolução:

A resolução do exercício passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a planos**, que se executa em três etapas: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se o ponto de interseção entre a reta e o plano dado; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto ao plano.

Etapa 1. Pelo ponto P conduziu-se uma reta p , ortogonal ao plano α . A reta p é uma reta oblíqua, cujas projeções são perpendiculares aos traços homónimos do plano α . A reta p verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos**, pois é ortogonal a duas retas concorrentes do plano α (os seus traços).

Etapa 2. Determina-se o ponto de interseção da reta p com o plano α . Nem a reta p nem o plano α são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos** que se executa em três etapas, a saber: **A.** conduz-se, pela reta, um plano auxiliar que a contenha; **B.** determina-se a reta de interseção do plano auxiliar com o plano dado; **C.** o ponto de concorrência das duas retas é o ponto de interseção da reta dada com o plano dado.

- A.** Assim, conduziu-se, pela reta p , o plano θ , que é o plano projetante frontal da reta p .
B. Em seguida, determinou-se a reta de interseção do plano θ (o plano auxiliar) com o plano α – a reta i . A reta i é a reta de interseção entre os dois planos e está definida por dois pontos – os pontos F e H (os seus traços nos planos de projeção).
C. O ponto de concorrência das retas p e i é o ponto de interseção da reta p com o plano α – o ponto I .

Neste momento, com a determinação do ponto de interseção da reta p com o plano α (o ponto I), foi concluída a **Etapa 2 do método geral da distância de pontos a planos**.

Etapa 3. A distância entre os dois pontos é a distância do ponto P ao plano α . A partir das projeções dos pontos P e I , desenharam-se as projeções do segmento $[PI]$. O segmento $[PI]$ é segmento representativo da distância do ponto P ao plano α .

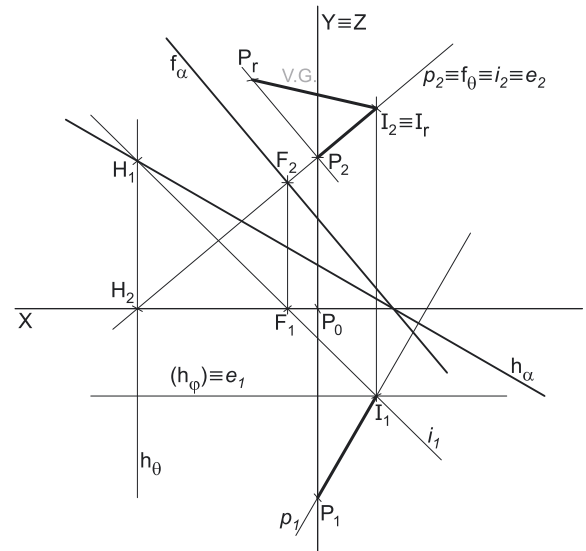
O segmento $[PI]$ não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pois é oblíquo a ambos os planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Para determinar a **verdadeira grandeza da distância** pretendida (que está deformada em ambos os planos de projeção), optou-se por rebater o plano θ (o plano projetante frontal de $[PI]$) para o plano frontal (de frente) φ que contém o ponto I (cujo traço horizontal se desenhou imediatamente, passando por I_1). Para tal, determinaram-se as projeções da charneira do rebatimento (a reta e), o que se processou de forma direta. A projeção frontal (e_2) está coincidente com o traço frontal do plano θ (f_θ), pois o plano θ é um plano projetante frontal. A projeção horizontal da charneira (e_1) está coincidente com o traço horizontal do plano φ (h_φ), pois o plano φ é um plano projetante horizontal.

O ponto I é um ponto da charneira, pelo que é fixo – roda sobre si próprio. Assim, tem-se imediatamente $I_r \equiv I_2$. Falta-nos rebater o ponto P . O arco do rebatimento do ponto P está contido num plano de topo ortogonal à reta e (que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção), pelo que o arco do rebatimento do ponto P não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção. Assim, conduziu-se, por P_2 , uma perpendicular à charneira – esta corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento de P . Sobre esta perpendicular representou-se a distância do ponto P ao plano φ (o afastamento de P em relação a φ), determinando-se P_r .

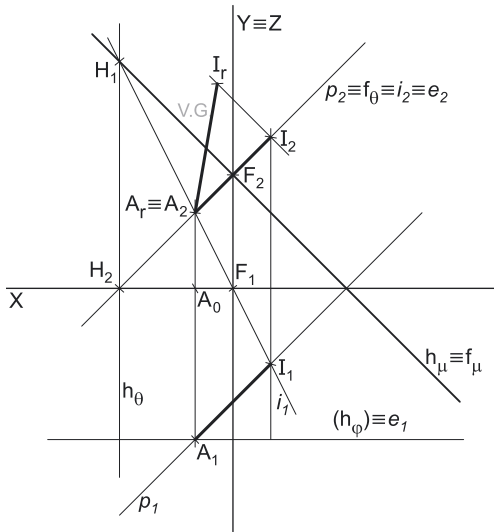
Por fim, desenhou-se o segmento de reta que tem extremos em P_r e I_r – o segmento de reta $[P_r I_r]$ é o segmento de reta $[PI]$ rebatido e situa-se no plano φ (que é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que está em verdadeira grandeza. $\overline{P_r I_r}$ é a verdadeira grandeza da distância do ponto P ao plano α , o que se identificou no desenho.

Traçado:

Os dados (os traços do plano α) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso da reta p , do plano θ ou, ainda, da reta i), representaram-se a **leve**.



81.



Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o plano μ , pelos seus traços, bem como o ponto **A**, pelas suas projeções, em função dos dados. O plano μ é um plano ortogonal ao $\beta_{2/4}$, pelo que tem os seus traços coincidentes.

Resolução:

A resolução do exercício passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a planos**, que se executa em três etapas: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se o ponto de interseção entre a reta e o plano dado; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto ao plano.

Etapa 1. Pelo ponto **A** conduziu-se uma reta **p**, ortogonal ao plano μ . A reta **p** é uma reta oblíqua, cujas projeções são perpendiculares aos traços homónimos do plano μ . A reta **p** verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos**, pois é ortogonal a duas retas concorrentes do plano μ (os seus traços).

Etapa 2. Determina-se o ponto de interseção da reta **p** com o plano μ . Nem a reta **p** nem o plano μ são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**, que se executa em três etapas, a saber: **A.** conduz-se, pela reta, um plano auxiliar que a contenha; **B.** determina-se a reta de interseção do plano auxiliar com o plano dado; **C.** o ponto de concorrência das duas retas é o ponto de interseção da reta dada com o plano dado.

A. Assim, conduziu-se, pela reta **p**, o plano θ , que é o plano projetante frontal da reta **p**.

B. Em seguida, determinou-se a reta de interseção do plano θ (o plano auxiliar) com o plano μ – a reta **i**. A reta **i** é a reta de interseção entre os dois planos e está definida por dois pontos – os pontos **F** e **H** (os seus traços nos planos de projeção).

C. O ponto de concorrência das retas **p** e **i** é o ponto de interseção da reta **p** com o plano μ – o ponto **I**.

Neste momento, com a determinação do ponto de interseção da reta **p** com o plano μ (o ponto **I**), foi concluída a **Etapa 2** do **método geral da distância de pontos a planos**.

Etapa 3. A distância entre os dois pontos é a distância do ponto **A** ao plano μ . A partir das projeções dos pontos **A** e **I**, desenharam-se as projeções do segmento **[AI]**. O segmento **[AI]** é segmento representativo da distância do ponto **A** ao plano μ .

O segmento **[AI]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pois é oblíquo a ambos os planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Para determinar a **verdadeira grandeza da distância** pretendida (que está deformada em ambos os planos de projeção), optou-se por rebater o plano θ (o plano projetante frontal de **[AI]**) para o plano frontal (de frente) ϕ que contém o ponto **A** (cujo traço horizontal se desenhou imediatamente, passando por **A1**). Para tal, determinaram-se as projeções da charneira do rebatimento (a reta **e**), o que se processou de forma direta. A projeção frontal (**e2**) está coincidente com o traço frontal do plano θ (**f0**), pois o plano θ é um plano projetante frontal. A projeção horizontal da charneira (**e1**) está coincidente com o traço horizontal do plano ϕ (**h0**), pois o plano ϕ é um plano projetante horizontal.

O ponto **A** é um ponto da charneira, pelo que é fixo – roda sobre si próprio. Assim, tem-se imediatamente **A_r ≡ A₂**. Falta-nos rebater o ponto **I**. O arco do rebatimento do ponto **I** está contido num plano de topo ortogonal à reta **e** (que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção), pelo que o arco do rebatimento do ponto **I** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção. Assim, conduziu-se, por **I₂**, uma perpendicular à charneira – esta corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento de **I**. Sobre esta perpendicular representou-se a distância do ponto **I** ao plano ϕ (o afastamento de **I** em relação a ϕ), determinando-se **I_r**.

Por fim, desenhou-se o segmento de reta que tem extremos em **A_r** e **I_r** – o segmento de reta **[A_rI_r]** é o segmento de reta **[AI]** rebatido e situa-se no plano ϕ (que é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que está em verdadeira grandeza. **A_rI_r** é a verdadeira grandeza da distância do ponto **A** ao plano μ , o que se identificou no desenho.

Traçado:

Os dados (os traços do plano μ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso da reta **p**, do plano θ ou, ainda, da reta **i**), representaram-se a **leve**.

82.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o plano ρ , pelos seus traços, bem como o ponto A , pelas suas projeções, em função dos dados.

Resolução:

A resolução do exercício passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a planos**, que se executa em três etapas: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se o ponto de interseção entre a reta e o plano dado; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto ao plano.

Etapa 1. Pelo ponto A conduziu-se uma reta p , ortogonal ao plano ρ . A reta p é necessariamente uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de reversibilidade**. Por outro lado, a reta p ainda não verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos**, pois é ortogonal apenas a uma «família» de retas do plano – a «família» das retas fronto-horizontais.

Etapa 2. Determina-se o ponto de interseção da reta p com o plano ρ . Nem a reta p nem o plano ρ são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**, que se executa em três etapas, a saber: **A.** conduz-se, pela reta, um plano auxiliar que a contenha; **B.** determina-se a reta de interseção do plano auxiliar com o plano dado; **C.** o ponto de concorrência das duas retas é o ponto de interseção da reta dada com o plano dado.

A. Assim, conduziu-se, pela reta p , o plano π , que é o plano projetante da reta p – o plano π é um plano de perfil.

B. Em seguida, determinou-se a reta de interseção do plano π (o plano auxiliar) com o plano ρ – a reta i . A reta i é a reta de interseção entre os dois planos e está definida por dois pontos – os pontos F e H (os seus traços nos planos de projeção). Note que a reta i é também uma reta de perfil, cujas projeções não verificam, igualmente, o **Critério de Reversibilidade**.

C. O ponto de concorrência das retas p e i é o ponto de interseção da reta p com o plano ρ – o ponto I . Não é possível determinar diretamente o ponto de concorrência das retas p e i , pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. Optou-se pelo rebatimento do plano π para o Plano Frontal de Projeção – em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento, que é f_π (a reta e , que é o traço frontal do plano π). Em seguida, rebateram-se os traços da reta i , F e H – F_r e H_r , são os traços da reta i em rebatimento (a reta i_r está definida por dois pontos – os pontos F_r e H_r). O ponto A_r é o ponto A rebatido. Pelo ponto A_r conduziu-se reta p_r (a reta p rebatida), perpendicular à reta i_r , o que nos garante a ortogonalidade entre a reta p e o plano ρ – a reta p_r é, agora, ortogonal a uma segunda «família» de retas do plano ρ (a «família» das retas de perfil do plano ρ). A reta p_r já verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano ρ . Por fim, determinou-se, em rebatimento, o ponto I (o ponto de concorrência entre as retas p_r e i_r) – I_r . O ponto I é o ponto de concorrência da reta p com a reta i e é o ponto de interseção da reta p com o plano ρ .

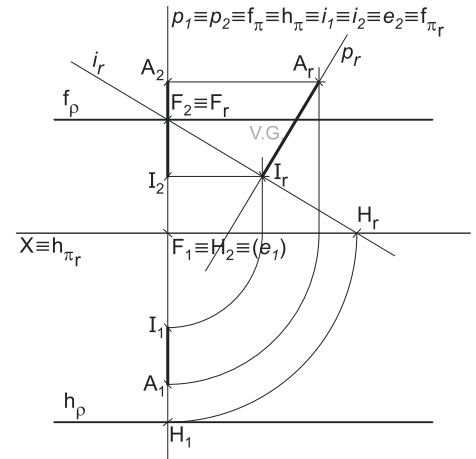
Neste momento, com a determinação do ponto de interseção da reta p com o plano ρ (o ponto I), foi concluída a **Etapa 2 do método geral da distância de pontos a planos**.

Etapa 3. A distância entre os dois pontos é a distância do ponto A ao plano ρ . Inverteu-se o rebatimento do ponto I (invertendo o rebatimento do plano π) e determinaram-se as suas projeções, o que nos permitiu desenhar as projeções do segmento $[AI]$. As projeções do segmento $[AI]$ são as projeções do segmento representativo da distância do ponto A ao plano ρ .

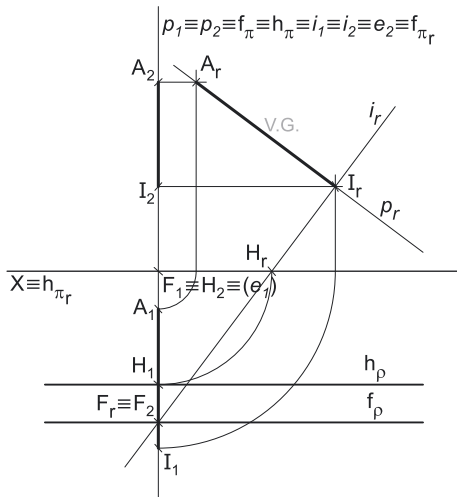
O segmento $[AI]$ não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pois é oblíquo a ambos os planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. No entanto, tendo em conta o rebatimento previamente efetuado (o rebatimento do plano π), observa-se que o segmento $[AI]$ está em verdadeira grandeza nesse rebatimento – a verdadeira grandeza da distância do ponto A ao plano ρ está no segmento $[A_r I_r]$ e foi devidamente assinalada no desenho.

Traçado:

Os dados (os traços do plano ρ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X , que é a linha estruturante do exercício. O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso da reta p , das projeções horizontais dos arcos do rebatimento, das retas p e i rebatidas, etc.), representaram-se a **leve**.



83.



Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o plano p , pelos seus traços, bem como o ponto A , pelas suas projeções, em função dos dados.

Resolução:

A resolução do exercício passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a planos**, que se executa em três etapas: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se o ponto de interseção entre a reta e o plano dado; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto ao plano.

Etapa 1. Pelo ponto A conduziu-se uma reta p , ortogonal ao plano p . A reta p é necessariamente uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de reversibilidade**. Por outro lado, a reta p ainda não verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos**, pois é ortogonal apenas a uma «família» de retas do plano – a «família» das retas fronto-horizontais.

Etapa 2. Determina-se o ponto de interseção da reta p com o plano p . Nem a reta p nem o plano p são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**, que se executa em três etapas, a saber: **A.** conduz-se, pela reta, um plano auxiliar que a contenha; **B.** determina-se a reta de interseção do plano auxiliar com o plano dado; **C.** o ponto de concorrência das duas retas é o ponto de interseção da reta dada com o plano dado.

- A.** Assim, conduziu-se, pela reta p , o plano π , que é o plano projetante da reta p – o plano π é um plano de perfil.
- B.** Em seguida, determinou-se a reta de interseção do plano π (o plano auxiliar) com o plano p – a reta i . A reta i é a reta de interseção entre os dois planos e está definida por dois pontos – os pontos F e H (os seus traços nos planos de projeção). Note que a reta i é também uma reta de perfil, cujas projeções não verificam, igualmente, o **Critério de Reversibilidade**.
- C.** O ponto de concorrência das retas p e i é o ponto de interseção da reta p com o plano p – o ponto I . Não é possível determinar diretamente o ponto de concorrência das retas p e i , pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. Optou-se pelo rebatimento do plano π para o Plano Frontal de Projeção – em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento, que é f_π (a reta e , que é o traço frontal do plano π). Em seguida, rebateram-se os traços da reta i , F e H – F_r e H_r são os traços da reta i em rebatimento (a reta i_r está definida por dois pontos – os pontos F_r e H_r). O ponto A_r é o ponto A rebatido. Pelo ponto A_r conduziu-se a reta p_r (a reta p rebatida), perpendicular à reta i_r , o que nos garante a ortogonalidade entre a reta p e o plano p – a reta p_r é, agora, ortogonal a uma segunda «família» de retas do plano p (a «família» das retas de perfil do plano p). A reta p_r já verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano p . Por fim, determinou-se, em rebatimento, o ponto I (o ponto de concorrência entre as retas p_r e i_r) – I_r . O ponto I é o ponto de concorrência da reta p com a reta i e é o ponto de interseção da reta p com o plano p .

Neste momento, com a determinação do ponto de interseção da reta p com o plano p (o ponto I), foi concluída a **Etapa 2** do **método geral da distância de pontos a planos**.

Etapa 3. A distância entre os dois pontos é a distância do ponto A ao plano p . Inverteu-se o rebatimento do ponto I (invertendo o rebatimento do plano π) e determinaram-se as suas projeções, o que nos permitiu desenhar as projeções do segmento $[AI]$. As projeções do segmento $[AI]$ são as projeções do segmento representativo da distância do ponto A ao plano p .

O segmento $[AI]$ não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pois é oblíquo a ambos os planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. No entanto, tendo em conta o rebatimento previamente efetuado (o rebatimento do plano π), observa-se que o segmento $[AI]$ está em verdadeira grandeza nesse rebatimento – a verdadeira grandeza da distância do ponto A ao plano p está no segmento $[A_r I_r]$ e foi devidamente assinalada no desenho.

Traçado:

Os dados (os traços do plano p) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X , que é a linha estruturante do exercício. O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso da reta p , das projeções horizontais dos arcos do rebatimento, das retas p e i rebatidas, etc.), representaram-se a **leve**.

84.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o plano ρ , bem como o ponto P , pelas suas projeções, em função dos dados. O plano ρ está definido pelo eixo X (onde se situam os seus traços, pois é um plano passante) e pelo ponto A (um ponto exterior ao eixo X), cujas projeções se determinaram em função das suas coordenadas.

Resolução:

A resolução do exercício passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a planos**, que se executa em três etapas: 1. conduz-se, pelo ponto, uma reta ortogonal ao plano dado; 2. determina-se o ponto de interseção entre a reta e o plano dado; 3. a distância entre os dois pontos é a distância do ponto ao plano.

Etapla 1. Pelo ponto P conduziu-se uma reta p , ortogonal ao plano ρ . A reta p é necessariamente uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de reversibilidade**. Por outro lado, a reta p ainda não verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos**, pois é ortogonal apenas a uma «família» de retas do plano – a «família» das retas fronto-horizontais.

Etapla 2. Determina-se o ponto de interseção da reta p com o plano ρ . Nem a reta p nem o plano ρ são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**, que se executa em três etapas, a saber: **A.** conduz-se, pela reta, um plano auxiliar que a contenha; **B.** determina-se a reta de interseção do plano auxiliar com o plano dado; **C.** o ponto de concorrência das duas retas é o ponto de interseção da reta dada com o plano dado.

A. Assim, conduziu-se, pela reta p , o plano π , que é o plano projetante da reta p – o plano π é um plano de perfil.

B. Em seguida, determinou-se a reta de interseção do plano π (o plano auxiliar) com o plano ρ – a reta i . Para definir a reta i são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta i é necessariamente uma **reta de perfil passante**, pelo que já temos um ponto para definir a reta i – o seu ponto de concorrência com o eixo X . Falta-nos outro ponto ou uma direção, para definir a reta i . Os dados do plano ρ são insuficientes para definir a reta i , pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Recorreu-se à reta g , como reta auxiliar do plano ρ . A reta g está definida por um ponto (o ponto A , que é o ponto que define o plano ρ) e por uma direção (a direção das retas fronto-horizontais). Em seguida, determinou-se o ponto A' , que é o ponto de interseção da reta g com o plano π . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta i – o ponto A' . A reta i está definida por dois pontos – o ponto A' e o seu ponto de concorrência com o eixo X . Salienta-se que a reta i é também uma reta de perfil, cujas projeções não verificam, igualmente, o **Critério de Reversibilidade**.

C. O ponto de concorrência das retas p e i é o ponto de interseção da reta p com o plano ρ – o ponto I . Não é possível determinar diretamente o ponto de concorrência das retas p e i , pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. Optou-se pelo rebatimento do plano π para o Plano Frontal de Projeção – em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento, que é f_π (a reta e , que é o traço frontal do plano π). Em seguida, rebatou-se o ponto A' – a reta i_r está definida por dois pontos (o ponto A'_r e o seu ponto de concorrência com o eixo X , que é um ponto fixo, pois é um ponto da charneira). O ponto P_r é o ponto P rebatido. Pelo ponto P_r conduziu-se a reta p_r (a reta p rebatida), perpendicular à reta i_r , o que nos garante a ortogonalidade entre a reta p e o plano ρ – a reta p_r é, agora, ortogonal a uma segunda «família» de retas do plano ρ (a «família» das retas de perfil do plano ρ). A reta p_r já verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao plano ρ . Por fim, determinou-se, em rebatimento, o ponto I_r (o ponto de concorrência entre as retas p_r e i_r) – I_r . O ponto I é o ponto de concorrência da reta p com a reta i e é o ponto de interseção da reta p com o plano ρ .

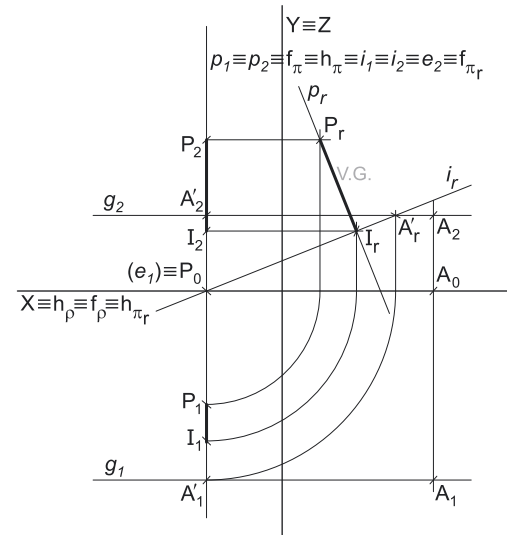
Neste momento, com a determinação do ponto de interseção da reta p com o plano ρ (o ponto I), foi concluída a **Etapla 2 do método geral da distância de pontos a planos**.

Etapla 3. A distância entre os dois pontos é a distância do ponto P ao plano ρ . Inverteu-se o rebatimento do ponto I (invertendo o rebatimento do plano π) e determinaram-se as suas projeções, o que nos permitiu desenhar as projeções do segmento $[PI]$. As projeções do segmento $[PI]$ são as projeções do segmento representativo da distância do ponto P ao plano ρ .

O segmento $[PI]$ não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pois é oblíquo a ambos os planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. No entanto, tendo em conta o rebatimento previamente efetuado (o rebatimento do plano π), observa-se que o segmento $[PI]$ está em verdadeira grandeza nesse rebatimento – a verdadeira grandeza da distância do ponto P ao plano ρ está no segmento $[P_r I_r]$ e foi devidamente assinalada no desenho.

Traçado:

Os dados (os traços do plano ρ , que se situam no eixo X) representaram-se a **médio**, que é a expressividade para o eixo X (a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso da reta p , das projeções horizontais dos arcos do rebatimento, das retas p e i rebatidas, etc.), representaram-se a **leve**.



85.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os planos α e γ , pelos respectivos traços, em função dos dados. Os dois planos, porque são paralelos, têm os seus traços horizontais paralelos entre si e têm, também, os seus traços frontais paralelos entre si (para que se verifique o **Critério de paralelismo entre planos**).

Resolução:

A resolução do exercício passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância entre dois planos paralelos**, que se executa em três etapas: **1.** conduz-se uma reta ortogonal aos dois planos; **2.** determinam-se os pontos de interseção entre a reta e os dois planos dados; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância entre os dois planos.

Etapa 1. Conduziu-se uma reta p , qualquer, ortogonal aos dois planos. A reta p é necessariamente uma reta horizontal (de nível), cujas projeções são perpendiculares aos traços homónimos dos dois planos. A reta p verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação aos dois planos, pois é ortogonal a duas retas concorrentes de qualquer dos dois planos (os seus traços).

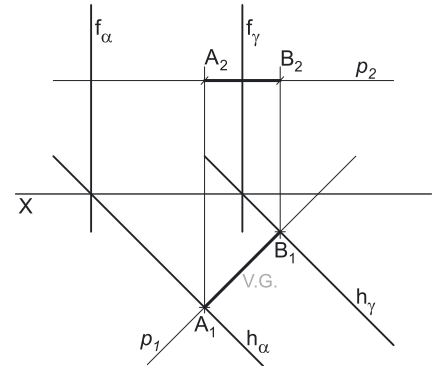
Etapa 2. Determinam-se os pontos de interseção da reta p com os dois planos. Os dois planos são projetantes horizontais, pelo que a determinação dos pontos de interseção da reta p com os dois planos é imediata, a partir das respetivas projeções horizontais. O ponto A é o ponto de interseção da reta p com o plano α . O ponto B é o ponto de interseção da reta p com o plano γ .

Etapa 3. A distância entre os dois pontos é a distância entre os dois planos. A partir das projeções dos pontos A e B , desenharam-se as projeções do segmento $[AB]$. O segmento $[AB]$ é segmento representativo da distância entre os dois planos.

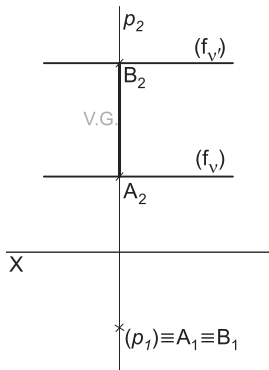
O segmento de reta $[AB]$ é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que o segmento de reta se projeta em verdadeira grandeza em projeção horizontal – a verdadeira grandeza da distância entre os dois planos está na projeção horizontal do segmento de reta $[AB]$. $\overline{A_1B_1}$ é a verdadeira grandeza da distância entre os dois planos, o que se identificou no desenho.

Traçado:

Os dados (os traços dos dois planos) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X , que é a linha estruturante do exercício. O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso da reta p), representaram-se a **leve**.



86.



Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os planos v e v' , pelos respetivos traços frontais, em função das respetivas cotas. Os planos v e v' não têm traço horizontal, pelo que os seus traços frontais se identificaram com o recurso a parêntesis.

Resolução:

A resolução do exercício, passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância entre dois planos paralelos**, que se executa em três etapas: **1.** conduz-se uma reta ortogonal aos dois planos; **2.** determinam-se os pontos de interseção entre a reta e os dois planos dados; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância entre os dois planos.

Etapa 1. Conduziu-se uma reta p , qualquer, ortogonal aos dois planos. A reta p é necessariamente uma reta vertical. A reta p verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação aos dois planos, pois é ortogonal a duas retas concorrentes de qualquer dos dois planos (quaisquer duas retas concorrentes de qualquer dos dois planos).

Etapa 2. Determinam-se os pontos de interseção da reta p com os dois planos. Os dois planos são projetantes frontais, pelo que a determinação dos pontos de interseção da reta p com os dois planos é imediata, a partir das respetivas projeções frontais. O ponto A é o ponto de interseção da reta p com o plano v . O ponto B é o ponto de interseção da reta p com o plano v' .

Etapa 3. A distância entre os dois pontos é a distância entre os dois planos. A partir das projeções dos pontos A e B , desenharam-se as projeções do segmento $[AB]$ (tendo em conta que a projeção horizontal do segmento se reduz a um ponto). O segmento $[AB]$ é segmento representativo da distância entre os dois planos.

O segmento de reta $[AB]$ é paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pelo que o segmento de reta se projeta em verdadeira grandeza em projeção frontal – a verdadeira grandeza da distância entre os dois planos está na projeção frontal do segmento de reta $[AB]$. $\overline{A_2B_2}$ é a verdadeira grandeza da distância entre os dois planos, o que se identificou no desenho.

Traçado:

Os dados (os traços frontais dos dois planos) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X , que é a linha estruturante do exercício. O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso da reta p), representaram-se a **leve**.

87.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os planos α e μ , pelos seus traços, em função dos dados. O plano α é ortogonal ao $\beta_{1/3}$, pelo que os seus traços são simétricos em relação ao eixo X . O plano μ é paralelo ao plano α , pelo que tem os seus traços paralelos aos traços homónimos do plano α , para que se verifique o **Critério de paralelismo entre planos**.

Resolução:

A resolução do exercício passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância entre dois planos paralelos**, que se executa em três etapas: **1.** conduz-se uma reta ortogonal aos dois planos; **2.** determinam-se os pontos de interseção entre a reta e os dois planos dados; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância entre os dois planos.

Etapa 1. Conduziu-se uma reta p , qualquer, ortogonal aos dois planos. A reta p é uma reta oblíqua, cujas projeções são perpendiculares aos traços homónimos dos dois planos. A reta p verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação aos dois planos, pois é ortogonal a duas retas concorrentes de qualquer dos dois planos (os seus traços).

Etapa 2. Determinam-se os pontos de interseção da reta p com os dois planos. Nem a reta p nem os planos dados são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**, que se executa em três etapas, a saber: **A.** conduz-se, pela reta, um plano auxiliar que a contenha; **B.** determina-se a reta de interseção do plano auxiliar com o plano dado; **C.** o ponto de concorrência das duas retas é o ponto de interseção da reta dada com o plano dado.

A. Assim, conduziu-se, pela reta p , o plano θ , que é o plano projetante frontal da reta p .

B. Em seguida, determinaram-se as retas de interseção do plano θ (o plano auxiliar) com os dois planos dados. A reta i é a reta de interseção do plano θ com o plano μ e está definida por dois pontos – os pontos F e H (os seus traços nos Planos de Projeção). A reta i' é a reta de interseção do plano θ (o plano auxiliar) com o plano α e está definida por um ponto (o ponto F' , o seu traço frontal) e uma direção (é paralela à reta \hat{i}).

C. O ponto de concorrência das retas p e i é o ponto de interseção da reta p com o plano μ – o ponto B . O ponto de concorrência das retas p e i' é o ponto de interseção da reta p com o plano α – o ponto A .

Neste momento, com a determinação dos pontos de interseção da reta p com os dois planos (os pontos A e B), foi concluída a **Etapa 2 do método geral da distância de pontos a planos**.

Etapa 3. A distância entre os dois pontos é a distância entre os dois planos. A partir das projeções dos pontos A e B , desenharam-se as projeções do segmento $[AB]$. O segmento $[AB]$ é um segmento representativo da distância entre os dois planos.

O segmento $[AB]$ é oblíquo aos dois Planos de Projeção, pelo que não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. Para determinar a **verdadeira grandeza da distância** pretendida (que está deformada em ambos os planos de projeção), optou-se por recorrer ao rebatimento do plano θ (o plano projetante frontal do segmento $[AB]$) para o plano frontal (de frente) φ que contém o ponto B .

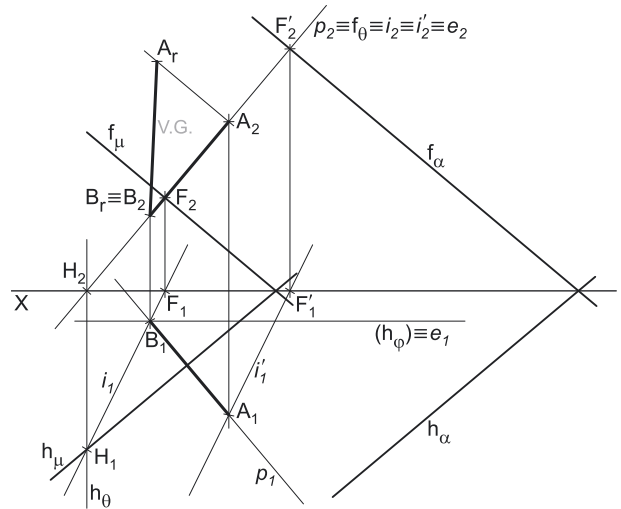
Identificou-se a charneira do rebatimento (reta e), cujas projeções se determinaram imediatamente, pois a reta e é a reta de interseção entre dois planos projetantes – a projeção horizontal (e_1) está coincidente com o traço horizontal do plano φ (h_φ), pois o plano φ é um plano projetante horizontal, e a projeção frontal da charneira (e_2) está coincidente com o traço frontal do plano α (f_α), pois o plano α é um plano projetante frontal.

O ponto B é um ponto da charneira, pelo que é fixo – roda sobre si próprio. Assim, tem-se imediatamente $B_2 \equiv B_r$. Falta-nos rebater o ponto A . Para tal, conduziu-se, por A_2 , uma perpendicular à charneira – esta corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto A . Sobre esta perpendicular representou-se a distância do ponto A ao plano φ (o afastamento do ponto A em relação ao plano φ), determinando-se A_r .

Por fim, desenhou-se o segmento de reta que tem extremos em A_r e B_r – o segmento de reta $[A_r B_r]$ é o segmento de reta $[AB]$ rebatido e situa-se no plano φ (que é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que está em verdadeira grandeza. $\overline{A_r B_r}$ é a verdadeira grandeza da distância entre os dois planos, o que se identificou no desenho.

Traçado:

Os dados (os traços dos dois planos) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X , que é a linha estruturante do exercício. O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das retas p e i , do plano θ ou do plano φ), representaram-se a **leve**.



88.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os planos θ e δ , pelos seus traços, em função dos dados. O plano δ é paralelo ao plano θ , pelo que tem os seus traços paralelos aos traços homónimos do plano θ , para que se verifique o **Critério de paralelismo entre planos**.

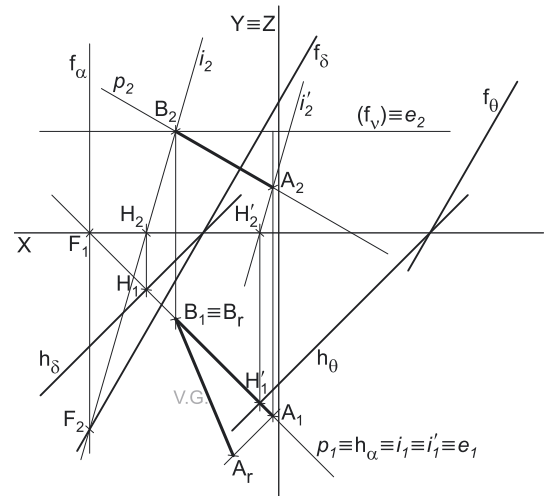
Resolução:

A resolução do exercício passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância entre dois planos paralelos**, que se executa em três etapas: **1.** conduz-se uma reta ortogonal aos dois planos; **2.** determinam-se os pontos de interseção entre a reta e os dois planos dados; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância entre os dois planos.

Etapla 1. Conduziu-se uma reta p , qualquer, ortogonal aos dois planos. A reta p é uma reta oblíqua, cujas projeções são perpendiculares aos traços homónimos dos dois planos. A reta p verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação aos dois planos, pois é ortogonal a duas retas concorrentes de qualquer dos dois planos (os seus traços).

Etapla 2. Determinam-se os pontos de interseção da reta p com os dois planos. Nem a reta p nem os planos dados são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**, que se executa em três etapas, a saber: **A.** conduz-se, pela reta, um plano auxiliar que a contenha; **B.** determina-se a reta de interseção do plano auxiliar com o plano dado; **C.** o ponto de concorrência das duas retas é o ponto de interseção da reta dada com o plano dado.

- A.** Assim, conduziu-se, pela reta p , o plano α , que é o plano projetante horizontal da reta p .
- B.** Em seguida, determinaram-se as retas de interseção do plano α com os dois planos dados. A reta i é a reta de interseção do plano α (o plano auxiliar) com o plano δ e está definida por dois pontos – os pontos **F** e **H** (os seus traços nos Planos de Projeção). A reta i' é a reta de interseção do plano α (o plano auxiliar) com o plano θ e está definida por um ponto (o ponto **H'**, o seu traço horizontal) e uma direção (é paralela à reta i).
- C.** O ponto de concorrência das retas p e i é o ponto de interseção da reta p com o plano δ – o ponto **B**. O ponto de concorrência das retas p e i' é o ponto de interseção da reta p com o plano θ – o ponto **A**.



Neste momento, com a determinação dos pontos de interseção da reta p com os dois planos (os pontos **A** e **B**), foi concluída a **Etapla 2** do **método geral da distância de pontos a planos**.

Etapla 3. A distância entre os dois pontos é a distância entre os dois planos. A partir das projeções dos pontos **A** e **B**, desenharam-se as projeções do segmento **[AB]**. O segmento **[AB]** é um segmento representativo da distância entre os dois planos.

O segmento **[AB]** é oblíquo aos dois Planos de Projeção, pelo que não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. Para determinar a **verdadeira grandeza da distância** pretendida (que está deformada em ambos os planos de projeção), optou-se por recorrer ao rebatimento do plano θ (o plano projetante frontal do segmento **[AB]**) para o plano horizontal (de nível) v que contém o ponto **B**.

Identificou-se a charneira do rebatimento (reta e), cujas projeções se determinaram imediatamente, pois a reta e é a reta de interseção entre dois planos projetantes – a projeção horizontal (e_1) está coincidente com o traço horizontal do plano α (h_α), pois o plano α é um plano projetante horizontal, e a projeção frontal da charneira (e_2) está coincidente com o traço frontal do plano v (f_v), pois o plano v é um plano projetante frontal.

O ponto **B** é um ponto da charneira, pelo que é fixo – roda sobre si próprio. Assim, tem-se imediatamente $B_1 \equiv B_r$. Falta-nos rebater o ponto **A**. Para tal, conduziu-se, por A_1 , uma perpendicular à charneira – esta corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **A**. Sobre esta perpendicular representou-se a distância do ponto **A** ao plano v (a cota do ponto **A** em relação ao plano v), determinando-se A_r .

Por fim, desenhou-se o segmento de reta que tem extremos em A_r e B_r – o segmento de reta $[A_r B_r]$ é o segmento de reta **[AB]** rebatido e situa-se no plano v (que é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que está em verdadeira grandeza. $\overline{A_r B_r}$ é a verdadeira grandeza da distância entre os dois planos, o que se identificou no desenho.

Traçado:

Os dados (os traços dos dois planos) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício. O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das retas p e i , do plano α ou do plano v), representaram-se a **leve**.

89.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os planos α e δ , pelos seus traços, em função dos dados. Os planos são ortogonais ao $\beta_{2/4}$, pelo que têm os seus traços coincidentes (planos ortogonais ao $\beta_{2/4}$, têm os seus traços coincidentes). Os planos α e δ são paralelos, pelo que têm os traços homónimos paralelos entre si, para que se verifique o **CrITÉrio de paralelismo entre planos**.

Resolução:

A resolução do exercício passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância entre dois planos paralelos**, que se executa em três etapas: **1.** conduz-se uma reta ortogonal aos dois planos; **2.** determinam-se os pontos de interseção entre a reta e os dois planos dados; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância entre os dois planos.

Etapla 1. Conduziu-se uma reta p , qualquer, ortogonal aos dois planos. A reta p é uma reta oblíqua, cujas projeções são perpendiculares aos traços homónimos dos dois planos. A reta p verifica o **CrITÉrio de ortogonalidade entre retas e planos** em relação aos dois planos, pois é ortogonal a duas retas concorrentes de qualquer dos dois planos (os seus traços).

Etapla 2. Determinam-se os pontos de interseção da reta p com os dois planos. Nem a reta p nem os planos dados são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**, que se executa em três etapas, a saber: **A.** conduz-se, pela reta, um plano auxiliar que a contenha; **B.** determina-se a reta de interseção do plano auxiliar com o plano dado; **C.** o ponto de concorrência das duas retas é o ponto de interseção da reta dada com o plano dado.

A. Assim, conduziu-se, pela reta p , o plano γ , que é o plano projetante horizontal da reta p .

B. Em seguida, determinaram-se as retas de interseção do plano α com os dois planos dados. A reta i é a reta de interseção do plano γ (o plano auxiliar) com o plano α e está definida por dois pontos – os pontos **F** e **H** (os seus traços nos Planos de Projeção). A reta i' é a reta de interseção do plano γ (o plano auxiliar) com o plano δ e está definida por um ponto (o ponto **H'**, o seu traço horizontal) e uma direção (é paralela à reta i).

C. O ponto de concorrência das retas p e i é o ponto de interseção da reta p com o plano α – o ponto **A**. O ponto de concorrência das retas p e i' é o ponto de interseção da reta p com o plano δ – o ponto **B**.

Neste momento, com a determinação dos pontos de interseção da reta p com os dois planos (os pontos **A** e **B**), foi concluída a **Etapla 2 do método geral da distância de pontos a planos**.

Etapla 3. A distância entre os dois pontos é a distância entre os dois planos. A partir das projeções dos pontos **A** e **B** desenharam-se as projeções do segmento **[AB]**. O segmento **[AB]** é um segmento representativo da distância entre os dois planos

O segmento **[AB]** é oblíquo aos dois Planos de Projeção, pelo que não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. Para determinar a **verdadeira grandeza da distância** pretendida (que está deformada em ambos os planos de projeção) optou-se por recorrer ao rebatimento do plano γ (o plano projetante horizontal do segmento **[AB]**) para o plano horizontal (de nível) v que contém o ponto **B**.

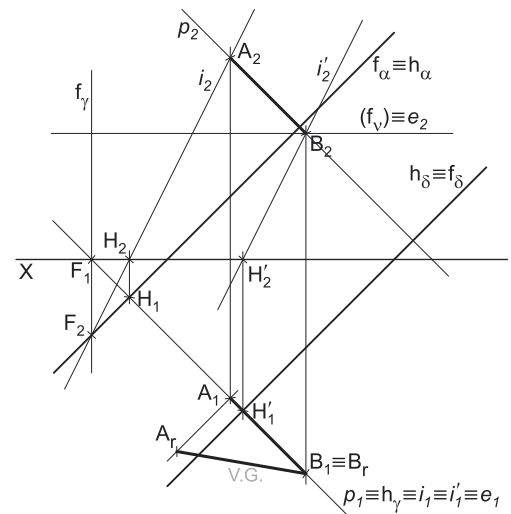
Identificou-se a charneira do rebatimento (reta e), cujas projeções se determinaram imediatamente, pois a reta e é a reta de interseção entre dois planos projetantes – a projeção horizontal (e_1) está coincidente com o traço horizontal do plano γ (h_γ), pois o plano γ é um plano projetante horizontal, e a projeção frontal da charneira (e_2) está coincidente com o traço frontal do plano v (f_v), pois o plano v é um plano projetante frontal.

O ponto **B** é um ponto da charneira, pelo que é fixo – roda sobre si próprio. Assim, tem-se imediatamente $B_1 \equiv B_r$. Falta-nos rebater o ponto **A**. Para tal conduziu-se, por A_1 , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **A**). Sobre esta perpendicular à charneira representou-se a distância do ponto **A** ao plano v (a cota do ponto **A** em relação ao plano v), determinando-se A_r .

Por fim, desenhou-se o segmento de reta que tem extremos em A_r e B_r – o segmento de reta $[A_r B_r]$ é o segmento de reta **[AB]** rebatido e situa-se no plano v (que é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que está em verdadeira grandeza. $\overline{A_r B_r}$ é a verdadeira grandeza da distância entre os dois planos, o que se identificou no desenho.

Traçado:

Os dados (os traços dos dois planos) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício. O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das retas p e i , do plano γ ou do plano v), representaram-se a **leve**.



90.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os planos ρ e σ , pelos seus traços, em função dos dados. Os planos são paralelos ao $\beta_{2/4}$, pelo que são ortogonais ao $\beta_{1/3}$ – nesse sentido os dois planos têm os seus traços simétricos em relação ao eixo X (planos ortogonais ao $\beta_{1/3}$ têm os seus traços simétricos em relação ao eixo X).

Resolução:

A resolução do exercício passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância entre dois planos paralelos**, que se executa em três etapas: **1.** conduz-se uma reta ortogonal aos dois planos; **2.** determinam-se os pontos de interseção entre a reta e os dois planos dados; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância entre os dois planos.

Etapa 1. Conduziu-se uma reta p , qualquer, ortogonal aos dois planos. A reta p é uma reta de perfil, cujas projeções são se desenham imediatamente. A reta p é necessariamente uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de reversibilidade**. Por outro lado, a reta p ainda não verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos**, pois é ortogonal apenas a uma «família» de retas dos planos – a «família» das retas fronto-horizontais.

Etapa 2. Determinam-se os pontos de interseção da reta p com os dois planos. Nem a reta p nem os planos dados são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**, que se executa em três etapas, a saber: **A.** conduz-se, pela reta, um plano auxiliar que a contenha; **B.** determina-se a reta de interseção do plano auxiliar com o plano dado; **C.** o ponto de concorrência das duas retas é o ponto de interseção da reta dada com o plano dado.

A. Assim, conduziu-se, pela reta p , o plano π , que é o plano projetante da reta p – o plano π é um plano de perfil.

B. Em seguida, determinaram-se as retas de interseção do plano α com os dois planos dados. A reta i é a reta de interseção do plano π (o plano auxiliar) com o plano ρ e está definida por dois pontos – os pontos F e H (os seus traços nos Planos de Projeção). A reta i' é a reta de interseção do plano π (o plano auxiliar) com o plano σ e está igualmente definida por dois pontos – os pontos F' e H' (os seus traços nos Planos de Projeção). Salienta-se que as retas i e i' são também retas de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**, tal como referido para a reta p .

C. O ponto de concorrência das retas p e i é o ponto de interseção da reta p com o plano ρ – o ponto A . O ponto de concorrência das retas p e i' é o ponto de interseção da reta p com o plano σ – o ponto B . Não é possível determinar diretamente qualquer dos pontos A e B , pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. Optou-se pelo rebatimento do plano π para o Plano Horizontal de Projeção – em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento, que é h_π (a reta e , que é o traço horizontal do plano π). Em seguida, rebateu-se o ponto F (o traço frontal da reta i), determinando-se F_r . O ponto H (o traço horizontal da reta i) é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente $H_r \equiv H_1$. A reta i_r está definida por dois pontos – os pontos F_r e H_r . Depois rebateu-se o ponto F' (o traço frontal da reta i'), determinando-se F'_r . O ponto H' (o traço horizontal da reta i') é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente $H'_r \equiv H'_1$. A reta i'_r está definida por dois pontos – os pontos F'_r e H'_r . Em seguida, desenhou-se a reta p_r (a reta p rebatida), perpendicular às retas i_r e i'_r , o que nos garante a ortogonalidade entre a reta p e os planos ρ e σ – a reta p_r é, agora, ortogonal a uma segunda «família» de retas dos dois planos (a «família» das retas de perfil dos dois planos). A reta p_r já verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação aos dois planos de rampa. Por fim, determinou-se, em rebatimento, os pontos A_r e B_r , respetivamente. O ponto A_r é o ponto de concorrência da reta p_r com a reta i_r e é o ponto de interseção da reta p com o plano ρ . O ponto B_r é o ponto de concorrência da reta p_r com a reta i'_r e é o ponto de interseção da reta p com o plano σ .

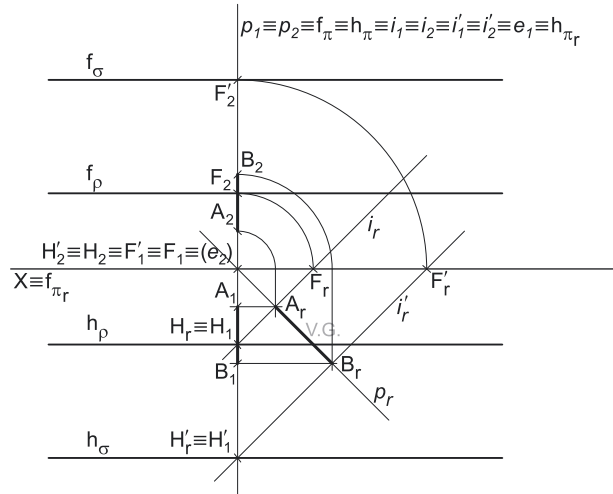
Neste momento, com a determinação dos pontos de interseção da reta p com os dois planos (os pontos A e B), foi concluída a **Etapa 2 do método geral da distância entre dois planos paralelos**.

Etapa 3. A distância entre os dois pontos é a distância entre os dois planos. A partir das projeções dos pontos A e B desenharam-se as projeções do segmento $[AB]$. O segmento $[AB]$ é um segmento representativo da distância entre os dois planos e é um segmento de reta de perfil.

O segmento $[AB]$ é oblíquo aos dois Planos de Projeção, pelo que não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. No entanto, tendo em conta o rebatimento previamente efetuado (o rebatimento do plano π), observa-se que o segmento $[AB]$ está em verdadeira grandeza nesse rebatimento – a verdadeira grandeza da distância entre os planos ρ e σ está no segmento $[A_r B_r]$, e foi devidamente assinalada no desenho.

Traçado:

Os dados (os traços dos dois planos) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X , que é a linha estruturante do exercício. O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares – caso das retas p , i e i' (em projeções e em rebatimento), do plano π , bem como dos traçados necessários ao rebatimento do plano π .



91.

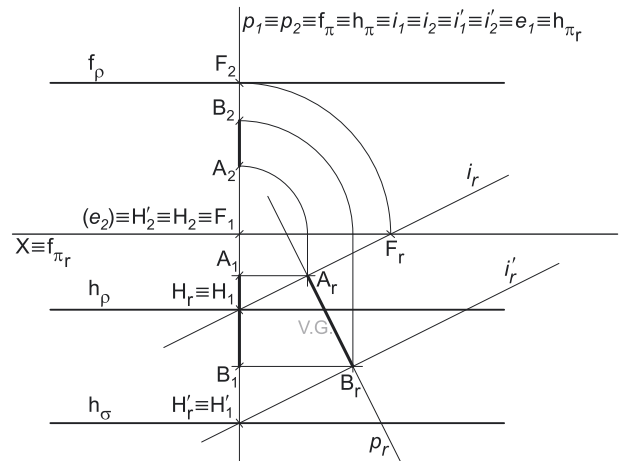
Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano p , pelos seus traços, e o plano σ , pelo seu traço horizontal, em função dos dados. Os dois planos são paralelos, pelo que o plano σ está definido por uma reta (o seu traço horizontal) e a sua orientação (é paralelo ao plano p).

Resolução:

A resolução do exercício passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância entre dois planos paralelos**, que se executa em três etapas: **1.** conduz-se uma reta ortogonal aos dois planos; **2.** determinam-se os pontos de interseção entre a reta e os dois planos dados; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância entre os dois planos.

Etapla 1. Conduziu-se uma reta p , qualquer, ortogonal aos dois planos. A reta p é uma reta de perfil, cujas projeções são se desenham imediatamente. A reta p é necessariamente uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de reversibilidade**. Por outro lado, a reta p ainda não verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos**, pois é ortogonal apenas a uma «família» de retas do plano – a «família» das retas fronto-horizontais.



Etapla 2. Determinam-se os pontos de interseção da reta p com os dois planos. Nem a reta p nem os planos dados são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**, que se executa em três etapas, a saber: **A.** conduz-se, pela reta, um plano auxiliar que a contenha; **B.** determina-se a reta de interseção do plano auxiliar com o plano dado; **C.** o ponto de concorrência das duas retas é o ponto de interseção da reta dada com o plano dado.

A. Assim, conduziu-se, pela reta p , o plano π , que é o plano projetante da reta p – o plano π é um plano de perfil.

B. Em seguida, determinaram-se as retas de interseção do plano α com os dois planos dados. A reta i é a reta de interseção do plano π (o plano auxiliar) com o plano p e está definida por dois pontos – os pontos F e H (os seus traços nos Planos de Projeção). A reta i' é a reta de interseção do plano π (o plano auxiliar) com o plano σ e está definida por um ponto (o H' , o seu traço horizontal) e uma direção (é paralela à reta i). Salienta-se que as retas i e i' são também retas de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**, tal como referido para a reta p .

C. O ponto de concorrência das retas p e i é o ponto de interseção da reta p com o plano p – o ponto A . O ponto de concorrência das retas p e i' é o ponto de interseção da reta p com o plano σ – o ponto B . Não é possível determinar diretamente qualquer dos pontos A e B , pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. Optou-se pelo rebatimento do plano π para o Plano Horizontal de Projeção – em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento, que é h_π (a reta e , que é o traço horizontal do plano π). Em seguida, rebateu-se o ponto F (o traço frontal da reta i), determinando-se F_r . O ponto H (o traço horizontal da reta i) é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente $H_r \equiv H_1$. A reta i_r está definida por dois pontos – os pontos F_r e H_r . O ponto H' (o traço horizontal da reta i') é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente $H'_r \equiv H'_1$. A reta i'_r está definida por um ponto (o ponto H'_r) e uma direção (é paralela à reta i_r). Em seguida, desenhou-se reta p_r (a reta p rebatida), perpendicular às retas i_r e i'_r , o que nos garante a ortogonalidade entre a reta p e os planos p e σ – a reta p_r é, agora, ortogonal a uma segunda «família» de retas dos dois planos (a «família» das retas de perfil dos dois planos). A reta p_r já verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação aos dois planos de rampa. Por fim, determinou-se, em rebatimento, os pontos A (o ponto de concorrência entre as retas p_r e i_r) e B (o ponto de concorrência entre as retas p_r e i'_r) – A_r e B_r , respetivamente. O ponto A é o ponto de concorrência da reta p com a reta i e é o ponto de interseção da reta p com o plano p . O ponto B é o ponto de concorrência da reta p com a reta i' e é o ponto de interseção da reta p com o plano σ .

Neste momento, com a determinação dos pontos de interseção da reta p com os dois planos (os pontos A e B), foi concluída a **Etapla 2 do método geral da distância entre dois planos paralelos**.

Etapla 3. A distância entre os dois pontos é a distância entre os dois planos. A partir das projeções dos pontos A e B desenharam-se as projeções do segmento $[AB]$. O segmento $[AB]$ é um segmento representativo da distância entre os dois planos e é um segmento de reta de perfil.

O segmento $[AB]$ é oblíquo aos dois Planos de Projeção, pelo que não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. No entanto, tendo em conta o rebatimento previamente efetuado (o rebatimento do plano π), observa-se que o segmento $[AB]$ está em verdadeira grandeza nesse rebatimento – a verdadeira grandeza da distância entre os planos p e σ está no segmento $[A_r B_r]$, e foi devidamente assinalada no desenho.

Traçado:

Os dados (os traços dos dois planos) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X , que é a linha estruturante do exercício. O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares – caso das retas p , i e i' (em projeções e em rebatimento), do plano π , bem como dos traçados necessários ao rebatimento do plano π .

92.

Dados:

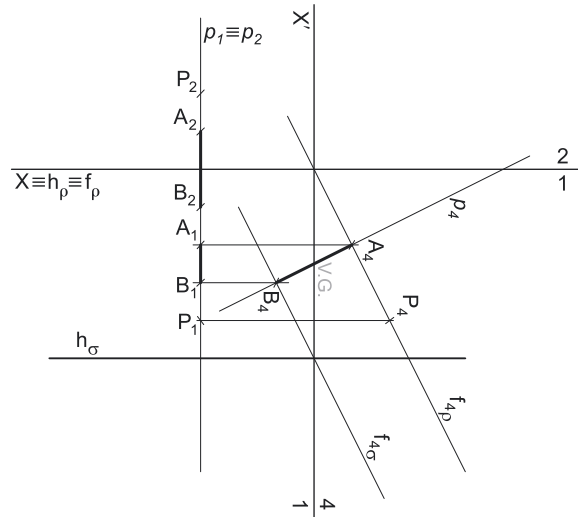
Em primeiro lugar, representou-se o ponto **P** pelas suas projeções, bem como o traço horizontal do plano σ , em função dos dados. O plano ρ está representado pelo eixo **X** e pelas projeções do ponto **P**. O plano σ está definido por uma reta (o seu traço horizontal) e pela sua orientação (é paralelo ao plano ρ).

Resolução:

A resolução do exercício passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância entre dois planos paralelos**, que se executa em três etapas: **1.** conduz-se uma reta ortogonal aos dois planos; **2.** determinam-se os pontos de interseção entre a reta e os dois planos dados; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância entre os dois planos.

Etapa 1. Conduziu-se uma reta **p**, qualquer, ortogonal aos dois planos. A reta **p** é uma reta de perfil, cujas projeções são se desenham imediatamente. A reta **p** é necessariamente uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de reversibilidade**. Por outro lado, a reta **p** ainda não verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos**, pois é ortogonal apenas a uma «família» de retas do plano – a «família» das retas fronto-horizontais.

Etapa 2. Determinam-se os pontos de interseção da reta **p** com os dois planos. Nem a reta **p** nem os planos dados são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**. Por outro lado, é possível o recurso a uma mudança do diedro de projeção de forma a transformar os dois planos em planos projetantes, o que nos possibilitará, de imediato, resolver duas situações – a determinação dos pontos de interseção da reta **p** com os dois planos e a questão da ortogonalidade entre a reta **p** e os dois planos.



Optemos por transformar os planos ρ e σ em planos projetantes frontais – planos de topo. Para tal é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção por um outro plano (o **plano 4**), ortogonal aos planos ρ e σ . Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é ortogonal aos dois planos, o eixo **X'** é perpendicular aos traços horizontais dos dois planos (perpendicular ao eixo **X** inicial). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**). **P₄** é a projeção do ponto **P** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de **P₄** ao eixo **X'** é igual à distância de **P₂** ao eixo **X** (que é 2 cm – a cota de **P**).

Em seguida, desenharam-se os traços dos dois planos no **plano 4**. O traço do plano ρ no **plano 4** é **f_{4rho}**. Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano ρ é um plano projetante frontal, o traço do plano ρ no **plano 4** (**f_{4rho}**) está definido por dois pontos – o seu ponto de concorrência com **h_{rho}** (que se situa no eixo **X'**) e **P₄** (a nova projeção frontal do ponto **P**). O traço do plano σ no **plano 4** é **f_{4sigma}**. Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, os traços dos dois planos pertencem a «famílias» de retas diferentes, é possível garantir o paralelismo entre os dois planos a partir dos seus novos traços frontais (uma vez que os traços horizontais dos dois planos já são paralelos). Assim, o novo traço frontal do plano σ é necessariamente paralelo a **f_{4rho} – f_{4sigma}** (o traço do plano σ no **plano 4**) está definido por um ponto (o seu ponto de concorrência com **h_{sigma}**, que se situa no eixo **X'**) e uma direção (é paralelo a **f_{4rho}**).

Em seguida, desenhou-se a reta **p₄** (a projeção da reta **p** no **plano 4**), perpendicular a **f_{4rho}** e a **f_{4sigma}**, o que nos garante a ortogonalidade entre a reta **p** e os planos ρ e σ – a reta **p** é, agora, ortogonal a uma segunda «família» de retas dos dois planos. A reta **p** já verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação aos dois planos de rampa.

Tendo em conta que, no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), os dois planos são projetantes frontais, a determinação dos pontos de interseção da reta **p** com os dois planos processa-se de forma direta, a partir das suas projeções frontais – trata-se da interseção entre uma reta não projetante (a reta **p**) com um plano projetante frontal.

O ponto **A** é o ponto de interseção da reta **p** com o plano ρ e determinou-se a partir da sua projeção no **plano 4** – **A₄**. **A₁** (a projeção horizontal do ponto **A**) determinou-se diretamente, sobre **p₁** (a projeção horizontal da reta **p**). A projeção frontal do ponto **A** (**A₂**) determinou-se em função da sua cota, que se manteve – assim, a distância de **A₂** ao eixo **X** é igual à distância de **A₄** ao eixo **X'**.

O ponto **B** é o ponto de interseção da reta **p** com o plano σ e determinou-se a partir da sua projeção no **plano 4** – **B₄**. **B₁** (a projeção horizontal do ponto **B**) determinou-se diretamente, sobre **p₁** (a projeção horizontal da reta **p**). A projeção frontal do ponto **B** (**B₂**) determinou-se em função da sua cota, que se manteve – assim, a distância de **B₂** ao eixo **X** é igual à distância de **B₄** ao eixo **X'** (note que, na situação apresentada, a cota do ponto **B** é negativa).

Neste momento, com a determinação dos pontos de interseção da reta **p** com os dois planos (os pontos **A** e **B**), foi concluída a **Etapa 2 do método geral da distância entre dois planos paralelos**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Etapa 3. A distância entre os dois pontos é a distância entre os dois planos. A partir das projeções dos pontos **A** e **B** desenharam-se as projeções do segmento **[AB]**. O segmento **[AB]** é um segmento representativo da distância entre os dois planos e é um segmento de reta de perfil.

O segmento **[AB]** é oblíquo aos dois Planos de Projeção, pelo que não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. No entanto, tendo em conta a mudança do diedro de projeção previamente efetuada, observa-se que o segmento **[AB]** se projeta em verdadeira grandeza no **plano 4** – no diedro de projeção formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**, o segmento de reta **[AB]** é um segmento de reta frontal (de frente), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no **plano 4**. A verdadeira grandeza da distância entre os planos ρ e σ está no segmento **[A₄B₄]**, e foi devidamente assinalada no desenho.

Traçado:

Os dados (os do plano ρ) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício. O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares – caso das projeções da reta **p** (incluindo a projeção da reta **p** no **plano 4**), do eixo **X'** e de todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada.

93.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta **h** e o ponto **P**, pelas respetivas projeções, em função dos dados.

Resolução:

A resolução do exercício, passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a retas** que se executa em três etapas: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta ortogonal à reta dada; **2.** determina-se o ponto de interseção entre as duas retas; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto à reta dada.

Etapa 1. Pelo ponto **P** conduziu-se uma reta **p**, perpendicular à reta **h**. A reta **p** é uma reta oblíqua, cuja projeção horizontal é perpendicular a **h₁** (a projeção horizontal da reta **h**), para garantir a ortogonalidade entre as duas retas. Por outro lado, e uma vez que a reta **p** é **perpendicular** à reta **h**, as duas retas têm de ser concorrentes. Assim, determinou-se o ponto **I**, o ponto de concorrência das duas retas, a partir da sua projeção horizontal (**I₁**) – **I₂** situa-se sobre **h₂** (a projeção frontal da reta **h**). A reta **p** está, assim, definida por dois pontos – os pontos **P** e **I**.

Etapa 2. Determina-se o ponto de concorrência entre as duas retas. O ponto de concorrência das duas retas já foi previamente determinado na etapa anterior – o ponto **I**.

Etapa 3. A distância entre os dois pontos é a distância do ponto **P** à reta **h**. A partir das projeções dos pontos **P** e **I** desenharam-se as projeções do segmento **[PI]**. O segmento **[PI]** é segmento representativo da distância do ponto **P** à reta **h**.

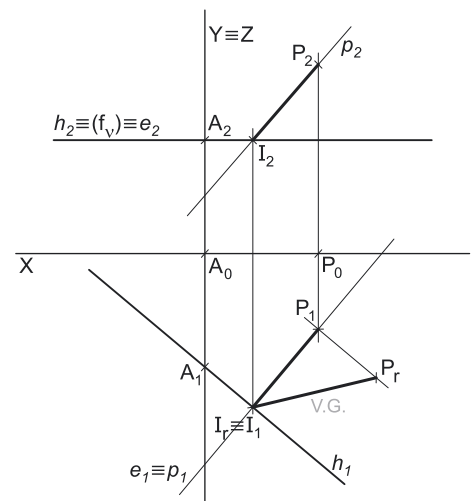
O segmento **[PI]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pois é oblíquo a ambos os planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Para determinar a **verdadeira grandeza da distância** pretendida (que está deformada em ambos os planos de projeção), optou-se por rebater o plano projetante horizontal de **[PI]** para o plano horizontal (de nível) v que contém o ponto **I** (cujo traço frontal se desenhou imediatamente, passando por **I₂**). Para tal determinaram-se as projeções da charneira do rebatimento (a reta **e**), o que se processou de forma direta. A projeção frontal (**e₂**) está coincidente com o traço frontal do plano v (**f_v**), pois o plano v é um plano projetante frontal. A projeção horizontal da charneira (**e₁**) está coincidente com a projeção horizontal da reta **p**, pois o plano que contém o segmento **[PI]** (e a reta **p**) é um plano projetante horizontal.

O ponto **I** é um ponto da charneira, pelo que é fixo – roda sobre si próprio. Assim, tem-se imediatamente **I_r ≡ I₁**. Falta-nos rebater o ponto **P**. Conduziu-se, por **P₁**, uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento de **P**), sobre a qual se representou a distância do ponto **P** ao plano v (a cota de **P** em relação a v), determinando-se **P_r**.

Por fim, desenhou-se o segmento de reta que tem extremos em **P_r** e **I_r** – o segmento de reta **[P_rI_r]** é o segmento de reta **[PI]** rebatido e situa-se no plano v (que é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que está em verdadeira grandeza. **P_rI_r** é a verdadeira grandeza da distância do ponto **P** à reta **h**, o que se identificou no desenho.

Traçado:

Os dados (as projeções da reta **h**) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O eixo **Y ≡ Z** representou-se a **leve**, pois trata-se de uma linha de referência (auxiliar). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso da reta **p** e do plano v) representaram-se a **leve**.



94.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta v e o ponto A , pelas respectivas projeções, em função dos dados.

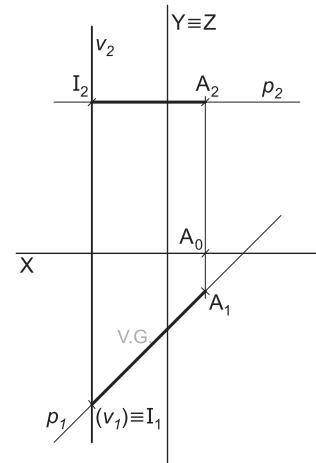
Resolução:

A resolução do exercício, passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a retas** que se executa em três etapas: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta ortogonal à reta dada; **2.** determina-se o ponto de interseção entre as duas retas; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto à reta dada.

Etapa 1. Pelo ponto A conduziu-se uma reta p , perpendicular à reta v . A projeção frontal da reta p é perpendicular a v_2 (a projeção frontal da reta v), para garantir a ortogonalidade entre as duas retas. A reta p é, assim, uma reta horizontal (de nível). Por outro lado, e uma vez que a reta p é perpendicular à reta v , as duas retas têm de ser concorrentes. Assim, determinou-se o ponto I , o ponto de concorrência das duas retas, a partir da sua projeção frontal (I_2) – I_1 situa-se coincidente com v_1 (a projeção horizontal da reta v). A reta p está, assim, definida por dois pontos – os pontos A e I .

Etapa 2. Determina-se o ponto de concorrência entre as duas retas. O ponto de concorrência das duas retas já foi previamente determinado na etapa anterior – o ponto I .

Etapa 3. A distância entre os dois pontos é a distância do ponto A à reta v . A partir das projeções dos pontos A e I desenharam-se as projeções do segmento $[AI]$. O segmento $[AI]$ é segmento representativo da distância do ponto P à reta h .

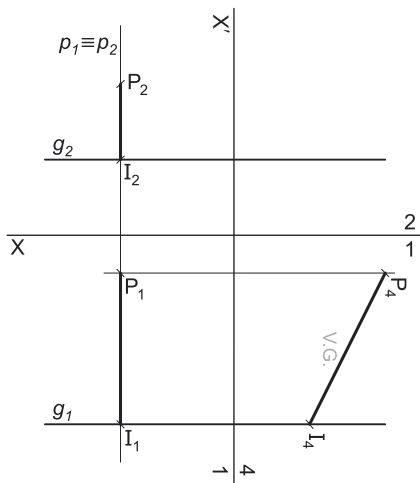


O segmento $[AI]$ é um segmento de reta horizontal (de nível), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção). Assim, o segmento de reta $[A_1I_1]$ é a projeção horizontal do segmento de reta $[AI]$ e está em verdadeira grandeza. $\overline{A_1I_1}$ é a verdadeira grandeza da distância do ponto A à reta v , o que se identificou no desenho.

Traçado:

Os dados (as projeções da reta v) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X (que é a linha estruturante do exercício). O eixo $Y \equiv Z$ representou-se a **leve**, pois trata-se de uma linha de referência (auxiliar). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício), que se situa na projeção horizontal do segmento. A projeção frontal da distância, porque é parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso da reta p) representaram-se a **leve**.

95.



Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta g e o ponto P , pelas respectivas projeções, em função dos dados.

Resolução:

A resolução do exercício, passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a retas** que se executa em três etapas: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta ortogonal à reta dada; **2.** determina-se o ponto de interseção entre as duas retas; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto à reta dada.

Etapa 1. Pelo ponto P conduziu-se uma reta p , perpendicular à reta g . A reta p é uma reta de perfil, cujas projeções se desenharam imediatamente (qualquer reta de perfil é ortogonal a uma reta fronto-horizontal). Por outro lado, e uma vez que a reta p é perpendicular à reta g , as duas retas têm de ser concorrentes. Assim, determinou-se o ponto I , o ponto de concorrência das duas retas – as duas projeções do ponto I determinaram-se de forma direta. A reta p está, assim, definida por dois pontos – os pontos P e I .

Etapa 2. Determina-se o ponto de concorrência entre as duas retas. O ponto de concorrência das duas retas já foi previamente determinado na etapa anterior – o ponto I .

Etapa 3. A distância entre os dois pontos é a distância do ponto P à reta g . A partir das projeções dos pontos P e I desenharam-se as projeções do segmento $[PI]$. O segmento $[PI]$ é segmento representativo da distância do ponto P à reta g .

O segmento $[PI]$ não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pois é oblíquo a ambos os planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Para determinar a **verdadeira grandeza da distância** pretendida (que está deformada em ambos os planos de projeção), optou-se por recorrer a uma mudança do diedro de projeção, de forma a transformar o segmento de reta $[PI]$ num segmento de reta frontal (de frente). Para tal, é necessário, substituir o Plano Frontal de Projeção por um outro plano (o **plano 4**), paralelo ao segmento de reta.

Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** dos pontos e do segmento de reta (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções dos pontos e do segmento de reta no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** dos seus pontos (que estão referenciados ao plano de projeção que se manteve) e **alteram-se os afastamentos** (que passam a ser 2 cm, pois os afastamentos anteriores estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, o novo eixo X (o eixo X') é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com $1/4$. Como o **plano 4** é paralelo ao segmento de reta $[PI]$, o eixo X' é paralelo a $[P_1I_1]$. As linhas de chamada dos pontos P e I , no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo X' (o novo eixo X). P_4 é a projeção do ponto P no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de P_4 ao eixo X' é igual à distância de P_2 ao eixo X . I_4 é a projeção de I no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de I_4 ao eixo X' é igual à distância de I_2 ao eixo X . No novo diedro de projeção, o segmento está paralelo ao **plano 4** (está transformado num segmento de reta frontal) e a sua verdadeira grandeza está na sua projeção no **plano 4** (o que se assinalou convenientemente) – a verdadeira grandeza de \overline{PI} é P_4I_4 .

Traçado:

Os dados (as projeções da reta g) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso da reta p e dos traçados necessários à mudança do diedro de projeção efetuada) representaram-se a **leve**.

96.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta m e o ponto P , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta m é paralela ao $\beta_{1/3}$, pelo que as suas projeções fazem ângulos iguais com o eixo X , e com abertura para o mesmo lado (retas paralelas ao $\beta_{1/3}$ são retas não passantes, cujas projeções fazem, com o eixo X , ângulos iguais e com abertura para o mesmo lado).

Resolução:

Dos diversos métodos existentes para a resolução deste exercício, optou-se pelo recurso ao **método direto**, que nos permite a aplicação do **método geral da distância de pontos a retas** a duas dimensões, após o rebatimento do plano definido pela reta m e pelo ponto P .

Assim, optou-se por se rebater o plano definido pela reta m e pelo ponto P para o plano horizontal (de nível) v que contém o ponto P – nesse sentido, desenhou-se o traço frontal do plano v (f_v), que passa por P_2 (pois o plano v é um plano projetante frontal). Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (reta e), que é a reta de interseção entre os dois planos. A charneira do rebatimento (reta e) fica definida por dois pontos – o ponto P e o ponto F (que é o ponto de interseção da reta m com o plano v). O ponto F é o próprio traço frontal da reta m , pois os pontos F e P têm a mesma cota.

O ponto P é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente $P_r \equiv P_1$. O ponto F é outro ponto da charneira, pelo que roda igualmente sobre si próprio (é outro ponto fixo) – tem-se imediatamente $F_r \equiv F_1$. Já temos um ponto para definir a reta m em rebatimento – o ponto F_r . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta m em rebatimento.

Recorreu-se a um outro ponto da reta m – o ponto A . O rebatimento do ponto A processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por A_1 conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediu-se a distância do ponto A ao plano v (a cota de A em relação ao plano v) e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto A em verdadeira grandeza, (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro da charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto A , até à perpendicular à charneira que passa por A_1 , determinando A_r . Por fim, desenhou-se a reta m_r (a reta m rebatida), que está definida por dois pontos – os pontos A_r e F_r .

Em seguida, no rebatimento efetuado, procedeu-se à execução sequencial das três etapas do **método geral para a determinação da distância de pontos a retas**: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta ortogonal à reta dada; **2.** determina-se o ponto de interseção entre as duas retas; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto à reta dada.

Etapla 1. Pelo ponto P_r conduziu-se uma perpendicular à reta m_r – a reta p_r . Uma vez que o problema está a ser resolvido a duas dimensões (no plano rebatido), a reta p_r é necessariamente perpendicular à reta m_r , pois as duas retas são necessariamente concorrentes.

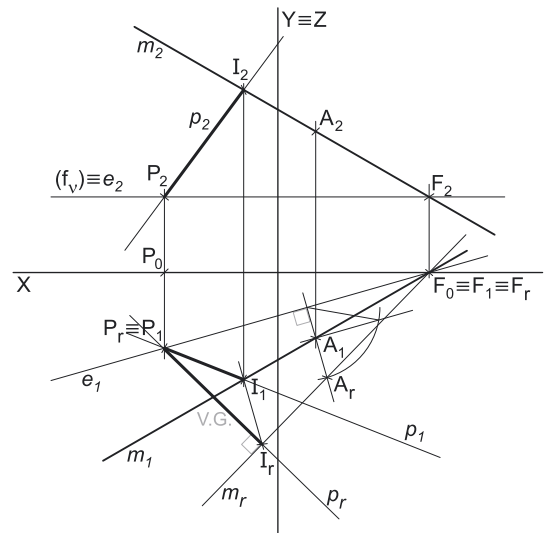
Etapla 2. Determina-se o ponto de concorrência entre as duas retas. O ponto de concorrência das duas retas é o ponto I_r .

Etapla 3. A distância entre os dois pontos é a distância do ponto P à reta m . O segmento $[PI]$ é, assim, o segmento representativo da distância do ponto P à reta m . Tendo em conta que o problema está a ser resolvido em rebatimento, o segmento $[P_rI_r]$ está em verdadeira grandeza – $\overline{P_rI_r}$ é a verdadeira grandeza da distância do ponto P à reta m .

Por fim, inverteu-se o rebatimento do ponto I – por I_r (o ponto I rebatido) conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se I_1 (a projeção horizontal do ponto I) sobre m_1 (a projeção horizontal da reta m). A projeção frontal do ponto I (I_2) situa-se na projeção frontal da reta m (m_2), na linha de chamada de I_1 . Por fim, desenharam-se as duas projeções da distância (do segmento $[PI]$) e da reta p (a reta que passa pelo ponto P e é perpendicular à reta m) – a reta p está definida por dois pontos – os pontos P e I .

Traçado:

Os dados (as projeções da reta m) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X (que é a linha estruturante do exercício). O eixo $Y \equiv Z$ representou-se a **leve**, pois trata-se de uma linha de referência (auxiliar). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso da reta p e dos traçados relativos ao rebatimento do plano definido pela reta m e pelo ponto P , entre os quais o plano v e a charneira do rebatimento) representaram-se a **leve**.



97.

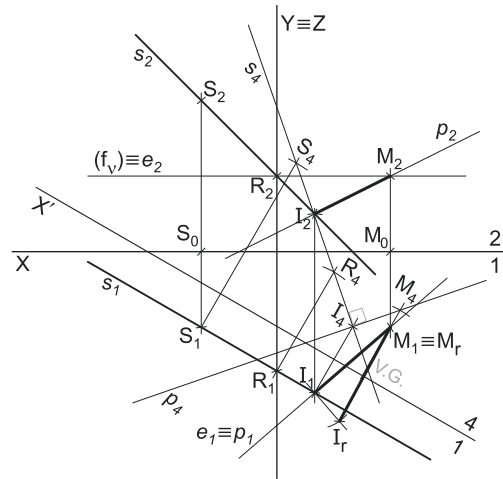
Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta r e o ponto M , pelas respetivas projeções, em função dos dados.

Resolução:

Dos diversos métodos existentes para a resolução deste exercício, optou-se pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a retas** que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta ortogonal à reta dada; **2.** determina-se o ponto de interseção entre as duas retas; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto à reta dada.

Etapa 1. Pelo ponto M conduz-se uma reta perpendicular à reta r – a reta p . Uma vez que a reta r é uma reta oblíqua aos dois planos de projeção, a **perpendicularidade** entre a reta p e a reta r **não é direta** em nenhum dos planos de projeção. Assim, as projeções da reta r não são as mais favoráveis para concretizar o pretendido (conduzir uma reta perpendicular à reta r), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Esse processo geométrico auxiliar deverá ser uma **mudança do diedro de projeção**, de forma a transformar a reta r numa reta paralela a um dos planos de projeção para, dessa forma, a perpendicularidade entre as duas retas ser direta num dos planos de projeção.



Optou-se por transformar a reta r numa reta frontal (de frente). Para tal é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção por um outro plano (o **plano 4**), paralelo à reta r . Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo X (o eixo X') é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é paralelo à reta r , o eixo X' é paralelo à projeção horizontal da reta r (r_1), que é a projeção que se mantém. As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo X' (o novo eixo X).

M_4 é a projeção do ponto M no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de M_4 ao eixo X' é igual à distância de M_2 ao eixo X (que é 2 cm – a cota de M). S_4 é a projeção do ponto S no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de S_4 ao eixo X' é igual à distância de S_2 ao eixo X (que é 4 cm – a cota de S).

Já temos um ponto para definirmos a nova projeção frontal da reta r – o ponto S_4 . Falta-nos outro ponto ou uma direção. Nesse sentido, recorreu-se a um ponto R , qualquer, da reta r , e determinou-se a sua projeção no **plano 4**. R_4 é a projeção do ponto R no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de R_4 ao eixo X' é igual à distância de R_2 ao eixo X . Assim, desenhou-se r_4 (a projeção da reta r no **plano 4**), que está definida por dois pontos – S_4 e R_4 .

No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), a reta r é uma reta frontal (de frente), pois é paralela ao **plano 4**. Assim, a perpendicularidade entre a reta p e a reta r é direta em projeção frontal (no **plano 4**). Dessa forma, por M_4 (a projeção do ponto M no **plano 4**) conduziu-se p_4 (a projeção da reta p no **plano 4**), perpendicular a r_4 (a projeção da reta r no **plano 4**), o que nos garante a ortogonalidade entre as duas retas.

Por outro lado, e uma vez que a reta p é **perpendicular** à reta r , as duas retas têm de ser concorrentes. Assim, determinou-se o ponto I , o ponto de concorrência das duas retas, a partir da sua projeção no **plano 4** (I_4) – I_1 situa-se sobre r_1 (a projeção horizontal da reta p). Em seguida, determinou-se I_2 (a projeção frontal do ponto I), sobre r_2 (a projeção frontal da reta r), na linha de chamada de I_1 . Por fim, desenharam-se as projeções frontal e horizontal da reta p , que está definida por dois pontos – os pontos M e I .

Está concluída a **Etapa 1** do **método geral para a determinação da distância de pontos a retas**.

Etapa 2. Determina-se o ponto de concorrência entre as duas retas. O ponto de concorrência das duas retas é o ponto I , já determinado na etapa anterior.

Etapa 3. A distância entre os dois pontos é a distância do ponto M à reta r . O segmento $[MI]$ é, assim, o segmento representativo da distância do ponto M à reta r , pelo que se desenharam as suas duas projeções.

O segmento $[MI]$ não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (no diedro de projeção inicial), pois é oblíquo a ambos os planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Note que no diedro formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**, o segmento de reta $[MI]$ também não é paralelo a qualquer dos planos de projeção (quer ao **plano 1**, quer ao **plano 4**), pelo que também neste diedro de projeção se mantém a situação de que o segmento de reta não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção.

Para determinar a **verdadeira grandeza da distância** pretendida (que está deformada em ambas as projeções), optou-se por rebater o plano projetante horizontal do segmento $[MI]$ para o plano horizontal (de nível) v que contém o ponto M (e cujo traço frontal se desenhou imediatamente, passando por M_2). Para tal determinaram-se as projeções da charneira do rebatimento (a reta e), o que se processou de forma direta. A projeção frontal (e_2) está coincidente com o traço frontal do plano v (f_v), pois o plano v é um plano projetante frontal. A projeção horizontal da charneira (e_1) está coincidente com a projeção horizontal da reta p (p_1), pois o plano que contém o segmento $[MI]$ (e a reta p) é um plano projetante horizontal.

O ponto M é um ponto da charneira, pelo que é fixo – roda sobre si próprio. Assim, tem-se imediatamente $M_r \equiv M_1$. Falta-nos rebater o ponto I . Conduziu-se, por I_1 , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento de I), sobre a qual se representou a distância do ponto I ao plano v (a cota de I em relação a v), determinando-se I_r .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por fim, desenhou-se o segmento de reta que tem extremos em M_r e I_r – o segmento de reta $[M_r I_r]$ é o segmento de reta $[MI]$ rebatido e situa-se no plano ρ (que é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que está em verdadeira grandeza. $\overline{M_r I_r}$ é a verdadeira grandeza da distância do ponto M à reta r , o que se identificou no desenho.

Traçado:

Os dados (as projeções da reta r) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X (que é a linha estruturante do exercício). O eixo $Y \equiv Z$ representou-se a **leve**, pois trata-se de uma linha de referência (auxiliar). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso da reta p , dos traçados relativos à mudança do diedro de projeção efetuada e, ainda, dos traçados relativos ao rebatimento do plano projetante horizontal de $[MI]$ para o plano v , para a determinação da verdadeira grandeza de $[MI]$) representaram-se a **leve**.

98.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta r e o ponto A , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta r é uma reta do $\beta_{1/3}$, pelo que as suas projeções são simétricas em relação ao eixo X (retas do $\beta_{1/3}$ têm as suas projeções simétricas em relação ao eixo X).

Resolução:

Dos diversos métodos existentes para a resolução deste exercício, optou-se pelo recurso ao **método direto**, que nos permite a aplicação do **método geral da distância de pontos a retas** a duas dimensões, após o rebatimento do plano definido pela reta r e pelo ponto A .

Assim, optou-se por se rebater o plano definido pela reta r e pelo ponto P para o plano horizontal (de nível) v que contém o ponto A – nesse sentido, desenhou-se o traço frontal do plano v (f_v), que passa por A_2 (pois o plano v é um plano projetante frontal). Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (reta e), que é a reta de interseção entre os dois planos. A charneira do rebatimento (reta e) fica definida por dois pontos – o ponto A e o ponto B (que é o ponto de interseção da reta r com o plano v).

O ponto A é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente $A_r \equiv A_1$. O ponto B é outro ponto da charneira, pelo que roda igualmente sobre si próprio (é outro ponto fixo) – tem-se imediatamente $B_r \equiv B_1$. Já temos um ponto para definir a reta r em rebatimento – o ponto B_r . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta r em rebatimento.

Recorreu-se a um outro ponto da reta r – o ponto C . O rebatimento do ponto C processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por C_1 conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediu-se a distância do ponto C ao plano v (a cota de C em relação ao plano v) e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto C em verdadeira grandeza, (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro da charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto C , até à perpendicular à charneira que passa por C_1 , determinando C_r . Por fim, desenhou-se a reta r_r (a reta r rebatida), que está definida por dois pontos – os pontos B_r e C_r .

Em seguida, no rebatimento efetuado, procedeu-se à execução sequencial das três etapas do **método geral para a determinação da distância de pontos a retas**: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta ortogonal à reta dada; **2.** determina-se o ponto de interseção entre as duas retas; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto à reta dada.

Etapla 1. Pelo ponto A_r conduziu-se uma perpendicular à reta r_r – a reta p_r . Uma vez que o problema está a ser resolvido a duas dimensões (no plano rebatido), a reta p_r é necessariamente perpendicular à reta r_r , pois as duas retas são necessariamente concorrentes.

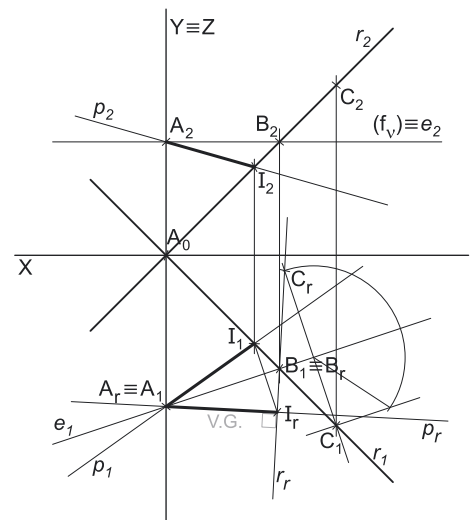
Etapla 2. Determina-se o ponto de concorrência entre as duas retas. O ponto de concorrência das duas retas é o ponto I_r .

Etapla 3. A distância entre os dois pontos é a distância do ponto A à reta r . O segmento $[AI]$ é, assim, o segmento representativo da distância do ponto A à reta r . Tendo em conta que o problema está a ser resolvido em rebatimento, o segmento $[A_r I_r]$ está em verdadeira grandeza – $\overline{A_r I_r}$ é a verdadeira grandeza da distância do ponto A à reta r .

Por fim, inverteu-se o rebatimento do ponto I – por I_r (o ponto I rebatido) conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se I_1 (a projeção horizontal do ponto I) sobre r_1 (a projeção horizontal da reta r). A projeção frontal do ponto I (I_2) situa-se na projeção frontal da reta r (r_2), na linha de chamada de I_1 . Por fim, desenharam-se as duas projeções da distância (do segmento $[AI]$) e da reta p (a reta que passa pelo ponto A e é perpendicular à reta r) – a reta p está definida por dois pontos – os pontos A e I .

Traçado:

Os dados (as projeções da reta r) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X (que é a linha estruturante do exercício). O eixo $Y \equiv Z$ representou-se a **leve**, pois trata-se de uma linha de referência (auxiliar). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso da reta p e dos traçados relativos ao rebatimento do plano definido pela reta r e pelo ponto A , entre os quais o plano v e a charneira do rebatimento) representaram-se a **leve**.



99.

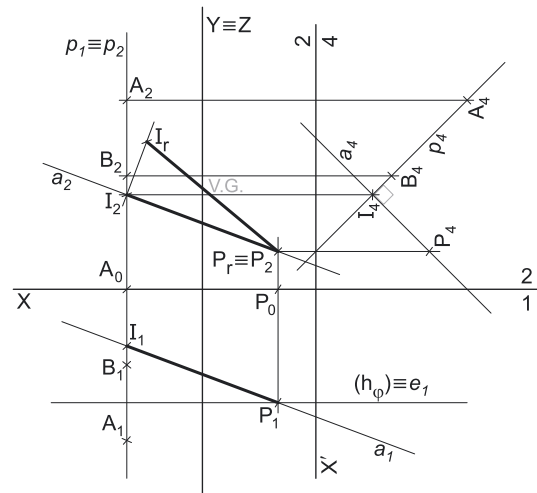
Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta p e o ponto P , pelas respectivas projeções, em função dos dados. A reta p está definida pelos pontos A e B .

Resolução:

Dos diversos métodos existentes para a resolução deste exercício, optou-se pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a retas** que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta ortogonal à reta dada; **2.** determina-se o ponto de interseção entre as duas retas; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto à reta dada.

Etapa 1. Pelo ponto P conduz-se uma reta perpendicular à reta p – a reta a . Uma vez que a reta p é uma reta oblíqua aos dois planos de projeção, a **perpendicularidade** entre a reta a e a reta p **não é direta** em nenhum dos planos de projeção. Assim, as projeções da reta p (que não verificam o **Critério de Reversibilidade**) não são as mais favoráveis para concretizar o pretendido (conduzir uma reta perpendicular à reta p), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Esse processo geométrico auxiliar deverá ser uma **mudança do diedro de projeção**, de forma a transformar a reta p numa reta paralela a um dos planos de projeção para, dessa forma, a perpendicularidade entre as duas retas ser direta num dos planos de projeção.



Optou-se por transformar a reta p numa reta horizontal (de nível). Para tal é necessário substituir o Plano Horizontal de Projeção por um outro plano (o **plano 4**), paralelo à reta p . Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Frontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções frontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções horizontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se os afastamentos** (que estão referenciados ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se as cotas** (que estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo X (o eixo X') é a reta de interseção do **plano 2** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **4/2**. Como o **plano 4** é paralelo à reta p , o eixo X' é paralelo à projeção frontal da reta p (p_2), que é a projeção que se mantém. As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo X' (o novo eixo X).

P_4 é a projeção do ponto P no **plano 4** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de P_4 ao eixo X' é igual à distância de P_1 ao eixo X (que é 3 cm – o afastamento de P). A_4 é a projeção do ponto A no **plano 4** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de A_4 ao eixo X' é igual à distância de A_1 ao eixo X (que é 4 cm – o afastamento de A). B_4 é a projeção do ponto B no **plano 4** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de B_4 ao eixo X' é igual à distância de B_1 ao eixo X (que é 2 cm – o afastamento de B).

Em seguida, desenhou-se a projeção da reta p no **plano 4** (p_4), que está definida por dois pontos – A_4 e B_4 . No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 2** e pelo **plano 4**), a reta p é uma reta horizontal (de nível), pois é paralela ao **plano 4**. Assim, a perpendicularidade entre a reta a e a reta p é direta em projeção horizontal (no **plano 4**). Dessa forma, por P_4 (a projeção do ponto P no **plano 4**) conduziu-se a_4 (a projeção da reta a no **plano 4**), perpendicular a p_4 (a projeção da reta p no **plano 4**), o que nos garante a ortogonalidade entre as duas retas.

Por outro lado, e uma vez que a reta a é **perpendicular** à reta p , as duas retas têm de ser concorrentes. Assim, determinou-se o ponto I , o ponto de concorrência das duas retas, a partir da sua projeção no **plano 4** (I_4) – I_2 situa-se sobre p_2 (a projeção frontal da reta p). Em seguida, determinou-se I_1 (a projeção horizontal do ponto I) em função do seu afastamento (que se manteve). Por fim, desenharam-se as projeções frontal e horizontal da reta a , que está definida por dois pontos – os pontos P e I .

Está concluída a **Etapa 1** do **método geral para a determinação da distância de pontos a retas**.

Etapa 2. Determina-se o ponto de concorrência entre as duas retas. O ponto de concorrência das duas retas é o ponto I , já determinado na etapa anterior.

Etapa 3. A distância entre os dois pontos é a distância do ponto P à reta p . O segmento $[PI]$ é, assim, o segmento representativo da distância do ponto P à reta p , pelo que se desenharam as suas duas projeções.

O segmento $[PI]$ não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (no diedro de projeção inicial), pois é oblíquo a ambos os planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Note que no diedro formado pelo **plano 2** e pelo **plano 4**, o segmento de reta $[PI]$ também não é paralelo a qualquer dos planos de projeção (quer ao **plano 2**, quer ao **plano 4**), pelo que também neste diedro de projeção se mantém a situação de que o segmento de reta não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção.

Para determinar a **verdadeira grandeza da distância** pretendida (que está deformada em ambas as projeções), optou-se por rebater o plano projetante frontal do segmento $[PI]$ para o plano frontal (de frente) φ que contém o ponto P (e cujo traço horizontal se desenhou imediatamente, passando por P_1). Para tal determinaram-se as projeções da charneira do rebatimento (a reta e), o que se processou de forma direta. A projeção horizontal (e_1) está coincidente com o traço horizontal do plano φ (h_φ), pois o plano φ é um plano projetante horizontal. A projeção frontal da charneira (e_2) está coincidente com a projeção frontal da reta a (a_2), pois o plano que contém o segmento $[PI]$ (e a reta a) é um plano projetante frontal.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O ponto **P** é um ponto da charneira, pelo que é fixo – roda sobre si próprio. Assim, tem-se imediatamente $P_r \equiv P_2$. Falta-nos rebater o ponto **I**. Conduziu-se, por I_2 , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento de **I**), sobre a qual se representou a distância do ponto **I** ao plano φ (o afastamento de **I** em relação a φ), determinando-se I_r .

Por fim, desenhou-se o segmento de reta que tem extremos em P_r e I_r – o segmento de reta $[P_r I_r]$ é o segmento de reta $[PI]$ rebatido e situa-se no plano φ (que é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que está em verdadeira grandeza. $P_r I_r$ é a verdadeira grandeza da distância do ponto **P** à reta p , o que se identificou no desenho.

Traçado:

Os dados (as projeções da reta p) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O eixo **Y = Z** representou-se a **leve**, pois trata-se de uma linha de referência (auxiliar). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso da reta a , dos traçados relativos à mudança do diedro de projeção efetuada e, ainda, dos traçados relativos ao rebatimento do plano projetante frontal de $[PI]$ para o plano φ , para a determinação da verdadeira grandeza de $[PI]$) representaram-se a **leve**.

100.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta p e o ponto **A**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta p está definida pelos pontos **M** e **N**.

Resolução:

Dos diversos métodos existentes para a resolução deste exercício, o enunciado pede expressamente o recurso ao **método convencional para a determinação da distância de pontos a retas** que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo ponto, um plano ortogonal à reta dada; **2.** determina-se o ponto de interseção da reta dada com o plano; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto dado à reta dada.

Etapa 1. Pelo ponto **A** conduz-se um plano ortogonal à reta p . A reta p é uma reta de perfil, pelo que o plano a conduzir é necessariamente um plano de rampa. Esse plano tem de conter duas retas concorrentes que sejam perpendiculares ou ortogonais à reta p , ou seja, o plano tem de conter duas «famílias» de retas ortogonais à reta p (para que se verifique o **Critério de ortogonalidade entre planos e retas**).

Nesse sentido, pelo ponto **A** conduziu-se uma reta g , fronto-horizontal, que é uma reta desse plano. Qualquer reta fronto-horizontal é ortogonal a qualquer reta de perfil. Assim, já garantimos que o plano contém uma «família» de retas ortogonais à reta p – a «família» das retas fronto-horizontais. No entanto, ainda não está garantida a ortogonalidade entre o plano e a reta p , pois o plano tem de conter uma segunda «família» de retas ortogonais a reta p (para que se verifique o **Critério da ortogonalidade entre planos e retas**). Essa segunda «família» de retas deverá ser a «família» de retas de perfil do plano. Para tal recorreu-se a uma reta a , de perfil, que é concorrente com a reta g no ponto A' – a reta a terá de ser ortogonal à reta p .

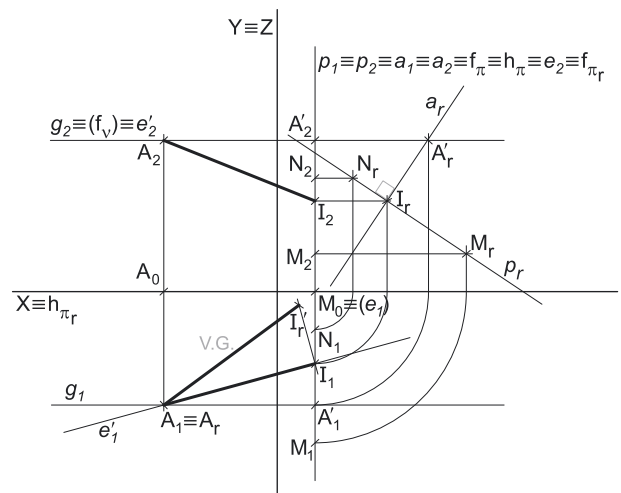
Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se localizar a reta a no mesmo plano de perfil da reta p .

Há, agora, que garantir a ortogonalidade entre a reta a e a reta p , de forma a garantir a ortogonalidade do plano em relação à reta p . As retas a e p são, ambas, retas de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo rebatimento do plano de perfil que contém as duas retas.

Nesse sentido, conduziu-se, pelas duas retas, um plano de perfil π e efetuou-se o rebatimento do plano π para o Plano Frontal de Projeção – a charneira do rebatimento (reta e) foi f_π (o traço frontal do plano). Rebateu-se o plano π , rebatendo-se os pontos A' , **M** e **N**. Em seguida, desenhou-se p_r (a reta p rebatida) que passa por M_r e por N_r (a reta p_r está definida por dois pontos – os pontos M_r e N_r). Pelo ponto A'_r , conduziu-se a reta a_r , perpendicular a p_r . Já garantimos, em rebatimento, a ortogonalidade da reta a em relação à reta p , pelo que está garantida a ortogonalidade da reta a em relação à reta p .

O plano definido pelas retas g e a contém o ponto **A** (porque o ponto **A** pertence a uma reta do plano – a reta g) e é ortogonal à reta p , porque contém duas retas concorrentes ortogonais ou perpendiculares à reta p (as retas g e a , precisamente). Está concluída a **Etapa 1 do método convencional**.

Etapa 2. Determina-se o ponto de interseção da reta dada com o plano. Nem a reta p nem o plano (definido pelas retas g e a) são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**, que se executa em três etapas, a saber: **A.** conduz-se, pela reta, um plano auxiliar que a contenha; **B.** determina-se a reta de interseção do plano auxiliar com o plano dado; **C.** o ponto de concorrência das duas retas é o ponto de interseção da reta dada com o plano dado.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

- A. O plano π (ao qual se recorreu na **Etapa 1**) é um plano que contém a reta p (é o plano projetante da reta p) e é um plano de perfil.
- B. A reta a é, imediatamente, a reta de interseção do plano π com o plano definido pelas retas g e a .
- C. O ponto de concorrência das retas a e p é o ponto de interseção da reta p com o plano. Não é possível determinar diretamente o ponto, pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. Tendo em conta o rebatimento previamente efetuado do plano π , determinou-se o ponto de concorrência das duas retas em rebatimento – I_r é o ponto de concorrência das retas a_r e p_r . Inverteu-se o rebatimento do plano π e determinaram-se as projeções do ponto I .

Etapa 3. A distância entre os dois pontos é a distância do ponto A à reta p . O segmento $[AI]$ é, assim, o segmento representativo da distância do ponto A à reta p , pelo que se desenharam as suas duas projeções.

O segmento $[AI]$ não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pois é oblíquo a ambos os planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Para determinar a **verdadeira grandeza da distância** pretendida (que está deformada em ambas as projeções), optou-se por rebater o plano projetante frontal do segmento $[AI]$ para o plano horizontal (de nível) v que contém o ponto A (e cujo traço frontal se identificou imediatamente). Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (a reta e'), o que se processou de forma direta. A sua projeção frontal (e'_2) está coincidente com o traço frontal do plano v (f_v), pois o plano v é um plano projetante frontal. A projeção horizontal da charneira (e'_1) contém a projeção horizontal do segmento de reta $[AI]$, pois trata-se do plano projetante horizontal do segmento $[AI]$.

O ponto A é um ponto da charneira, pelo que é fixo (roda sobre si próprio) – tem-se imediatamente $A_r \equiv A_1$. Falta-nos rebater o ponto I . Conduziu-se, por I_1 , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento de I), sobre a qual se representou a distância do ponto I ao plano v (a cota de I em relação a v), determinando-se I_r .

Por fim, desenhou-se o segmento de reta que tem extremos em A_r e I_r – o segmento de reta $[A_r I_r]$ é o segmento de reta $[AI]$ rebatido e situa-se no plano v (que é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que está em verdadeira grandeza. $\overline{A_r I_r}$ é a verdadeira grandeza da distância do ponto A à reta p , o que se identificou no desenho.

Traçado:

Os dados (as projeções da reta p) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X (que é a linha estruturante do exercício). O eixo $Y \equiv Z$ representou-se a **leve**, pois trata-se de uma linha de referência (auxiliar). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso dos traçados relativos ao rebatimento do plano π , das retas a e p em rebatimento e, ainda, dos traçados relativos ao rebatimento do plano projetante horizontal de $[AI]$ para o plano v , para a determinação da verdadeira grandeza de $[AI]$).

101.

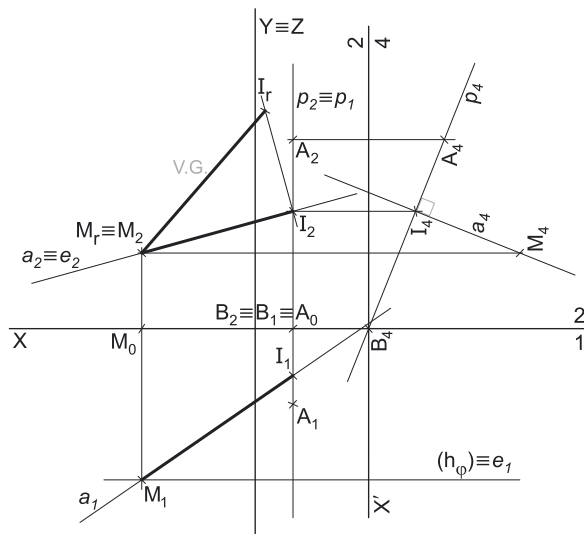
Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se a reta p e o ponto M , pelas respetivas projeções, em função dos dados. A reta p , porque é uma reta passante, é concorrente com o eixo X num ponto – o ponto B . A reta p está, assim, definida pelos pontos A e B .

Resolução:

Dos diversos métodos existentes para a resolução deste exercício, optou-se pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a retas** que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta ortogonal à reta dada; **2.** determina-se o ponto de interseção entre as duas retas; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto à reta dada.

Etapa 1. Pelo ponto M conduz-se uma reta perpendicular à reta p – a reta a . Uma vez que a reta p é uma reta oblíqua aos dois planos de projeção, a **perpendicularidade** entre a reta a e a reta p **não é direta** em nenhum dos planos de projeção. Assim, as projeções da reta p (que não verificam o **Crítério de Reversibilidade**) não são as mais favoráveis para concretizar o pretendido (conduzir uma reta perpendicular à reta p), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Esse processo geométrico auxiliar deverá ser uma **mudança do diedro de projeção**, de forma a transformar a reta p numa reta paralela a um dos planos de projeção para, dessa forma, a perpendicularidade entre as duas retas ser direta num dos planos de projeção.



Optou-se por transformar a reta p numa reta horizontal (de nível). Para tal é necessário substituir o Plano Horizontal de Projeção por um outro plano (o **plano 4**), paralelo à reta p . Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Frontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções frontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções horizontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se os afastamentos** (que estão referenciados ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se as cotas** (que estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo X (o eixo X') é a reta de interseção do **plano 2** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com $4/2$. Como o **plano 4** é paralelo à reta p , o eixo X' é paralelo à projeção frontal da reta p (p_2), que é a projeção que se mantém. As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo X' (o novo eixo X).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

M_4 é a projeção do ponto M no plano 4 e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de M_4 ao eixo X' é igual à distância de M_1 ao eixo X (que é 4 cm – o afastamento de M). A_4 é a projeção do ponto A no plano 4 e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de A_4 ao eixo X' é igual à distância de A_1 ao eixo X (que é 2 cm – o afastamento de A). B_4 é a projeção do ponto B no plano 4 e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – B_4 situa-se no eixo X' , pois o ponto B tem afastamento nulo.

Em seguida, desenhou-se a projeção da reta p no plano 4 (p_4), que está definida por dois pontos – A_4 e B_4 . No novo diedro de projeção (formado pelo plano 2 e pelo plano 4), a reta p é uma reta horizontal (de nível), pois é paralela ao plano 4. Assim, a perpendicularidade entre a reta a e a reta p é direta em projeção horizontal (no plano 4). Dessa forma, por M_4 (a projeção do ponto M no plano 4) conduziu-se a_4 (a projeção da reta a no plano 4), perpendicular a p_4 (a projeção da reta p no plano 4), o que nos garante a ortogonalidade entre as duas retas.

Por outro lado, e uma vez que a reta a é perpendicular à reta p , as duas retas têm de ser concorrentes. Assim, determinou-se o ponto I , o ponto de concorrência das duas retas, a partir da sua projeção no plano 4 (I_4) – I_2 situa-se sobre p_2 (a projeção frontal da reta p). Em seguida, determinou-se I_1 (a projeção horizontal do ponto I) em função do seu afastamento (que se manteve). Por fim, desenharam-se as projeções frontal e horizontal da reta a , que está definida por dois pontos – os pontos M e I .

Está concluída a **Etapa 1 do método geral para a determinação da distância de pontos a retas**.

Etapa 2. Determina-se o ponto de concorrência entre as duas retas. O ponto de concorrência das duas retas é o ponto I , já determinado na etapa anterior.

Etapa 3. A distância entre os dois pontos é a distância do ponto M à reta p . O segmento $[MI]$ é, assim, o segmento representativo da distância do ponto M à reta p , pelo que se desenharam as suas duas projeções.

O segmento $[MI]$ não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (no diedro de projeção inicial), pois é oblíquo a ambos os planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Note que no diedro formado pelo plano 2 e pelo plano 4, o segmento de reta $[MI]$ também não é paralelo a qualquer dos planos de projeção (quer ao plano 2, quer ao plano 4), pelo que também neste diedro de projeção se mantém a situação de que o segmento de reta não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção.

Para determinar a verdadeira grandeza da distância pretendida (que está deformada em ambas as projeções), optou-se por rebater o plano projetante frontal do segmento $[MI]$ para o plano frontal (de frente) φ que contém o ponto M (e cujo traço horizontal se desenhou imediatamente, passando por M_1). Para tal determinaram-se as projeções da charneira do rebatimento (a reta e), o que se processou de forma direta. A projeção horizontal (e_1) está coincidente com o traço horizontal do plano φ (h_φ), pois o plano φ é um plano projetante horizontal. A projeção frontal da charneira (e_2) está coincidente com a projeção frontal da reta a (a_2), pois o plano que contém o segmento $[MI]$ (e a reta a) é um plano projetante frontal.

O ponto M é um ponto da charneira, pelo que é fixo – roda sobre si próprio. Assim, tem-se imediatamente $M_r \equiv M_2$. Falta-nos rebater o ponto I . Conduziu-se, por I_2 , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento de I), sobre a qual se representou a distância do ponto I ao plano φ (o afastamento de I em relação a φ), determinando-se I_r .

Por fim, desenhou-se o segmento de reta que tem extremos em M_r e I_r – o segmento de reta $[M_r I_r]$ é o segmento de reta $[MI]$ rebatido e situa-se no plano φ (que é paralelo ao Plano Frontal de Projeção), pelo que está em verdadeira grandeza. $M_r I_r$ é a verdadeira grandeza da distância do ponto M à reta p , o que se identificou no desenho.

Traçado:

Os dados (as projeções da reta p) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X (que é a linha estruturante do exercício). O eixo $Y \equiv Z$ representou-se a **leve**, pois trata-se de uma linha de referência (auxiliar). O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso da reta a , dos traçados relativos à mudança do diedro de projeção efetuada e, ainda, dos traçados relativos ao rebatimento do plano projetante frontal de $[MI]$ para o plano φ , para a determinação da verdadeira grandeza de $[MI]$) representaram-se a **leve**.

102.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as retas f e f' , pelas respetivas projeções, em função dos dados.

Resolução:

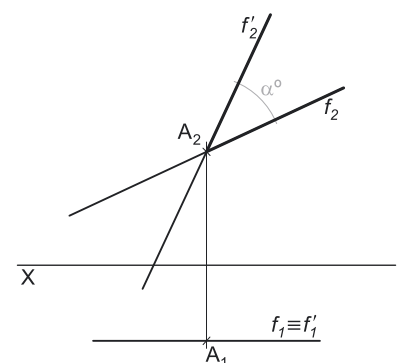
As duas retas são **concorrentes**, pelo que definem um plano – trata-se de um plano frontal (de frente). É pedido o ângulo entre as duas retas, ângulo esse que está contido no plano definido pelas duas retas – o plano frontal (de frente) que as duas retas definem.

O plano que contém o ângulo (o plano frontal que contém as duas retas) é paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pelo que o ângulo se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (a projeção frontal do ângulo está em verdadeira grandeza). O ângulo entre as duas retas é, assim, qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as projeções frontais das duas retas (f_2 e f'_2), com vértice em A_2 (a projeção frontal do ponto de concorrência das duas retas).

Identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com α° .

Traçado:

O eixo X representa-se a **médio** (é a linha estruturante do exercício). Os dados (as projeções das retas f e f') representaram-se igualmente a **médio**. O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). A linha restante representou-se a **leve**, pois trata-se de uma linha de chamada.



103.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as retas h e h' , pelas respectivas projeções, em função dos dados.

Resolução:

As duas retas são não coplanares (são **enviesadas**), pelo que não definem plano algum. Dessa forma, as duas retas não formam nenhum ângulo entre si, de forma direta. No entanto, o ângulo que as duas retas formam entre si (de forma indireta) é igual ao ângulo formado por quaisquer duas retas **concorrentes**, paralelas às retas dadas.

Assim, conduziu-se uma reta h'' , paralela à reta h' e concorrente com a reta h (no ponto P) – por uma questão de economia de traçados, optou-se por fazer a projeção horizontal da reta h'' (h''_1) coincidente com a projeção horizontal da reta h' (h'_1). As retas h e h'' são concorrentes no ponto P .

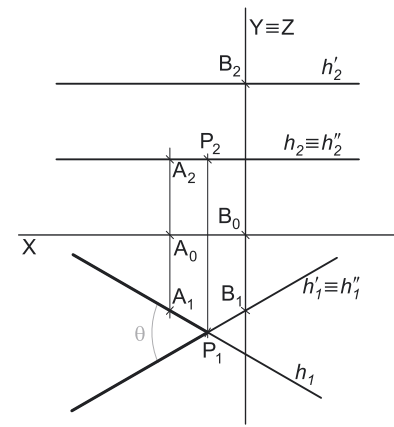
As retas h e h'' são concorrentes, pelo que definem um plano – trata-se de um plano horizontal (de nível). O ângulo entre as duas retas está contido no plano definido pelas duas retas – o plano horizontal (de nível) que as duas retas definem.

O plano que contém o ângulo (o plano horizontal que contém as duas retas) é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que o ângulo se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (a projeção horizontal do ângulo está em verdadeira grandeza). O ângulo que as retas h e h' formam entre si (de forma indireta) é, assim, qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as projeções horizontais das retas h e h'' (h_1 e h''_1), com vértice em P_1 (a projeção horizontal do ponto de concorrência das duas retas).

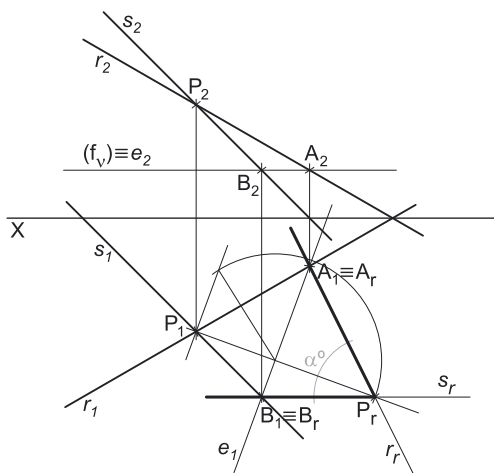
Identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com θ .

Traçado:

O eixo X representa-se a **médio** (é a linha estruturante do exercício). O eixo $Y \equiv Z$ representou-se a **leve**, pois é uma linha de referência (auxiliar). Os dados (as projeções das retas h e h') representaram-se igualmente a **médio**. O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso da reta h'').



104.



Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as retas r e s , pelas respectivas projeções, em função dos dados. A reta r é uma reta do $\beta_{1/3}$, pelo que tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo X (retas do $\beta_{1/3}$ têm as suas projeções simétricas em relação ao eixo X). A reta s tem as suas projeções paralelas entre si, pois é uma reta paralela ao $\beta_{2/4}$ (retas paralelas ao $\beta_{2/4}$ têm as suas projeções paralelas entre si).

Resolução:

As duas retas são **concorrentes**, pelo que definem um plano – trata-se de um plano oblíquo. É pedido o ângulo entre as duas retas, ângulo esse que está contido no plano definido pelas duas retas.

O plano que contém o ângulo (o plano oblíquo que contém as duas retas) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas) – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano definido pelas duas retas para um plano horizontal (de nível) qualquer. Nesse sentido, representou-se um plano horizontal (de nível) v , qualquer, pelo seu traço frontal. Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (reta e), que está definida por dois pontos – o

ponto A (o ponto de interseção da reta r com o plano v) e o ponto B (o ponto de interseção da reta s com o plano v). Os pontos A e B foram determinados diretamente a partir das suas projeções frontais, pois o plano v é um plano projetante frontal (trata-se da interseção de retas não projetantes com um plano projetante frontal).

Os pontos A e B são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se imediatamente $A_r \equiv A_1$ e $B_r \equiv B_1$. Já temos, em rebatimento, um ponto de cada uma das duas retas. Falta-nos um ponto ou uma direção de cada uma, para as definirmos em rebatimento. Para tal será conveniente o rebatimento do ponto P , que é o vértice do ângulo (e, por isso, é um ponto que pertence simultaneamente às duas retas).

O rebatimento do ponto P processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por P_1 conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediou-se a distância do ponto P ao plano v (a cota de P em relação ao plano v) e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto P em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro da charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto P , até à perpendicular à charneira que passa por P_1 , determinando P_r .

Em seguida, desenharam-se as duas retas em rebatimento. A reta r_r (a reta r rebatida) passa por A_r e P_r (está definida por dois pontos). A reta s_r (a reta s rebatida) passa por B_r e P_r (está igualmente definida por dois pontos).

A verdadeira grandeza do ângulo entre as retas r e s está, assim, em qualquer dos dois ângulos agudos formados entre r_r e s_r , com vértice em P_r . Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com α° .

Traçado:

O eixo X representa-se a **médio** (é a linha estruturante do exercício). Os dados (as projeções das retas r e s) representaram-se igualmente a **médio**. O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso do plano v e de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano que contém o ângulo).

105.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as retas m e n , pelas respectivas projeções, em função dos dados. A reta n tem as suas projeções paralelas entre si, pois é uma reta paralela ao $\beta_{2/4}$ (retas paralelas ao $\beta_{2/4}$ têm as suas projeções paralelas entre si).

Resolução:

As duas retas são não coplanares (são **enviesadas**), pelo que não definem plano algum. Dessa forma, as duas retas não formam nenhum ângulo entre si, de forma direta. No entanto, o ângulo que as duas retas formam entre si (de forma indireta) é igual ao ângulo formado por quaisquer duas retas **concorrentes**, paralelas às retas dadas.

Assim, conduziu-se, por um ponto P , da reta m , uma reta n' , paralela à reta n – as retas m e n' são concorrentes no ponto P . As duas retas são **concorrentes**, pelo que definem um plano – trata-se de um plano oblíquo. É pedido o ângulo entre as duas retas, ângulo esse que está contido no plano definido pelas duas retas.

O plano que contém o ângulo (o plano oblíquo que contém as retas m e n') não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas) – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano definido pelas duas retas para um plano horizontal (de nível) qualquer. Nesse sentido, representou-se um plano horizontal (de nível) v , qualquer, pelo seu traço frontal. Por uma questão de economia de traçados, optou-se por conduzir o plano v pelo ponto A . Dessa forma, o traço frontal do plano v ($(f_v) \equiv e_2$) passa por A_2 (a projeção frontal do ponto A), pois o plano v é projetante frontal. Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (reta e), que está definida por dois pontos – o ponto A (que é imediatamente o ponto de interseção da reta m com o plano v) e o ponto B (o ponto de interseção da reta n' com o plano v). O ponto B foi determinado diretamente a partir da sua projeção frontal, pois o plano v é um plano projetante frontal (trata-se da interseção entre uma reta não projetante e um plano projetante frontal).

Os pontos A e B são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se imediatamente $A_r \equiv A_1$ e $B_r \equiv B_1$. Já temos, em rebatimento, um ponto de cada uma das duas retas. Falta-nos um ponto ou uma direção de cada uma, para as definirmos em rebatimento. Para tal será conveniente o rebatimento do ponto P , que é o vértice do ângulo (e, por isso, é um ponto que pertence simultaneamente às duas retas).

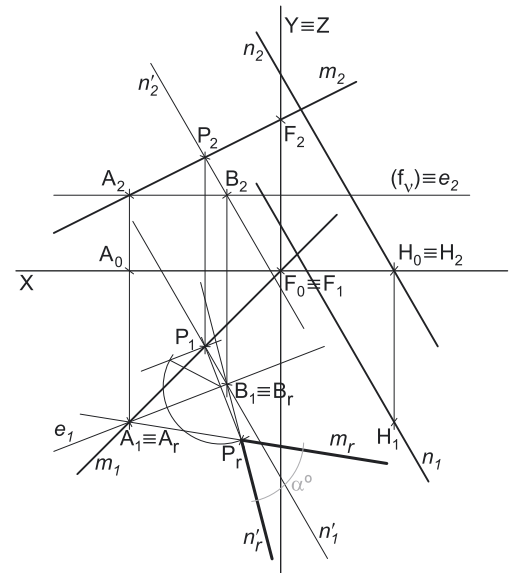
O rebatimento do ponto P processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por P_1 conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediu-se a distância do ponto P ao plano v (a cota de P em relação ao plano v) e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto P em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro da charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto P , até à perpendicular à charneira que passa por P_1 , determinando P_r .

Em seguida, desenharam-se as duas retas em rebatimento. A reta m_r (a reta m rebatida) passa por A_r e P_r (está definida por dois pontos). A reta n'_r (a reta n' rebatida) passa por B_r e P_r (está igualmente definida por dois pontos).

A verdadeira grandeza do ângulo que as retas m e n formam entre si (de forma indireta) está, assim, em qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas m_r e n'_r , com vértice em P_r . Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com α° .

Traçado:

O eixo X representa-se a **médio** (é a linha estruturante do exercício). O eixo $Y \equiv Z$ representou-se a **leve**, pois é uma linha de referência (auxiliar). Os dados (as projeções das retas m e n) representaram-se igualmente a **médio**. O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso da reta n' , do plano v e de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano que contém o ângulo).



106.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as retas n e p , pelas respectivas projeções, em função dos dados. A reta n tem as suas projeções paralelas entre si, pois é uma reta paralela ao $\beta_{2/4}$ (retas paralelas ao $\beta_{2/4}$ têm as suas projeções paralelas entre si). A reta p é uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**. A reta p está definida por dois pontos – os pontos A e B .

Resolução:

As duas retas são não coplanares (são **enviesadas**), pelo que não definem plano algum. Dessa forma, as duas retas não formam nenhum ângulo entre si, de forma direta. No entanto, o ângulo que as duas retas formam entre si (de forma indireta) é igual ao ângulo formado por quaisquer duas retas **concorrentes**, paralelas às retas dadas.

Assim, conduziu-se, pelo ponto B , da reta p , uma reta n' , paralela à reta n – as retas p e n' são concorrentes no ponto B . As duas retas são **concorrentes**, pelo que definem um plano – trata-se de um plano oblíquo. É pedido o ângulo entre as duas retas, ângulo esse que está contido no plano definido pelas duas retas.

O plano que contém o ângulo (o plano oblíquo que contém as retas p e n') não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas) – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano definido pelas duas retas para o plano frontal (de frente) φ que passa pelo ponto A . Nesse sentido, representou-se o plano frontal (de frente) pelo seu traço horizontal (h_φ), que passa por A_1 (a projeção horizontal do ponto A), pois o plano φ é projetante horizontal. Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (reta e), que está definida por dois pontos – o ponto A (que é imediatamente o ponto de interseção da reta p com o plano φ) e o ponto C (o ponto de interseção da reta n' com o plano φ). O ponto C foi determinado diretamente a partir da sua projeção horizontal, pois o plano φ é um plano projetante horizontal (trata-se da interseção entre uma reta não projetante e um plano projetante horizontal).

Note que, por uma questão de economia de traçados, seria sempre conveniente que o plano frontal (de frente) contivesse um dos pontos que define a reta p . No entanto, caso o plano φ passasse pelo ponto B (o ponto de concorrência das retas p e n'), a determinação da reta e (a charneira do rebatimento) não seria direta, como acima se expôs.

Os pontos A e C são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se imediatamente $A_r \equiv A_2$ e $C_r \equiv C_2$. Já temos, em rebatimento, um ponto de cada uma das duas retas. Falta-nos um ponto ou uma direção de cada uma, para as definirmos em rebatimento. Para tal será conveniente o rebatimento do ponto B , que é o vértice do ângulo (e, por isso, é um ponto que pertence simultaneamente às duas retas).

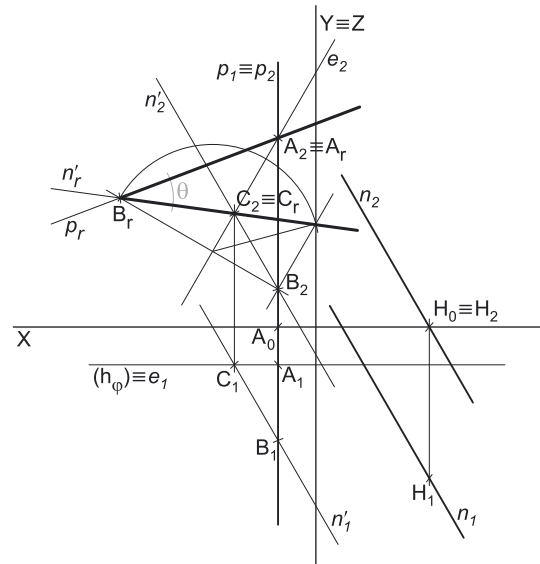
O rebatimento do ponto B processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por B_2 conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediu-se a distância do ponto B ao plano φ (o afastamento de B em relação ao plano φ) e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto B em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro da charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto B , até à perpendicular à charneira que passa por B_2 , determinando B_r .

Em seguida, desenharam-se as duas retas em rebatimento. A reta p_r (a reta p rebatida) passa por A_r e B_r (está definida por dois pontos). A reta n'_r (a reta n' rebatida) passa por C_r e B_r (está igualmente definida por dois pontos).

A verdadeira grandeza do ângulo que as retas p e n formam entre si (de forma indireta) está, assim, em qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas p_r e n'_r , com vértice em B_r . Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com θ .

Traçado:

O eixo X representa-se a **médio** (é a linha estruturante do exercício). O eixo $Y \equiv Z$ representou-se a **leve**, pois é uma linha de referência (auxiliar). Os dados (as projeções das retas n e p) representaram-se igualmente a **médio**. O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso da reta n' , do plano φ e de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano que contém o ângulo).



107.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as retas r e h , pelas respetivas projeções, em função dos dados. As projeções da reta r fazem, com o eixo X , ângulos iguais e com abertura para o mesmo lado, pois é uma reta paralela ao $\beta_{1/3}$ (retas paralelas ao $\beta_{1/3}$ são retas não passantes cujas projeções fazem, com o eixo X , ângulos iguais e com abertura para o mesmo lado).

Resolução:

As duas retas são não complanares (são **enviesadas**), pelo que não definem plano algum. Dessa forma, as duas retas não formam nenhum ângulo entre si, de forma direta. No entanto, o ângulo que as duas retas formam entre si (de forma indireta) é igual ao ângulo formado por quaisquer duas retas **concorrentes**, paralelas às retas dadas.

Assim, conduziu-se, pelo ponto T , da reta h , uma reta r' , paralela à reta r – as retas h e r' são concorrentes no ponto T . As duas retas são **concorrentes**, pelo que definem um plano – trata-se de um plano oblíquo. É pedido o ângulo entre as duas retas, ângulo esse que está contido no plano definido pelas duas retas.

O plano que contém o ângulo (o plano oblíquo que contém as retas h e r') não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas) – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano definido pelas duas retas para o plano horizontal (de nível) que contém a reta h . Nesse sentido, identificou-se o plano horizontal (de nível) v , pelo seu traço frontal, que está coincidente com h_2 (a projeção frontal da reta h), pois o plano v é projetante frontal. Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (reta e), que é a própria reta h (a reta h é, na prática, a reta de interseção do plano v com o plano definido pelas retas h e r').

Note que a opção de conduzir o plano v pela reta h teve a ver com economia de traçados. De facto, como acima se referiu, nesta situação a reta h é a própria charneira do rebatimento, pelo que não foi necessário determinar qualquer outra reta para além das já existentes no desenho.

A reta h (que é a charneira do rebatimento) roda sobre si própria, pelo que se tem imediatamente $h_r \equiv h_1$. Por outro lado, também o ponto T é um ponto da charneira, pelo que roda igualmente sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente $T_r \equiv T_1$. Já temos, em rebatimento, um ponto da reta r' e a reta h em rebatimento. Falta-nos um ponto ou uma direção, para definirmos a reta r' em rebatimento. Para tal recorreu-se a um ponto A , qualquer da reta r' , e efetuou-se o seu rebatimento.

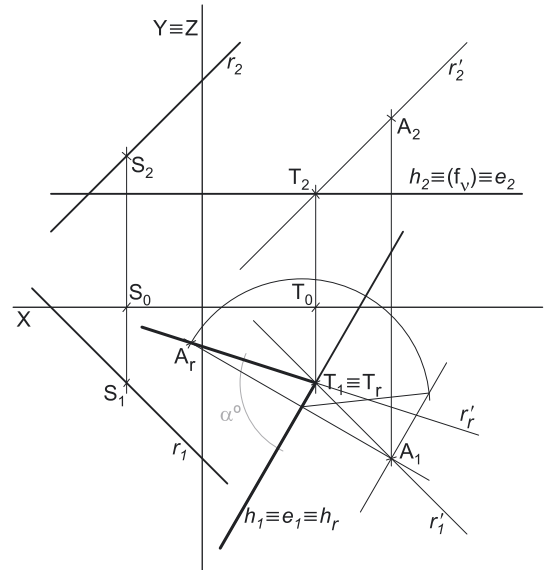
O rebatimento do ponto A processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por A_1 conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediu-se a distância do ponto A ao plano v (a cota de A em relação ao plano v) e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto A em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro da charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto A , até à perpendicular à charneira que passa por A_1 , determinando A_r .

Em seguida, desenhou-se a reta r' em rebatimento (a reta r'_r), que passa por T_r e A_r (está definida por dois pontos).

A verdadeira grandeza do ângulo que as retas r e h formam entre si (de forma indireta) está, assim, em qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas h_r e r'_r , com vértice em T_r . Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com α° .

Traçado:

O eixo X representa-se a **médio** (é a linha estruturante do exercício). O eixo $Y \equiv Z$ representou-se a **leve**, pois é uma linha de referência (auxiliar). Os dados (as projeções das retas r e h) representaram-se igualmente a **médio**. O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso da reta r' , do plano v e de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano que contém o ângulo).



108.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se a reta f , pelas suas projeções, em função dos dados.

Resolução:

O ângulo entre uma reta e um plano está contido no plano que contém a reta e é ortogonal ao plano dado – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre a reta dada e a reta de interseção entre os dois planos.

Assim, a determinação do ângulo entre a reta f e o Plano Horizontal de Projeção passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre uma reta e um plano**, que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se a reta de interseção entre os dois planos; **3.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado.

Etapa 1. Pela reta f conduziu-se um plano ortogonal ao Plano Horizontal de Projeção – o plano φ , que é um plano frontal (de frente). Um plano ortogonal ao Plano Horizontal de Projeção é um plano projetante horizontal. O plano φ é, assim, o plano projetante horizontal da reta f . O plano φ foi representado pelo seu traço horizontal (h_φ), que está coincidente com f_1 (a projeção horizontal da reta f).

Etapa 2. Determina-se a reta de interseção entre os dois planos. A reta de interseção entre os dois planos (o plano φ e o Plano Horizontal de Projeção) é o próprio traço horizontal do plano φ , que já foi determinado na etapa anterior.

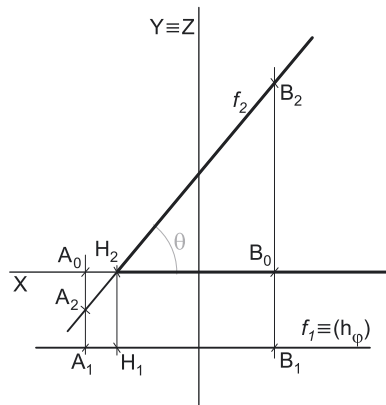
Etapa 3. O ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado. O ângulo pedido é, assim, o ângulo entre a reta f e h_φ (o traço horizontal do plano φ). Esse ângulo tem vértice no ponto de concorrência das duas retas, que é o ponto H (o traço horizontal da reta f).

Esse ângulo está contido no plano φ , que é paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pelo que o ângulo se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (a projeção frontal do ângulo não apresenta deformação). Tendo em conta que a projeção frontal de h_φ (o traço horizontal do plano φ) se situa no eixo X , o ângulo entre as duas retas (que é o ângulo entre a reta f e o Plano Horizontal de Projeção) é, assim, qualquer dos dois menores ângulos formados entre o eixo X e a projeção frontal da reta f (f_2), com vértice em H_2 (a projeção frontal do ponto H).

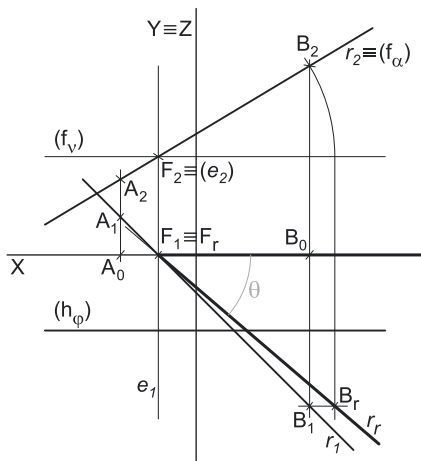
Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com θ .

Traçado:

O eixo X representa-se a **médio** (é a linha estruturante do exercício). O eixo $Y \equiv Z$ representou-se a **leve**, pois é uma linha de referência (auxiliar). Os dados (as projeções da reta f) representaram-se igualmente a **médio**. O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois são linhas de chamada.



109.



Dados:

Em primeiro lugar, representou-se a reta r , pelas suas projeções, bem como o plano φ , pelo seu traço horizontal, em função dos dados. O plano φ não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis).

Resolução:

O ângulo que uma reta faz com um dado plano é igual (tem a mesma amplitude) que o ângulo que essa reta faz com qualquer plano paralelo ao plano dado. Assim, sendo pedido o ângulo que a reta r faz com o plano φ , sabe-se imediatamente que esse ângulo é igual (tem a mesma amplitude) que o ângulo que a reta r faz com o Plano Frontal de Projeção (que é paralelo ao plano φ). Nesse sentido, optou-se por se determinar o ângulo que a reta r faz com o Plano Frontal de Projeção e não o ângulo que a reta r faz com o plano φ .

O ângulo entre uma reta e um plano está contido no plano que contém a reta e é ortogonal ao plano dado – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre a reta dada e a reta de interseção entre os dois planos. Assim, a determinação do ângulo entre a reta r e o Plano Frontal de Projeção passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre uma reta e um plano**, que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se a reta de interseção entre os dois planos; **3.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado.

Etapa 1. Pela reta r conduziu-se um plano ortogonal ao Plano Frontal de Projeção – o plano α . Um plano ortogonal ao Plano Frontal de Projeção é um plano projetante frontal. O plano α é, assim, o plano projetante frontal da reta r , pelo que o seu traço frontal (f_α) está coincidente com a projeção frontal da reta r (r_2). O plano α foi representado, apenas, pelo seu traço frontal (f_α), pelo que este se identificou entre parêntesis.

Etapa 2. Determina-se a reta de interseção entre os dois planos. A reta de interseção entre os dois planos (o plano α e o Plano Frontal de Projeção) é o próprio traço frontal do plano α (f_α), que já foi determinado na etapa anterior.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Etapa 3. O ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado. O ângulo pedido é, assim, o ângulo entre a reta r e f_α (o traço frontal do plano α). Esse ângulo tem vértice no ponto de concorrência das duas retas, que é o ponto F (o traço frontal da reta r).

Esse ângulo está contido no plano α , que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo rebatimento do plano α para o plano horizontal (de nível) v que passa pelo ponto F (o traço frontal da reta r). Assim, representou-se o plano v pelo seu traço frontal, que se identificou entre parêntesis (o plano v não tem traço horizontal) – f_v , passa por F_2 (a projeção frontal do ponto F), pois o plano v é projetante frontal.

Em seguida, identificou-se a charneira do rebatimento (reta e), que é a reta de interseção entre os dois planos (o plano α e o plano v) – a reta e é uma reta de topo (projetante frontal), pois trata-se da interseção entre dois planos projetantes frontais. A reta e está, assim, definida por um ponto (o ponto F) e por uma direção (é projetante frontal).

O ponto F é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente $F_r \equiv F_1$. Já temos um ponto para rebater a reta r . Falta-nos outro ponto ou uma direção. Recorreu-se ao rebatimento do ponto B – com o compasso, fazendo centro em e_2 e raio até B_2 , desenhou-se a projeção frontal do arco do rebatimento do ponto B até f_v (o rebatimento processou-se para o plano v). Tendo em conta que o ponto B , no seu rebatimento, mantém o afastamento (o arco do seu rebatimento está contido num plano frontal, ortogonal à charneira do rebatimento), determinou-se B_r , com o afastamento de B_1 . A reta r_r (a reta r rebatida) está definida por dois pontos – F_r e B_r .

O traço frontal do plano α (f_α), em rebatimento, fica coincidente com o traço frontal do plano v (f_v), apesar de não se ter identificado. O plano α já está rebatido no plano v e tudo o que está contido no plano v se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção, pois o plano v é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção. Assim, o ângulo entre as duas retas (a reta r e f_α) projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção.

O ângulo entre as duas retas (que é o ângulo entre a reta r e o plano φ) é, assim, qualquer dos dois menores ângulos formados entre o eixo X e a reta r_r (a reta r rebatida), com vértice em F_r . Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com θ .

Traçado:

O eixo X representa-se a **médio** (é a linha estruturante do exercício). O eixo $Y \equiv Z$ representou-se a **leve**, pois é uma linha de referência (auxiliar). Os dados (as projeções da reta r e o traço horizontal do plano φ) representaram-se igualmente a **médio**. O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do plano α , do plano v , da reta e e de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano α).

110.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se a reta r , pelas suas projeções, bem como o plano v , pelo seu traço frontal, em função dos dados. O plano v não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis. A reta r tem as suas projeções simétricas em relação ao eixo X , pois é uma reta do $\beta_{1/3}$ (retas do $\beta_{1/3}$ têm as suas projeções simétricas em relação ao eixo X).

Resolução:

O ângulo que uma reta faz com um dado plano é igual (tem a mesma amplitude) que o ângulo que essa reta faz com qualquer plano paralelo ao plano dado. Assim, sendo pedido o ângulo que a reta r faz com o plano v , sabe-se imediatamente que esse ângulo é igual (tem a mesma amplitude) que o ângulo que a reta r faz com o Plano Horizontal de Projeção (que é paralelo ao plano v). Nesse sentido, optou-se por se determinar o ângulo que a reta r faz com o Plano Horizontal de Projeção e não o ângulo que a reta r faz com o plano v .

O ângulo entre uma reta e um plano está contido no plano que contém a reta e é ortogonal ao plano dado – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre a reta dada e a reta de interseção entre os dois planos. Assim, a determinação do ângulo entre a reta r e o Plano Horizontal de Projeção passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre uma reta e um plano**, que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se a reta de interseção entre os dois planos; **3.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado.

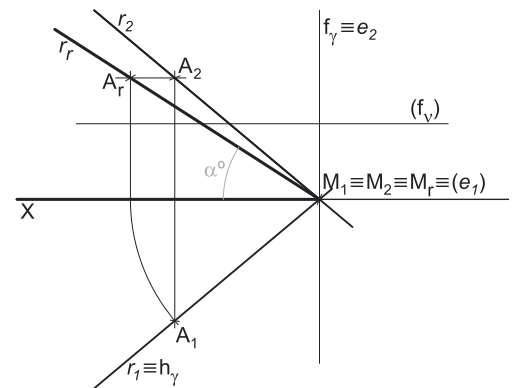
Etapa 1. Pela reta r conduziu-se um plano ortogonal ao Plano Horizontal de Projeção – o plano γ . Um plano ortogonal ao Plano Horizontal de Projeção é um plano projetante horizontal. O plano γ é, assim, o plano projetante horizontal da reta r , pelo que o seu traço horizontal (h_γ) está coincidente com a projeção horizontal da reta r (r_1).

Etapa 2. Determina-se a reta de interseção entre os dois planos. A reta de interseção entre os dois planos (o plano γ e o Plano Horizontal de Projeção) é o próprio traço horizontal do plano γ (h_γ), que já foi determinado na etapa anterior.

Etapa 3. O ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado. O ângulo pedido é, assim, o ângulo entre a reta r e h_γ (o traço horizontal do plano γ). Esse ângulo tem vértice no ponto de concorrência das duas retas, que é o ponto M (o ponto de concorrência da reta r com o eixo X).

Esse ângulo está contido no plano γ , que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo rebatimento do plano γ para o Plano Frontal de Projeção. Assim, identificou-se a charneira do rebatimento (reta e), que é o traço frontal do plano γ (f_γ), que roda sobre si próprio, pelo que se tem imediatamente $f_\gamma \equiv e_2 \equiv f_{\gamma_r}$. O traço horizontal do plano em rebatimento (h_{γ_r}) fica sobre o eixo X , pelo que se tem $X \equiv h_{\gamma_r}$.

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

O ponto **M** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente $M_r \equiv M_1 \equiv M_2$. Já temos um ponto para rebater a reta **r**. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Recorreu-se ao rebatimento do ponto **A** – com o compasso, fazendo centro em e_1 e raio até A_1 , desenhou-se a projeção horizontal do arco do rebatimento do ponto **A** até ao eixo **X**. Tendo em conta que o ponto **A**, no seu rebatimento, mantém a cota (o arco do seu rebatimento está contido num plano horizontal, ortogonal à charneira do rebatimento), determinou-se A_r , com a cota de A_2 . A reta r_r (a reta **r** rebatida) está definida por dois pontos – M_r e A_r .

O ângulo entre as duas retas (que é o ângulo entre a reta **r** e o plano v) é, assim, qualquer dos dois menores ângulos formados entre o eixo **X** (onde se situa h_{π_r}) e a reta r_r (a reta **r** rebatida), com vértice em M_r . Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com α° .

Traçado:

O eixo **X** representa-se a **médio** (é a linha estruturante do exercício). Os dados (as projeções da reta **r** e o traço frontal do plano v) representaram-se igualmente a **médio**. O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do plano γ e de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano γ).

111.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se a reta **p**, pelas suas projeções, bem como o plano v , pelo seu traço frontal, em função dos dados. O plano v não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis). A reta **p** está definida pelos pontos **M** e **N** mas, porque se trata de uma reta de perfil, as suas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**.

Resolução:

O ângulo que uma reta faz com um dado plano é igual (tem a mesma amplitude) que o ângulo que essa reta faz com qualquer plano paralelo ao plano dado. Assim, sendo pedido o ângulo que a reta **p** faz com o plano v , sabe-se imediatamente que esse ângulo é igual (tem a mesma amplitude) que o ângulo que a reta **p** faz com o Plano Horizontal de Projeção (que é paralelo ao plano v). Nesse sentido, optou-se por se determinar o ângulo que a reta **p** faz com o Plano Horizontal de Projeção e não o ângulo que a reta **r** faz com o plano v .

O ângulo entre uma reta e um plano está contido no plano que contém a reta e é ortogonal ao plano dado – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre a reta dada e a reta de interseção entre os dois planos. Assim, a determinação do ângulo entre a reta **p** e o Plano Horizontal de Projeção passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre uma reta e um plano**, que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se a reta de interseção entre os dois planos; **3.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado.

Etapla 1. Pela reta **p** conduziu-se um plano ortogonal ao Plano Horizontal de Projeção – o plano π . Um plano ortogonal ao Plano Horizontal de Projeção é um plano projetante horizontal. O plano π é, assim, o plano projetante horizontal da reta **p**, pelo que o seu traço horizontal (h_{π}) está coincidente com a projeção horizontal da reta **p** (p_1) – o plano π é um plano de perfil.

Etapla 2. Determina-se a reta de interseção entre os dois planos. A reta de interseção entre os dois planos (o plano π e o Plano Horizontal de Projeção) é o próprio traço horizontal do plano π (h_{π}), que já foi determinado na etapa anterior.

Etapla 3. O ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado. O ângulo pedido é, assim, o ângulo entre a reta **p** e h_{π} (o traço horizontal do plano π).

Esse ângulo está contido no plano π , que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo rebatimento do plano π para o Plano Frontal de Projeção. Assim, identificou-se a charneira do rebatimento (reta e), que é o traço frontal do plano π (f_{π}), que roda sobre si próprio, pelo que se tem imediatamente $f_{\pi} \equiv e_2 \equiv f_{\pi_r}$. O traço horizontal do plano em rebatimento (h_{π_r}) fica sobre o eixo **X**, pelo que se tem $X \equiv h_{\pi_r}$.

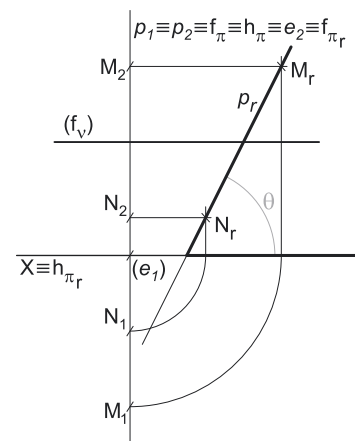
Em seguida, rebateu-se o ponto **M** – com o compasso, fazendo centro em e_1 e raio até M_1 , desenhou-se a projeção horizontal do arco do rebatimento do ponto **M** até ao eixo **X**. Tendo em conta que o ponto **M**, no seu rebatimento, mantém a cota (o arco do seu rebatimento está contido num plano horizontal, ortogonal à charneira do rebatimento), determinou-se M_r , com a cota de M_2 . O procedimento para o rebatimento do ponto **N** foi idêntico ao exposto para o ponto **M**. A reta p_r (a reta **p** rebatida) está definida por dois pontos – M_r e N_r .

O ângulo entre as duas retas (que é o ângulo entre a reta **p** e o plano v) é, assim, qualquer dos dois menores ângulos formados entre o eixo **X** (onde se situa h_{π_r}) e a reta p_r (a reta **p** rebatida). Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com θ .

Note que, na presente situação, a determinação do vértice do ângulo só se poderia processar em rebatimento mas que, na prática, tal não é necessário. Assim, como a figura ilustra, é possível identificar o ângulo pedido sem determinar (ou identificar) o seu vértice.

Traçado:

O eixo **X** representa-se a **médio** (é a linha estruturante do exercício). Os dados (as projeções da reta **p** e o traço frontal do plano v) representaram-se igualmente a **médio**. O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do plano π e de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano π).



112.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se a reta r , pelas suas projeções, bem como o plano θ , pelos seus traços, em função dos dados. As projeções da reta r fazem, com o eixo X , ângulos iguais e com abertura para o mesmo lado, pois a reta é paralela ao $\beta_{1/3}$ (retas paralelas ao $\beta_{1/3}$ são retas não passantes cujas projeções fazem, com o eixo X , ângulos iguais e com abertura para o mesmo lado).

Resolução:

O ângulo entre uma reta e um plano está contido no plano que contém a reta e é ortogonal ao plano dado – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre a reta dada e a reta de interseção entre os dois planos. Assim, a determinação do ângulo entre a reta r e o plano θ passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre uma reta e um plano**, que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se a reta de interseção entre os dois planos; **3.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado.

Etapa 1. Pela reta r conduziu-se um plano ortogonal ao plano θ . Esse plano está definido por duas retas concorrentes – a reta r e uma reta ortogonal ao plano θ e concorrente com a reta r (a reta p). Assim, pelo ponto A conduziu-se uma reta p , ortogonal ao plano θ . A reta p é uma reta frontal (de frente). O plano definido pelas retas r e p é o plano que contém a reta r e é ortogonal ao plano θ .

Etapa 2. Determina-se a reta de interseção entre os dois planos. A reta r' é a reta de interseção entre os dois planos e está definida por dois pontos – o ponto I (o ponto de interseção da reta r com o plano θ) e o ponto A' (o ponto de interseção da reta p com o plano θ). Os pontos I e A' foram determinados diretamente, a partir das suas projeções frontais, pois o plano θ é um plano projetante frontal. O ponto A' é, na prática, a projeção ortogonal do ponto A no plano θ , tal como a reta r' é, na prática, a projeção ortogonal da reta r no plano θ .

Etapa 3. O ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado. O ângulo pedido é, assim, o ângulo entre as retas r e r' .

Esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo rebatimento do plano definido pelas duas retas para o plano frontal (de frente) φ que contém a reta p . Assim, identificou-se o plano φ (pelo seu traço horizontal), bem como a charneira do rebatimento (reta e), que é a própria reta p (a reta p pertence aos dois planos – o plano φ e o plano definido pelas retas r e p).

Os pontos A e A' são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se imediatamente $A_r \equiv A_2$ e $A'_r \equiv A'_2$. Já temos, em rebatimento, um ponto de cada uma das duas retas. Falta-nos um ponto ou uma direção de cada uma, para as definirmos em rebatimento. Para tal será conveniente o rebatimento do ponto I , que é o vértice do ângulo (e, por isso, é um ponto que pertence simultaneamente às duas retas).

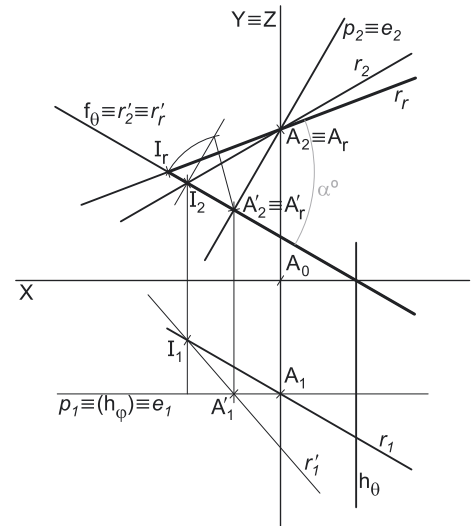
O rebatimento do ponto I processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por I_2 conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediu-se a distância do ponto I ao plano φ (o afastamento de I em relação ao plano φ) e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto I em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro da charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto I , até à perpendicular à charneira que passa por I_2 , determinando I_r .

Em seguida, desenharam-se as duas retas em rebatimento. A reta r_r (a reta r rebatida) passa por A_r e I_r (está definida por dois pontos). A reta r'_r (a reta r' rebatida) passa por A'_r e I_r (está igualmente definida por dois pontos). Note que a reta r'_r fica coincidente com f_0 e com r'_2 (a projeção frontal da reta r'), pois o plano θ é o plano que contém a reta r' e contém, ainda, os arcos do rebatimento de todos os pontos da reta (porque o plano θ é um plano ortogonal à charneira).

A verdadeira grandeza do ângulo formado entre a reta r e o plano θ está, assim, em qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas r_r e r'_r , com vértice em I_r . Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com α° .

Traçado:

O eixo X representa-se a **médio** (é a linha estruturante do exercício). O eixo $Y \equiv Z$ representou-se a **leve**, pois é uma linha de referência (auxiliar). Os dados (as projeções da reta r e os traços do plano θ) representaram-se igualmente a **médio**. O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta p , do plano φ e de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano que contém o ângulo).



113.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se a reta m , pelas suas projeções, bem como o plano δ , pelos seus traços, em função dos dados. O plano δ tem os seus traços simétricos em relação ao eixo X , pois é ortogonal ao $\beta_{1/3}$ (planos ortogonais ao $\beta_{1/3}$ têm os seus traços simétricos em relação ao eixo X).

Resolução:

O ângulo entre uma reta e um plano está contido no plano que contém a reta e é ortogonal ao plano dado – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre a reta dada e a reta de interseção entre os dois planos. Assim, a determinação do ângulo entre a reta m e o plano δ passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre uma reta e um plano**, que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se a reta de interseção entre os dois planos; **3.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado.

Etapa 1. Pela reta m conduziu-se um plano ortogonal ao plano δ . Esse plano está definido por duas retas concorrentes – a reta m e uma reta ortogonal ao plano δ e concorrente com a reta m (a reta p). Assim, pelo ponto M conduziu-se uma reta p , ortogonal ao plano δ . O plano definido pelas retas m e p é o plano que contém a reta m e é ortogonal ao plano δ .

Etapa 2. Determina-se a reta de interseção entre os dois planos. Tendo em conta que nem as retas m e p nem o plano δ são projetantes, a determinação dos pontos de interseção das retas m e p com o plano δ teria de se processar com o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**. Conclui-se, portanto, que, nesta situação, as interseções **não se processam de forma direta**.

Assim, é aconselhável o recurso ao **método do ângulo complementar**, que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano ortogonal ao plano dado (plano esse que fica definido por duas retas concorrentes – a reta dada e uma reta ortogonal ao plano e concorrente com a reta dada); **2.** determina-se o ângulo entre as duas retas; **3.** o ângulo entre a reta dada e o plano é o **ângulo complementar** do ângulo entre as duas retas.

Etapa 1. Esta primeira etapa já foi cumprida – o plano definido pela reta m (a reta dada) e a reta p (a reta concorrente com a reta m e ortogonal ao plano δ) é o plano que contém a reta m e é ortogonal ao plano δ .

Etapa 2. Determina-se o ângulo formado entre as duas retas (a reta m e a reta p). Esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano definido pelas duas retas para um plano frontal (de frente) φ qualquer. Nesse sentido, representou-se um plano frontal (de frente) φ , pelo seu traço horizontal – o plano φ não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal foi identificado entre parêntesis. Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (reta e), que é a reta de interseção entre os dois planos (o plano φ e o plano definido pelas retas m e p). A reta e (a charneira) está definida por dois pontos – o ponto A (o ponto de interseção da reta m com o plano φ) e o ponto B (o ponto de interseção da reta p com o plano φ). Os pontos A e B foram determinados a partir das respetivas projeções horizontais, pois o plano φ é um plano projetante horizontal.

Os pontos A e B são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se imediatamente $A_r \equiv A_2$ e $B_r \equiv B_2$. Já temos, em rebatimento, um ponto de cada uma das duas retas. Falta-nos um ponto ou uma direção de cada uma, para as definirmos em rebatimento. Para tal será conveniente o rebatimento do ponto M , que é o vértice do ângulo (e, por isso, é um ponto que pertence simultaneamente às duas retas).

O rebatimento do ponto M processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por M_2 conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediu-se a distância do ponto M ao plano φ (o afastamento de M em relação ao plano φ) e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto M em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro da charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto M , até à perpendicular à charneira que passa por M_2 , determinando M_r .

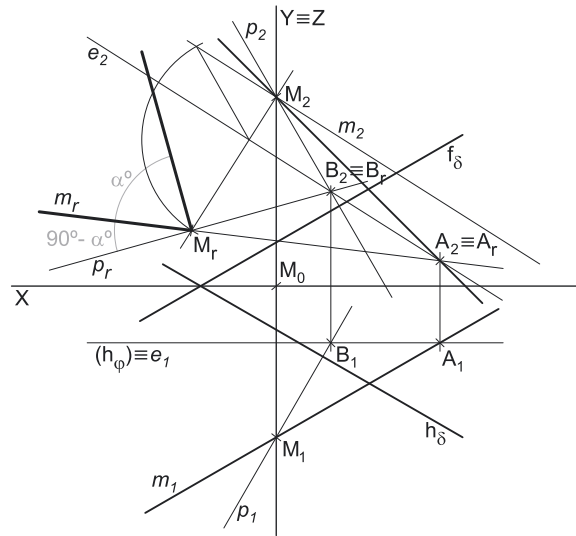
Em seguida, desenharam-se as duas retas em rebatimento. A reta m_r (a reta m rebatida) passa por A_r e M_r (está definida por dois pontos). A reta p_r (a reta p rebatida) passa por B_r e M_r (está igualmente definida por dois pontos). A verdadeira grandeza do ângulo formado entre as retas m e p está, assim, em qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas m_r e p_r , com vértice em M_r . Nesse sentido, assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com $90^\circ - \alpha^\circ$.

Etapa 3. O ângulo entre a reta m e o plano δ é o **ângulo complementar** do ângulo entre as retas m e p .

Nesse sentido, desenhou-se uma semirreta perpendicular a p_r e com extremidade em M_r . O ângulo entre esta semirreta e a reta m_r é o **ângulo complementar** do ângulo anterior, pelo que este ângulo é igual (tem a mesma amplitude) ao ângulo que a reta m faz com o plano δ . Assim, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com α° .

Traçado:

O eixo X representa-se a **médio** (é a linha estruturante do exercício). O eixo $Y \equiv Z$ representou-se a **leve**, pois é uma linha de referência (auxiliar). Os dados (as projeções da reta m e os traços do plano δ) representaram-se igualmente a **médio**. O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta p , do plano φ e de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano definido pelas retas m e p , que nos permitiram determinar o ângulo complementar do ângulo pretendido).



114.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se a reta r , pelas suas projeções, bem como o plano π (o plano de perfilado), pelos seus traços, em função dos dados. As projeções da reta r fazem, com o eixo X , ângulos iguais e com abertura para o mesmo lado, pois a reta é paralela ao $\beta_{1/3}$ (retas paralelas ao $\beta_{1/3}$ são retas não passantes cujas projeções fazem, com o eixo X , ângulos iguais e com abertura para o mesmo lado).

Resolução:

O ângulo entre uma reta e um plano está contido no plano que contém a reta e é ortogonal ao plano dado – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre a reta dada e a reta de interseção entre os dois planos. Assim, a determinação do ângulo entre a reta r e o plano π passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre uma reta e um plano**, que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se a reta de interseção entre os dois planos; **3.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado.

Etapla 1. Pela reta r conduziu-se um plano ortogonal ao plano π . Esse plano está definido por duas retas concorrentes – a reta r e uma reta ortogonal ao plano π e concorrente com a reta r (a reta p , que é uma reta fronto-horizontal). Assim, pelo ponto A conduziu-se uma reta p , fronto-horizontal. O plano definido pelas retas r e p é o plano que contém a reta r e é ortogonal ao plano π .

Etapla 2. Determina-se a reta de interseção entre os dois planos. A reta r' é a reta de interseção entre os dois planos e está definida por dois pontos – o ponto I (o ponto de interseção da reta r com o plano π) e o ponto A' (o ponto de interseção da reta p com o plano π). Os pontos I e A' foram determinados diretamente, pois o plano π é um plano duplamente projetante. O ponto A' é, na prática, a projeção ortogonal do ponto A no plano π , tal como a reta r' é, na prática, a projeção ortogonal da reta r no plano π . A reta r' é uma reta de perfil.

Etapla 3. O ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado. O ângulo pedido é, assim, o ângulo entre as retas r e r' .

Esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo rebatimento do plano definido pelas duas retas para o plano horizontal (de nível) v que contém a reta p . Assim, identificou-se o plano v (pelo seu traço frontal) bem como a charneira do rebatimento (reta e), que é a própria reta p (a reta p pertence aos dois planos – o plano v e o plano definido pelas retas r e p).

Os pontos A e A' são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se imediatamente $A_r \equiv A_1$ e $A'_r \equiv A'_1$. Já temos, em rebatimento, um ponto de cada uma das duas retas. Falta-nos um ponto ou uma direção de cada uma, para as definirmos em rebatimento. Para tal será conveniente o rebatimento do ponto I , que é o vértice do ângulo (e, por isso, é um ponto que pertence simultaneamente às duas retas).

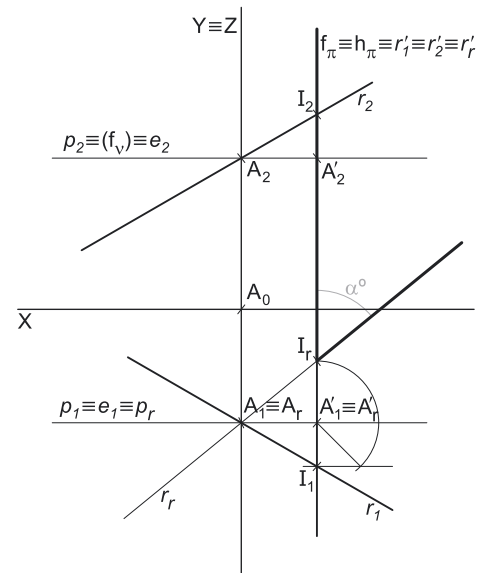
O rebatimento do ponto I processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por I_1 conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento e que é o próprio plano π) e uma paralela à charneira (que é p_1 , a projeção horizontal da reta p). Sobre a paralela à charneira mediu-se a distância do ponto I ao plano v (a cota de I em relação ao plano v) e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto I em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro da charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto I , até à perpendicular à charneira que passa por I_1 , determinando I_r .

Em seguida, desenharam-se as duas retas em rebatimento. A reta r_r (a reta r rebatida) passa por A_r e I_r (está definida por dois pontos). A reta r'_r (a reta r' rebatida) passa por A'_r e I_r (está igualmente definida por dois pontos). Note que a reta r'_r fica coincidente com $f_\pi \equiv h_\pi \equiv r'_1 \equiv r'_2$, pois o plano π é o plano que contém a reta r' e contém, ainda, os arcos do rebatimento de todos os pontos da reta (porque o plano π é um plano ortogonal à charneira).

A verdadeira grandeza do ângulo formado entre a reta r e o plano π está, assim, em qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas r_r e r'_r , com vértice em I_r . Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com α° .

Traçado:

O eixo X representa-se a **médio** (é a linha estruturante do exercício). O eixo $Y \equiv Z$ representou-se a **leve**, pois é uma linha de referência (auxiliar). Os dados (as projeções da reta r e os traços do plano π) representaram-se igualmente a **médio**. O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta p , do plano v e de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano que contém o ângulo).



115.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se a reta p , pelas suas projeções, bem como o plano p , pelos seus traços, em função dos dados. A reta p está definida pelos pontos A e B mas, porque se trata de uma reta de perfil, as suas projeções não verificam o **Crítério de Reversibilidade**.

Resolução:

O ângulo entre uma reta e um plano está contido no plano que contém a reta e é ortogonal ao plano dado – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre a reta dada e a reta de interseção entre os dois planos. Assim, a determinação do ângulo entre a reta p e o plano p passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre uma reta e um plano**, que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se a reta de interseção entre os dois planos; **3.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado.

Etapa 1. Pela reta p conduziu-se um plano ortogonal ao plano p – o plano π . Um plano ortogonal a um plano de rampa é um plano que contém a «família» de retas ortogonais ao plano de rampa, que é, necessariamente, uma «família» de retas de perfil. Assim, o plano tem de conter essa «família» de retas de perfil ortogonal ao plano de rampa) e contém, ainda, a reta p , que é outra reta de perfil. Constatou-se, assim, que o plano contém duas «famílias» de retas de perfil, pelo que o plano é necessariamente um plano de perfil – o plano π . O plano π é, pois, o plano projetante da reta p .

Etapa 2. Determina-se a reta de interseção entre os dois planos. Determinou-se a reta i , a reta de interseção entre os dois planos (o plano π e o plano p). A reta i é uma reta de perfil e está definida por dois pontos (os seus traços nos planos de projeção – os pontos F e H).

Etapa 3. O ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado. O ângulo pedido é, assim, o ângulo entre a reta p e a reta i .

Esse ângulo está contido no plano π , que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo recurso a uma mudança do diedro de projeção, de forma a transformar o plano π (o plano que contém o ângulo) num plano frontal (de frente).

Para tal é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção por um outro plano (o **plano 4**), paralelo ao plano π . Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);

- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo X (o eixo X') é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com $1/4$. Como o **plano 4** é paralelo ao plano π , o eixo X' é paralelo a h_π (o traço horizontal do plano π), ou seja, é perpendicular ao eixo X . As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo X' (o novo eixo X).

A_4 é a projeção do ponto A no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de A_4 ao eixo X' é igual à distância de A_2 ao eixo X (que é 1 cm – a cota de A). B_4 é a projeção do ponto B no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de B_4 ao eixo X' é igual à distância de B_2 ao eixo X (que é 2 cm – a cota de B). A projeção da reta p no **plano 4** (p_4) passa por A_4 e B_4 (está definida por dois pontos).

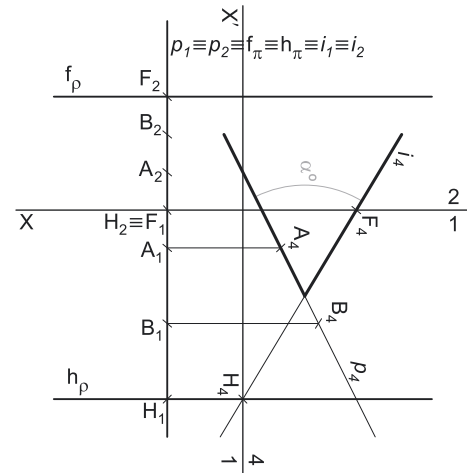
F_4 é a projeção do ponto F no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de F_4 ao eixo X' é igual à distância de F_2 ao eixo X (que é 3 cm – a cota de F). H_4 é a projeção do ponto H no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – H_4 situa-se no eixo X' , pois o ponto H tem cota nula. A projeção da reta i no **plano 4** (i_4) passa por F_4 e H_4 (está definida por dois pontos).

Tendo em conta que, no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), o plano π é um plano frontal (de frente), paralelo ao **plano 4**, o ângulo entre as duas retas projeta-se em verdadeira grandeza no **plano 4**. Assim, o ângulo entre as duas retas (que é o ângulo entre a reta p e o plano p) é qualquer dos dois menores ângulos formados entre p_4 e i_4 . Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com α° .

Note que, na presente situação, a determinação do vértice do ângulo só se poderia processar com o recurso a um processo geométrico auxiliar (como é o caso da mudança do diedro de projeção efetuada) mas que, na prática, tal não é necessário. Assim, como a figura ilustra, é possível identificar o ângulo pedido sem determinar (ou identificar) o seu vértice.

Traçado:

O eixo X representa-se a **médio** (é a linha estruturante do exercício). Os dados (as projeções da reta p e os traços do plano p) representaram-se igualmente a **médio**. O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso de todos os traçados necessários à mudança do diedro de projeção efetuada).



116.

Dados:

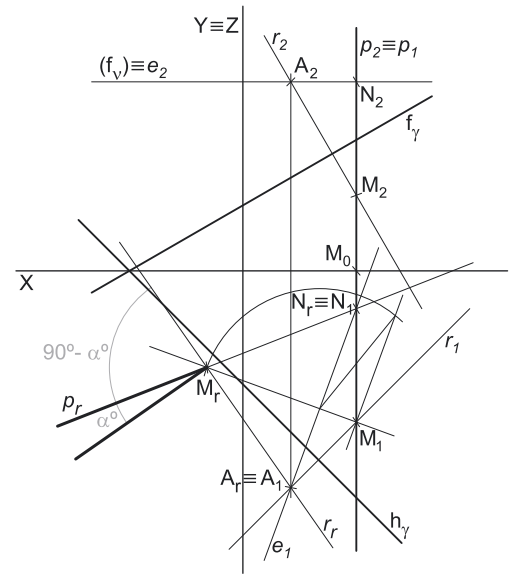
Em primeiro lugar, representou-se a reta p , pelas suas projeções, bem como o plano γ , pelos seus traços, em função dos dados. A reta p está definida pelos pontos M e N mas, porque se trata de uma reta de perfil, as suas projeções não verificam o **Crítério de Reversibilidade**.

Resolução:

O ângulo entre uma reta e um plano está contido no plano que contém a reta e é ortogonal ao plano dado – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre a reta dada e a reta de interseção entre os dois planos. Assim, a determinação do ângulo entre a reta p e o plano γ passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre uma reta e um plano**, que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se a reta de interseção entre os dois planos; **3.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado.

Etapa 1. Pela reta p conduziu-se um plano ortogonal ao plano γ . Esse plano está definido por duas retas concorrentes – a reta p e uma reta ortogonal ao plano γ e concorrente com a reta p (a reta r). Assim, pelo ponto M conduziu-se uma reta r , ortogonal ao plano γ . O plano definido pelas retas p e r é o plano que contém a reta p e é ortogonal ao plano γ .

Etapa 2. Determina-se a reta de interseção entre os dois planos. Tendo em conta que nem as retas p e r nem o plano γ são projetantes, a determinação dos pontos de interseção das retas p e r com o plano γ teria de se processar com o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**. Conclui-se, portanto, que, nesta situação, as interseções **não se processam de forma direta**.



Assim, é aconselhável o recurso ao **método do ângulo complementar**, que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano ortogonal ao plano dado (plano esse que fica definido por duas retas concorrentes – a reta dada e uma reta ortogonal ao plano e concorrente com a reta dada); **2.** determina-se o ângulo entre as duas retas; **3.** o ângulo entre a reta dada e o plano é o **ângulo complementar** do ângulo entre as duas retas.

Etapa 1. Esta primeira etapa já foi cumprida – o plano definido pela reta p (a reta dada) e a reta r (a reta concorrente com a reta p e ortogonal ao plano γ) é o plano que contém a reta p e é ortogonal ao plano γ .

Etapa 2. Determina-se o ângulo formado entre as duas retas (a reta p e a reta r). Esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano definido pelas duas retas para o plano horizontal (de nível) v que contém o ponto N , da reta p . Nesse sentido, representou-se o plano v , pelo seu traço frontal – o plano v não tem traço horizontal, pelo que o seu traço frontal foi identificado entre parêntesis. Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (reta e), que é a reta de interseção entre os dois planos (o plano v e o plano definido pelas retas p e r). A reta e (a charneira) está definida por dois pontos – o ponto A (o ponto de interseção da reta r com o plano v) e o ponto N (que é o ponto de interseção da reta p com o plano v). O ponto A foi determinado a partir da sua projeção frontal, pois o plano v é um plano projetante frontal.

Note que, por uma questão de economia de traçados, seria sempre conveniente que o plano horizontal (de nível) contivesse um dos pontos que define a reta p . No entanto, caso o plano v passasse pelo ponto M (o ponto de concorrência das retas p e r), a determinação da reta e (a charneira do rebatimento) não seria direta, como acima se expôs.

Os pontos A e N são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se imediatamente $A_r \equiv A_1$ e $N_r \equiv N_1$. Já temos, em rebatimento, um ponto de cada uma das duas retas. Falta-nos um ponto ou uma direção de cada uma, para as definirmos em rebatimento. Para tal será conveniente o rebatimento do ponto M , que é o vértice do ângulo (e, por isso, é um ponto que pertence simultaneamente às duas retas).

O rebatimento do ponto M processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por M_1 conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediu-se a distância do ponto M ao plano v (a cota de M em relação ao plano v) e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto M em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro da charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto M , até à perpendicular à charneira que passa por M_1 , determinando M_r .

Em seguida, desenharam-se as duas retas em rebatimento. A reta p_r (a reta p rebatida) passa por M_r e N_r (está definida por dois pontos). A reta r_r (a reta r rebatida) passa por A_r e M_r (está igualmente definida por dois pontos). A verdadeira grandeza do ângulo formado entre as retas p e r está, assim, em qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas p_r e r_r , com vértice em M_r . Nesse sentido, assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com $90^\circ - \alpha^\circ$.

Etapa 3. O ângulo entre a reta p e o plano γ é o **ângulo complementar** do ângulo entre as retas p e r .

Nesse sentido, desenhou-se uma semirreta perpendicular a r_r e com extremidade em M_r . O ângulo entre esta semirreta e a reta p_r é o **ângulo complementar** do ângulo anterior, pelo que este ângulo é igual (tem a mesma amplitude) ao ângulo que a reta p faz com o plano γ . Assim, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com α° .

Traçado:

O eixo X representa-se a **médio** (é a linha estruturante do exercício). O eixo $Y \equiv Z$ representou-se a **leve**, pois é uma linha de referência (auxiliar). Os dados (as projeções da reta p e os traços do plano γ) representaram-se igualmente a **médio**. O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta r , do plano v e de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano definido pelas retas p e r , que nos permitiram determinar o ângulo complementar do ângulo pretendido).

117.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os planos θ e v pelos respectivos traços, em função dos dados. O plano v não tem traço horizontal, pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

Resolução:

O ângulo entre dois planos está contido num plano ortogonal aos dois planos (um plano ortogonal à aresta do diedro) – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre as retas de interseção dos dois planos dados com o plano ortogonal à aresta do diedro. Assim, a determinação do ângulo entre o plano θ e o plano v passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em quatro etapas, a saber: **1.** Identifica-se a aresta do diedro; **2.** conduz-se um plano ortogonal à aresta do diedro (que é um plano ortogonal aos dois planos); **3.** determinam-se as retas de interseção desse plano com os dois planos dados; **4.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.

Etapla 1. Identificou-se a aresta do diedro. A aresta do diedro formado pelos planos θ e v é a reta de interseção entre os dois planos, que são dois planos projetantes frontais. Assim, a reta de interseção entre os dois planos é necessariamente uma reta projetante frontal (uma reta de topo), que é a única «família» de retas que os dois planos têm em comum. A aresta do diedro está, assim, identificada (mas não determinada, pois não é necessária a sua determinação) – é uma reta de topo.

Etapla 2. Conduziu-se um plano ortogonal à aresta do diedro. Um plano ortogonal a uma reta de topo é necessariamente um plano frontal (de frente). Nesse sentido, considerou-se o Plano Frontal de Projeção como o plano ortogonal à aresta do diedro.

Etapla 3. Determinam-se as retas de interseção do plano ortogonal à aresta do diedro com os dois planos dados. O traço frontal do plano θ (f_θ) é a reta de interseção do plano θ com o Plano Frontal de Projeção. O traço frontal do plano v (f_v) é a reta de interseção do plano v com o Plano Frontal de Projeção.

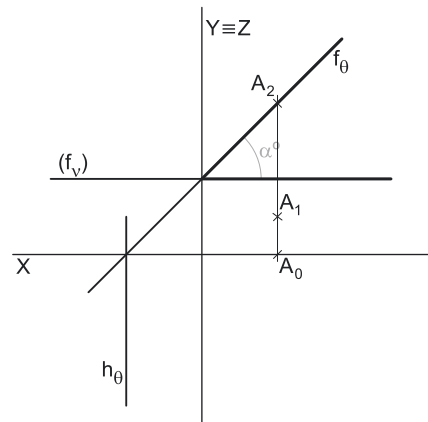
Etapla 4. O ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos. O ângulo formado entre f_θ e f_v é, assim, o ângulo formado entre os planos θ e v – esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que é o próprio Plano Frontal de Projeção. Assim, o ângulo está em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (em projeção frontal).

A verdadeira grandeza do ângulo formado entre os planos θ e v está, assim, em qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas f_θ e f_v . Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com α° .

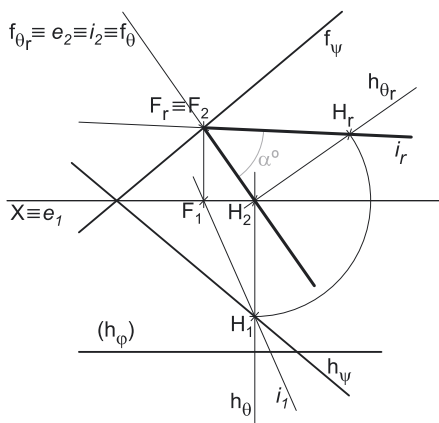
Note que, na presente situação, a determinação do vértice do ângulo não é necessária. De facto, como a figura ilustra, é possível identificar o ângulo pedido sem determinar (ou identificar) o seu vértice.

Traçado:

O eixo X representa-se a **médio** (é a linha estruturante do exercício). Os dados (os traços dos planos θ e v) representaram-se igualmente a **médio**. O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou é uma linha de chamada ou é uma linha auxiliar (caso do eixo $Y \equiv Z$, que é uma linha de referência).



118.



Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os planos ψ e ϕ pelos respectivos traços, em função dos dados. O plano ϕ não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis. O plano ψ tem os seus traços simétricos em relação ao eixo X , pois é ortogonal ao $\beta_{1/3}$ (planos ortogonais ao $\beta_{1/3}$ têm os seus traços simétricos em relação ao eixo X).

Resolução:

O ângulo que um dado plano faz com outro plano é igual (tem a mesma amplitude) que o ângulo que o plano dado faz com qualquer plano paralelo ao segundo plano. Assim, sendo pedido o ângulo que o plano ψ faz com o plano ϕ , sabe-se imediatamente que esse ângulo é igual (tem a mesma amplitude) que o ângulo que o plano ψ faz com o Plano Frontal de Projeção (que é paralelo ao plano ϕ). Nesse sentido, optou-se por se determinar o ângulo que o plano ψ faz com o Plano Frontal de Projeção e não o ângulo que o plano ψ faz com o plano ϕ .

O ângulo entre dois planos está contido num plano ortogonal aos dois planos (um plano ortogonal à aresta do diedro) – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre as retas de interseção dos dois planos dados com o plano ortogonal à aresta do diedro. Assim, a determinação do ângulo entre o plano ψ e o Plano Frontal de Projeção passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em quatro etapas, a saber: **1.** Identifica-se a aresta do diedro; **2.** conduz-se um plano ortogonal à aresta do diedro (que é um plano ortogonal aos dois planos); **3.** determinam-se as retas de interseção desse plano com os dois planos dados; **4.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.

Etapla 1. Identificou-se a aresta do diedro. A aresta do diedro formado pelo plano ψ e pelo Plano Frontal de Projeção é f_ψ (o traço frontal do plano ψ), que é uma reta frontal (de frente) do plano ψ .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Etapa 2. Conduziu-se um plano ortogonal à aresta do diedro. Um plano ortogonal a uma reta frontal (de frente) é necessariamente um plano de topo (projetante frontal). Assim, o plano θ (plano de topo) é o plano ortogonal a f_ψ – o plano ortogonal à aresta do diedro.

Etapa 3. Determinam-se as retas de interseção do plano ortogonal à aresta do diedro com os dois planos dados. O traço frontal do plano θ (f_θ) é a reta de interseção do plano θ com o Plano Frontal de Projeção. A reta i , definida pelos seus traços, é a reta de interseção do plano θ com o plano ψ – a reta i está definida por dois pontos (os pontos **F** e **H**).

Etapa 4. O ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos. Assim, o ângulo formado entre f_θ e a reta i é, então, o ângulo formado entre os planos ψ e φ – esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que é o próprio plano θ .

O plano que contém o ângulo (o plano θ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo recurso ao rebatimento do plano θ para o Plano Frontal de Projeção. A charneira do rebatimento é f_θ (o traço frontal do plano θ), que roda sobre si próprio, pelo que se tem, imediatamente, $f_\theta \equiv e_2 \equiv f_{\theta_r}$. Já temos uma das retas em rebatimento – f_θ . Falta-nos rebater a reta i . O ponto **F** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente $F_r \equiv F_2$. Já temos um ponto para definir a reta i em rebatimento. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Rebateu-se o ponto **H** (o traço horizontal da reta i), transportando o seu afastamento para h_{θ_r} , com o recurso ao compasso, o que nos permitiu determinar H_r . A reta i_r (a reta i em rebatimento) está definida por dois pontos – F_r e H_r .

A verdadeira grandeza do ângulo formado entre os planos ψ e φ está, assim, em qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas f_{θ_r} e i_r , com vértice em F_r . Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com α° .

Traçado:

O eixo **X** representa-se a **médio** (é a linha estruturante do exercício). Os dados (os traços dos planos ψ e φ) representaram-se igualmente a **médio**. O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do plano θ , da reta i e de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano θ).

119.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano λ pelos seus traços, em função dos dados. O plano λ tem os seus traços coincidentes, pois é ortogonal ao $\beta_{2/4}$ (planos ortogonais ao $\beta_{2/4}$ têm os seus traços coincidentes).

Resolução:

O ângulo entre dois planos está contido num plano ortogonal aos dois planos (um plano ortogonal à aresta do diedro) – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre as retas de interseção dos dois planos dados com o plano ortogonal à aresta do diedro. Assim, a determinação do ângulo entre o plano λ e o Plano Horizontal de Projeção passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em quatro etapas, a saber: **1.** Identificou-se a aresta do diedro; **2.** conduziu-se um plano ortogonal à aresta do diedro (que é um plano ortogonal aos dois planos); **3.** determinam-se as retas de interseção desse plano com os dois planos dados; **4.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.

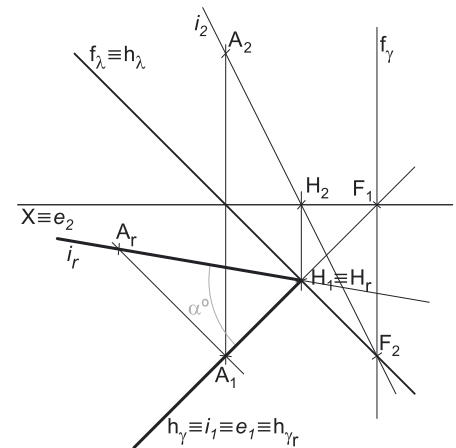
Etapa 1. Identificou-se a aresta do diedro. A aresta do diedro formado pelo plano λ e pelo Plano Horizontal de Projeção é h_λ (o traço horizontal do plano λ), que é uma reta horizontal (de nível) do plano λ .

Etapa 2. Conduziu-se um plano ortogonal à aresta do diedro. Um plano ortogonal a uma reta horizontal (de nível) é necessariamente um plano vertical (projetante horizontal). Assim, o plano γ (plano vertical) é o plano ortogonal a h_λ – o plano ortogonal à aresta do diedro.

Etapa 3. Determinam-se as retas de interseção do plano ortogonal à aresta do diedro com os dois planos dados. O traço horizontal do plano γ (h_γ) é a reta de interseção do plano γ com o Plano Horizontal de Projeção. A reta i , definida pelos seus traços, é a reta de interseção do plano γ com o plano λ – a reta i está definida por dois pontos (os pontos **F** e **H**).

Etapa 4. O ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos. Assim, o ângulo formado entre h_γ e a reta i é, então, o ângulo formado entre o plano λ e o Plano Horizontal de Projeção – esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que é o próprio plano γ .

O plano que contém o ângulo (o plano γ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo recurso ao rebatimento do plano γ para o Plano Horizontal de Projeção. A charneira do rebatimento é h_γ (o traço horizontal do plano γ), que roda sobre si próprio, pelo que se tem, imediatamente, $h_\gamma \equiv e_1 \equiv h_{\gamma_r}$. Já temos uma das retas em rebatimento – h_γ . Falta-nos rebater a reta i . O ponto **H** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente $H_r \equiv H_1$. Já temos um ponto para definir a reta i em rebatimento. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Rebateu-se o ponto **A**, qualquer, pertencente à reta i – o ponto **A** foi rebatido de forma direta. Sobre a perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento), marcou-se a cota do ponto **A**, que é o raio do arco do seu rebatimento, determinando A_r . A reta i_r (a reta i em rebatimento) está definida por dois pontos – H_r e A_r .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A verdadeira grandeza do ângulo formado entre o plano λ e o Plano Horizontal de Projeção está, assim, em qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas h_p e i_r , com vértice em H_r . Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com α° .

Traçado:

O eixo X representa-se a **médio** (é a linha estruturante do exercício). Os dados (os traços do plano λ) representaram-se igualmente a **médio**. O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do plano γ , da reta i e de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano γ).

120.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os planos ρ e v pelos respetivos traços, em função dos dados. O plano v não tem traço horizontal, pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

Resolução:

O ângulo que um dado plano faz com outro plano é igual (tem a mesma amplitude) que o ângulo que o plano dado faz com qualquer plano paralelo ao segundo plano. Assim, sendo pedido o ângulo que o plano ρ faz com o plano v , sabe-se imediatamente que esse ângulo é igual (tem a mesma amplitude) que o ângulo que o plano ρ faz com o Plano Horizontal de Projeção (que é paralelo ao plano v). Nesse sentido, optou-se por se determinar o ângulo que o plano ρ faz com o Plano Horizontal de Projeção e não o ângulo que o plano ρ faz com o plano v .

O ângulo entre dois planos está contido num plano ortogonal aos dois planos (um plano ortogonal à aresta do diedro) – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre as retas de interseção dos dois planos dados com o plano ortogonal à aresta do diedro. Assim, a determinação do ângulo entre o plano ρ e o Plano Horizontal de Projeção passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em quatro etapas, a saber: **1.** Identifica-se a aresta do diedro; **2.** conduz-se um plano ortogonal à aresta do diedro (que é um plano ortogonal aos dois planos); **3.** determinam-se as retas de interseção desse plano com os dois planos dados; **4.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.

Etapla 1. Identificou-se a aresta do diedro. A aresta do diedro formado pelo plano ρ e pelo Plano Horizontal de Projeção é h_p (o traço horizontal do plano ρ) – a reta de interseção entre os dois planos é necessariamente uma reta fronto-horizontal, que é a única «família» de retas que os dois planos têm em comum. A aresta do diedro está, assim, identificada (mas não determinada, pois não é necessária a sua determinação) – é uma reta fronto-horizontal.

Etapla 2. Conduziu-se um plano ortogonal à aresta do diedro. Um plano ortogonal a uma reta fronto-horizontal é necessariamente um plano de perfil (duplamente projetante). Assim, o plano π (plano de perfil) é o plano ortogonal a h_p – o plano ortogonal à aresta do diedro.

Etapla 3. Determinam-se as retas de interseção do plano ortogonal à aresta do diedro com os dois planos dados. O traço horizontal do plano π (h_π) é a reta de interseção do plano π com o Plano Horizontal de Projeção. A reta i , definida pelos seus traços, é a reta de interseção do plano π com o plano ρ – a reta i está definida por dois pontos (os pontos F e H).

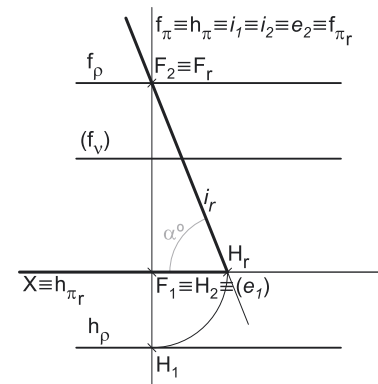
Etapla 4. O ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos. Assim, o ângulo formado entre h_p e a reta i é, então, o ângulo formado entre os planos ρ e v – esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que é o próprio plano π .

O plano que contém o ângulo (o plano π) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo recurso ao rebatimento do plano π para o Plano Frontal de Projeção. A charneira do rebatimento é f_π (o traço frontal do plano π), que roda sobre si próprio, pelo que se tem, imediatamente, $f_\pi \equiv e_2 \equiv f_{\pi_r}$. Já temos uma das retas em rebatimento – f_π . Falta-nos rebater a reta i . O ponto F é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente $F_r \equiv F_2$. Já temos um ponto para definir a reta i em rebatimento. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Rebateu-se o ponto H (o traço horizontal da reta i), desenhando o arco do seu rebatimento (que está contido no Plano Horizontal de Projeção) com o recurso ao compasso, o que nos permitiu determinar H_r . A reta i_r (a reta i em rebatimento) está definida por dois pontos – F_r e H_r .

A verdadeira grandeza do ângulo formado entre os planos ρ e v está, assim, em qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas h_π e i_r , com vértice em H_r . Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com α° .

Traçado:

O eixo X representa-se a **médio** (é a linha estruturante do exercício). Os dados (os traços dos planos ρ e v) representaram-se igualmente a **médio**. O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do plano π , da reta i e de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano π).



121.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os planos α e θ pelos respectivos traços, em função dos dados.

Resolução:

O ângulo entre dois planos está contido num plano ortogonal aos dois planos (um plano ortogonal à aresta do diedro) – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre as retas de interseção dos dois planos dados com o plano ortogonal à aresta do diedro. Assim, a determinação do ângulo entre os planos α e θ passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em quatro etapas, a saber: **1.** Identifica-se a aresta do diedro; **2.** conduz-se um plano ortogonal à aresta do diedro (que é um plano ortogonal aos dois planos); **3.** determinam-se as retas de interseção desse plano com os dois planos dados; **4.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.

Etapa 1. Identificar a aresta do diedro. A aresta do diedro formado pelos planos α e θ (a reta de interseção entre os dois planos) é necessariamente uma reta oblíqua, cuja direção não é conhecida – é necessária a determinação da reta para a sua correta identificação.

Etapa 2. Conduzir um plano ortogonal à aresta do diedro. Um plano ortogonal a uma reta oblíqua é necessariamente um plano oblíquo (um **plano não projetante**). No entanto, sem a prévia determinação da reta de interseção entre os dois planos, não é possível conduzir, de forma direta, qualquer plano ortogonal à aresta do diedro.

Nesse sentido, conclui-se que o plano ortogonal à aresta do diedro **não tem determinação direta nem é projetante**, pelo que, nesta situação, é aconselhável o recurso ao **2º método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em duas etapas, a saber: **1.** Por um ponto exterior qualquer, conduzem-se duas retas ortogonais, individualmente, a cada um dos planos (essas duas retas definem, na prática, um plano ortogonal aos dois planos e, por isso, ortogonal à aresta do diedro); **2.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.

Etapa 1. Por um ponto P , exterior aos dois planos, conduziram-se duas retas – a reta p , ortogonal ao plano α , e a reta p' , ortogonal ao plano θ . A reta p' é uma reta frontal (de frente). As duas retas, porque são concorrentes, definem um plano – esse plano é um plano ortogonal à aresta dos diedros (é um plano ortogonal aos dois planos dados) e é o plano que contém o ângulo.

Etapa 2. O ângulo formado entre as duas retas (a reta p e a reta p') é o ângulo formado entre os dois planos (os planos α e θ). Esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano definido pelas duas retas para o plano frontal (de frente) φ que contém a reta p' . Esta opção teve a ver com a economia de traçados que tal permite. Nesse sentido, identificou-se o plano φ , pelo seu traço horizontal – o plano φ não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal foi identificado entre parêntesis. Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (reta e), que é a própria reta p' – a reta p' é uma reta que pertence aos dois planos (é reta de interseção entre os dois planos), pelo que é, imediatamente a charneira do rebatimento.

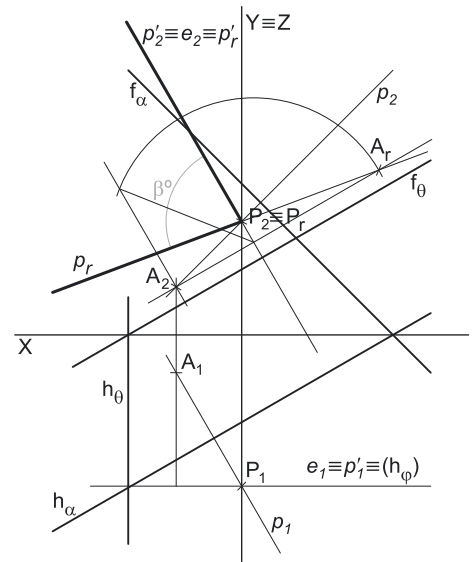
A reta p' é a própria charneira, pelo que roda sobre si própria – tem-se imediatamente, $p'_r \equiv p'_2$. O ponto P é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente $P_r \equiv P_2$. Já temos, em rebatimento, um ponto para definir a reta p em rebatimento. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Para tal recorreu-se ao rebatimento de um ponto A , qualquer, pertencente à reta p .

O rebatimento do ponto A processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por A_2 conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediu-se a distância do ponto A ao plano φ (o afastamento de A em relação ao plano φ) e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto A em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro da charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto A , até à perpendicular à charneira que passa por A_2 , determinando A_r .

Em seguida, desenhou-se a reta p em rebatimento. A reta p_r (a reta p rebatida) passa por P_r e A_r (está definida por dois pontos). O ângulo as retas p_r e p'_r é o ângulo entre os dois planos – o ângulo entre os planos α e θ é, pois, qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas p_r e p'_r , com vértice em P_r . Assim, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com β° .

Traçado:

O eixo X representa-se a **médio** (é a linha estruturante do exercício). O eixo $Y \equiv Z$ representou-se a **leve**, pois é uma linha de referência (auxiliar). Os dados (os traços dos planos α e θ) representaram-se igualmente a **médio**. O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas p e p' , do plano φ e de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano definido pelas retas p e p').



122.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os planos α e δ pelos respectivos traços, em função dos dados. O plano α tem os seus traços simétricos em relação ao eixo X , pois é ortogonal ao $\beta_{1/3}$ (planos ortogonais ao $\beta_{1/3}$ têm os seus traços simétricos em relação ao eixo X).

Resolução:

O ângulo entre dois planos está contido num plano ortogonal aos dois planos (um plano ortogonal à aresta do diedro) – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre as retas de interseção dos dois planos dados com o plano ortogonal à aresta do diedro. Assim, a determinação do ângulo entre os planos α e δ passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em quatro etapas, a saber: **1.** Identifica-se a aresta do diedro; **2.** conduz-se um plano ortogonal à aresta do diedro (que é um plano ortogonal aos dois planos); **3.** determinam-se as retas de interseção desse plano com os dois planos dados; **4.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.

Etapla 1. Identificar a aresta do diedro. A aresta do diedro formado pelos planos α e δ (a reta de interseção entre os dois planos) é necessariamente uma reta oblíqua, cuja direção não é conhecida – é necessária a determinação da reta para a sua correta identificação.

Etapla 2. Conduzir um plano ortogonal à aresta do diedro. Um plano ortogonal a uma reta oblíqua é necessariamente um plano oblíquo (um **plano não projetante**). No entanto, sem a prévia determinação da reta de interseção entre os dois planos, não é possível conduzir, de forma direta, qualquer plano ortogonal à aresta do diedro.

Nesse sentido, conclui-se que o plano ortogonal à aresta do diedro **não tem determinação direta nem é projetante**, pelo que, nesta situação, é aconselhável o recurso ao **2º método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em duas etapas, a saber: **1.** Por um ponto exterior qualquer, conduzem-se duas retas ortogonais, individualmente, a cada um dos planos (essas duas retas definem, na prática, um plano ortogonal aos dois planos e, por isso, ortogonal à aresta do diedro); **2.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.

Etapla 1. Por um ponto P , exterior aos dois planos, conduziram-se duas retas – a reta p , ortogonal ao plano α , e a reta p' , ortogonal ao plano δ . As duas retas, porque são concorrentes, definem um plano – esse plano é um plano ortogonal à aresta dos diedros (é um plano ortogonal aos dois planos dados) e é o plano que contém o ângulo.

Etapla 2. O ângulo formado entre as duas retas (a reta p e a reta p') é o ângulo formado entre os dois planos (os planos α e δ). Esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano definido pelas duas retas para um plano horizontal (de nível) v , qualquer. Nesse sentido, representou-se um plano horizontal (de nível) v , pelo seu traço frontal – o plano v não tem traço horizontal, pelo que o seu traço frontal foi identificado entre parêntesis. Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (reta e), que é a reta de interseção entre os dois planos (o plano v e o plano definido pelas retas p e p'). A reta e (a charneira) está definida por dois pontos – o ponto A (o ponto de interseção da reta p com o plano v) e o ponto B (o ponto de interseção da reta p' com o plano v). Os pontos A e B foram determinados a partir das respetivas projeções frontais, pois o plano v é um plano projetante frontal.

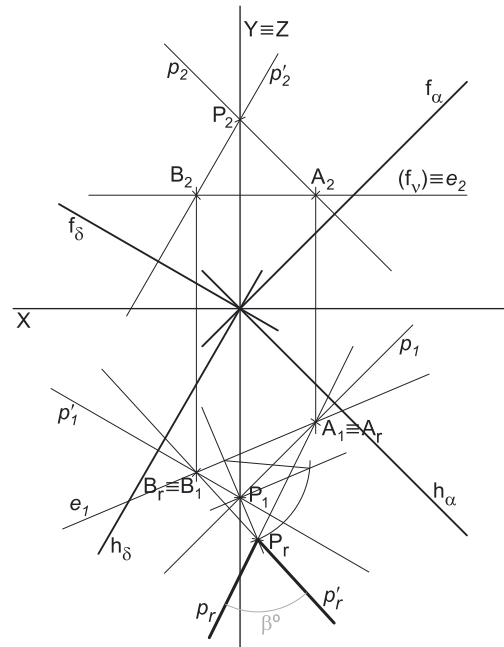
Os pontos A e B são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se imediatamente $A_r \equiv A_1$ e $B_r \equiv B_1$. Já temos, em rebatimento, um ponto de cada uma das duas retas. Falta-nos outro ponto ou uma direção de cada uma, para as definirmos em rebatimento. Para tal será conveniente o rebatimento do ponto P , que é o vértice do ângulo (e, por isso, é um ponto que pertence simultaneamente às duas retas).

O rebatimento do ponto P processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por P_1 conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediou-se a distância do ponto P ao plano v (a cota de P em relação ao plano v) e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto P em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro da charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto P , até à perpendicular à charneira que passa por P_1 , determinando P_r .

Em seguida, desenharam-se as duas retas em rebatimento. A reta p_r (a reta p rebatida) passa por A_r e P_r (está definida por dois pontos). A reta p'_r (a reta p' rebatida) passa por B_r e P_r (está igualmente definida por dois pontos). O ângulo as retas p_r e p'_r é o ângulo entre os dois planos – o ângulo entre os planos α e δ é, pois, qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas p_r e p'_r , com vértice m P_r . Assim, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com β° .

Traçado:

O eixo X representa-se a **médio** (é a linha estruturante do exercício). O eixo $Y \equiv Z$ representou-se a **leve**, pois é uma linha de referência (auxiliar). Os dados (os traços dos planos α e δ) representaram-se igualmente a **médio**. O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas p e p' , do plano v e de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano definido pelas retas p e p').



123.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os planos γ e ρ pelos respetivos traços, em função dos dados.

Resolução:

O ângulo entre dois planos está contido num plano ortogonal aos dois planos (um plano ortogonal à aresta do diedro) – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre as retas de interseção dos dois planos dados com o plano ortogonal à aresta do diedro. Assim, a determinação do ângulo entre os planos ρ e γ passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em quatro etapas, a saber: **1.** Identifica-se a aresta do diedro; **2.** conduz-se um plano ortogonal à aresta do diedro (que é um plano ortogonal aos dois planos); **3.** determinam-se as retas de interseção desse plano com os dois planos dados; **4.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.

Etapla 1. Identificar a aresta do diedro. A aresta do diedro formado pelos planos ρ e γ (a reta de interseção entre os dois planos) é necessariamente uma reta oblíqua, cuja direção não é conhecida – é necessária a determinação da reta para a sua correta identificação.

Etapla 2. Conduzir um plano ortogonal à aresta do diedro. Um plano ortogonal a uma reta oblíqua é necessariamente um plano oblíquo (um **plano não projetante**). No entanto, sem a prévia determinação da reta de interseção entre os dois planos, não é possível conduzir, de forma direta, qualquer plano ortogonal à aresta do diedro.

Nesse sentido, conclui-se que o plano ortogonal à aresta do diedro **não tem determinação direta nem é projetante**, pelo que, nesta situação, é aconselhável o recurso ao **2º método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em duas etapas, a saber: **1.** Por um ponto exterior qualquer, conduzem-se duas retas ortogonais, individualmente, a cada um dos planos (essas duas retas definem, na prática, um plano ortogonal aos dois planos e, por isso, ortogonal à aresta do diedro); **2.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.

Etapla 1. Por um ponto P , exterior aos dois planos, conduziram-se duas retas – a reta p , ortogonal ao plano ρ , e a reta p' , ortogonal ao plano γ . A reta p' é uma reta horizontal (de nível). A reta p é uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**. Também por isso, ao contrário do que acontece com a reta p' , não está ainda garantida a ortogonalidade entre a reta p e o plano ρ .

Assim, temos duas situações pendentes:

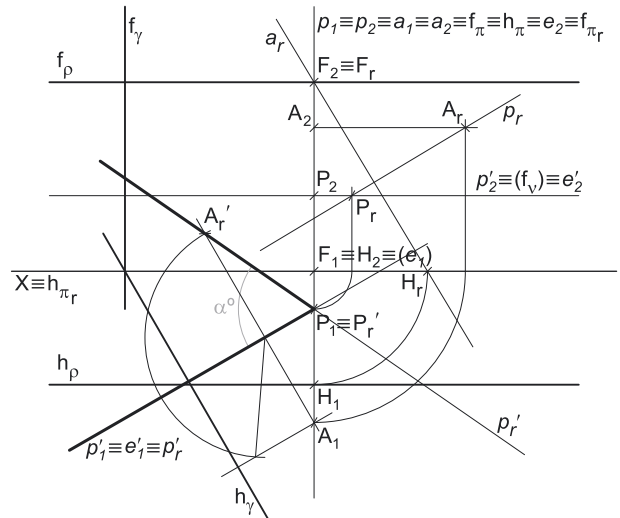
1. por um lado, para que a reta p esteja totalmente definida em Dupla Projeção Ortogonal (em termos práticos), necessitamos de um outro ponto da reta p , para além do ponto P ;
2. por outro lado, para que a reta p seja ortogonal ao plano ρ , a reta p tem de ser ortogonal a uma outra «família» de retas do plano ρ (para além da «família» de retas fronto-horizontais, cuja ortogonalidade já está garantida). Essa outra «família» de retas pode ser a «família» das retas de perfil do plano ρ .

Assim, recorreu-se a uma reta a , pertencente ao plano ρ – a reta a está definida pelos seus traços (os pontos F e H). Note que, por uma questão de economia de traçados, se optou por se situar a reta a no mesmo plano de perfil que contém a reta p . A reta a é, também ela, uma reta de perfil, cujas projeções também não verificam o **Critério de Reversibilidade** – não é possível, de forma direta, garantir a ortogonalidade das retas p e a . Assim, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar, de forma a ser possível garantir a ortogonalidade entre as duas retas. Optou-se pelo rebatimento do plano de perfil – nesse sentido conduziu-se, pelas duas retas o plano π , de perfil, que contém as duas retas.

Optou-se por rebater o plano π para o Plano Frontal de Projeção (a charneira foi f_γ). Rebateu-se o plano π , rebatendo-se os pontos F , H e P . Em seguida, desenhou-se a_r , que passa por F_r e por H_r (a reta a_r está definida por dois pontos – os pontos F_r e H_r). Pelo ponto P_r conduziu-se a reta p_r , perpendicular a a_r . Já garantimos, em rebatimento, a ortogonalidade da reta p em relação à reta a , pelo que está garantida a ortogonalidade da reta p em relação ao plano ρ . A reta p é também ortogonal à «família» das retas de perfil do plano ρ , pelo que a reta p já é ortogonal a duas «famílias» de retas do plano ρ – a reta p é ortogonal ao plano ρ .

Sobre a reta p_r , representou-se um outro ponto, qualquer – o ponto A_r . O ponto A_r é, em rebatimento, um ponto A pertencente à reta p . Invertendo o rebatimento do plano π , determinaram-se as projeções do ponto A . A reta p (definida pelos pontos P e A) é ortogonal ao plano ρ , pois é ortogonal a duas «famílias» de retas do plano ρ – a «família» das retas fronto-horizontais e a «família» das suas retas de perfil.

Está cumprida a **Etapla 1** deste **2º método geral** – as retas p e p' , porque são concorrentes, definem um plano, plano esse plano que é um plano ortogonal à aresta dos diedros (é um plano ortogonal aos dois planos dados) e é o plano que contém o ângulo.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Etapla 2. O ângulo formado entre as duas retas (a reta p e a reta p') é o ângulo formado entre os dois planos (os planos p e γ). Esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano definido pelas duas retas (as retas p e p') para o plano horizontal (de nível) v que contém a reta p' . Esta opção teve a ver com a economia de traçados que tal permite. Nesse sentido, identificou-se o plano v , pelo seu traço frontal – o plano v não tem traço horizontal, pelo que o seu traço frontal foi identificado entre parêntesis. Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (reta e'), que é a própria reta p' – a reta p' é uma reta que pertence aos dois planos (é reta de interseção entre os dois planos), pelo que é, imediatamente a charneira do rebatimento.

A reta p' é a própria charneira, pelo que roda sobre si própria – tem-se imediatamente, $p'_r \equiv p'$. O ponto P é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente $P_r' \equiv P_1$. O ponto P_r' é o ponto P rebatido pelo seu segundo rebatimento – o ponto P rebatido pelo rebatimento do plano definido pelas retas p e p' . Já temos, em rebatimento, um ponto para definir a reta p em rebatimento. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Para tal recorreu-se ao rebatimento do ponto A , pertencente à reta p e determinado previamente.

O rebatimento do ponto A processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por A_1 conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediu-se a distância do ponto A ao plano v (a cota de A em relação ao plano v) e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto A em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro da charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto A , até à perpendicular à charneira que passa por A_1 , determinando A_r .

Em seguida, desenhou-se a reta p em rebatimento. A reta p_r' (a reta p rebatida) passa por P_r' e A_r (está definida por dois pontos). Note que a reta p_r' é a reta rebatida pelo seu segundo rebatimento – a reta p rebatida pelo rebatimento do plano definido pelas retas p e p' . O ângulo as retas p_r' e p'_r é o ângulo entre os dois planos – o ângulo entre os planos p e γ é, pois, qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas p_r' e p'_r , com vértice em P_r' . Assim, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com α° .

Traçado:

O eixo X representa-se a **médio** (é a linha estruturante do exercício). Os dados (os traços dos planos p e γ) representaram-se igualmente a **médio**. O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas p e p' , do plano v e de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano π e ao rebatimento do plano definido pelas retas p e p').

124.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os planos p e σ pelos respetivos traços, em função dos dados. O plano σ tem os seus traços simétricos em relação ao eixo X , pois é ortogonal ao $\beta_{1/3}$ (planos ortogonais ao $\beta_{1/3}$ têm os seus traços simétricos em relação ao eixo X).

Resolução:

O ângulo entre dois planos está contido num plano ortogonal aos dois planos (um plano ortogonal à aresta do diedro) – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre as retas de interseção dos dois planos dados com o plano ortogonal à aresta do diedro. Assim, a determinação do ângulo entre os dois planos passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em quatro etapas, a saber: **1.** Identifica-se a aresta do diedro; **2.** conduz-se um plano ortogonal à aresta do diedro (que é um plano ortogonal aos dois planos); **3.** determinam-se as retas de interseção desse plano com os dois planos dados; **4.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.

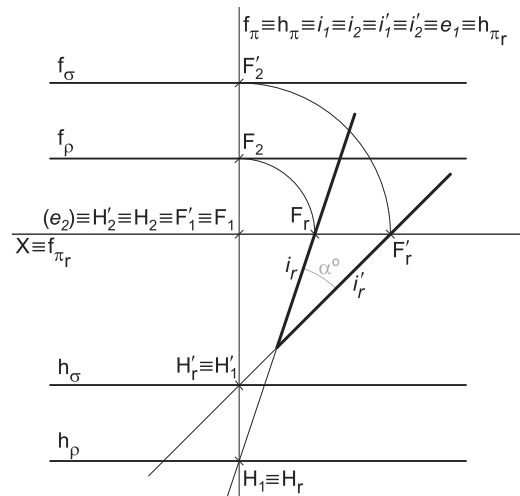
Etapla 1. Identificou-se a aresta do diedro. A aresta do diedro formado pelos planos p e σ é a reta de interseção entre os dois planos, que é necessariamente uma reta fronto-horizontal – é a única «família» de retas que os dois planos têm em comum. A aresta do diedro está, assim, identificada (mas não determinada, pois não é necessária a sua determinação) – é uma reta fronto-horizontal.

Etapla 2. Conduziu-se um plano ortogonal à aresta do diedro. Um plano ortogonal a uma reta fronto-horizontal é necessariamente um plano de perfil (duplamente projetante). Assim, o plano π (um plano de perfil qualquer) é o plano ortogonal à aresta do diedro.

Etapla 3. Determinam-se as retas de interseção do plano ortogonal à aresta do diedro com os dois planos dados. A reta i , definida pelos seus traços, é a reta de interseção do plano π com o plano p – a reta i está definida por dois pontos (os pontos F e H). A reta i' , definida igualmente pelos seus traços, é a reta de interseção do plano π com o plano σ – a reta i' está definida por dois pontos (os pontos F' e H').

Etapla 4. O ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos. Assim, o ângulo formado entre as retas i e i' é, então, o ângulo formado entre os planos p e σ – esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que é o próprio plano π .

O plano que contém o ângulo (o plano π) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo recurso ao rebatimento do plano π para o Plano Horizontal de Projeção. A charneira do rebatimento é h_π (o traço horizontal do plano π), que roda sobre si próprio, pelo que se tem, imediatamente, $h_\pi \equiv e_1 \equiv h_{\pi_r}$.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O ponto **H** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente $H_r \equiv H_1$. Já temos um ponto para definir a reta **i** em rebatimento. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Rebateu-se o ponto **F** (o traço frontal da reta **i**), desenhando o arco do seu rebatimento (que está contido no Plano Frontal de Projeção) com o recurso ao compasso, o que nos permitiu determinar **F_r**. A reta **i_r** (a reta **i** em rebatimento) está definida por dois pontos – **F_r** e **H_r**.

O ponto **H'** é outro ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é outro ponto fixo) – tem-se imediatamente $H'_r \equiv H'_1$. Já temos um ponto para definir a reta **i'** em rebatimento. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Rebateu-se o ponto **F'** (o traço frontal da reta **i'**), desenhando o arco do seu rebatimento (que está contido no Plano Frontal de Projeção) com o recurso ao compasso, o que nos permitiu determinar **F'_r**. A reta **i'_r** (a reta **i'** em rebatimento) está definida por dois pontos – **F'_r** e **H'_r**.

A verdadeira grandeza do ângulo formado entre os planos ρ e σ está, assim, em qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas **i_r** e **i'_r**. Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com α° .

Note que, na presente situação, a determinação do vértice do ângulo só se poderia processar com o recurso a um processo geométrico auxiliar (como é o caso do rebatimento efetuado) mas que, na prática, tal não é necessário. Assim, como a figura ilustra, é possível identificar o ângulo pedido sem determinar (ou identificar) o seu vértice.

Traçado:

O eixo **X** representa-se a **médio** (é a linha estruturante do exercício). Os dados (os traços dos planos ρ e σ) representaram-se igualmente a **médio**. O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do plano π , das retas **i** e **i'** em projeção e em rebatimento, bem como, ainda, todos os traçados referentes ao rebatimento do plano π).

125.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano ρ pelos seus traços, em função dos dados, bem como o plano σ . Este está representado pelo eixo **X** e pelas projeções do ponto **P** (o ponto que define o plano). O plano ρ tem os seus traços simétricos em relação ao eixo **X**, pois é ortogonal a $\beta_{1/3}$ (planos ortogonais a $\beta_{1/3}$ têm os seus traços simétricos em relação ao eixo **X**).

Resolução:

O ângulo entre dois planos está contido num plano ortogonal aos dois planos (um plano ortogonal à aresta do diedro) – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre as retas de interseção dos dois planos dados com o plano ortogonal à aresta do diedro. Assim, a determinação do ângulo entre os dois planos passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em quatro etapas, a saber: **1.** Identifica-se a aresta do diedro; **2.** conduz-se um plano ortogonal à aresta do diedro (que é um plano ortogonal aos dois planos); **3.** determinam-se as retas de interseção desse plano com os dois planos dados; **4.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.

Etapa 1. Identificou-se a aresta do diedro. A aresta do diedro formado pelos planos ρ e σ é a reta de interseção entre os dois planos, que é necessariamente uma reta fronto-horizontal – é a única «família» de retas que os dois planos têm em comum. A aresta do diedro está, assim, identificada (mas não determinada, pois não é necessária a sua determinação) – é uma reta fronto-horizontal.

Etapa 2. Conduziu-se um plano ortogonal à aresta do diedro. Um plano ortogonal a uma reta fronto-horizontal é necessariamente um plano de perfil (duplamente projetante). Assim, o plano π (um plano de perfil qualquer) é o plano ortogonal à aresta do diedro.

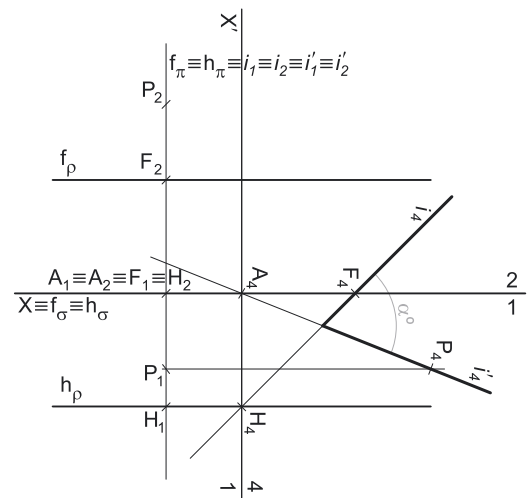
Note que, por uma questão de economia de traçados (que mais adiante se explicará), se conduziu o plano π pelo ponto **P**.

Etapa 3. Determinam-se as retas de interseção do plano ortogonal à aresta do diedro com os dois planos dados. A reta **i**, definida pelos seus traços, é a reta de interseção do plano π com o plano ρ – a reta **i** está definida por dois pontos (os pontos **F** e **H**). A reta **i'** é a reta de interseção do plano π com o plano σ e está igualmente definida por dois pontos – o ponto **P** (que é um ponto que pertence aos dois planos) e o ponto **A** (o ponto de concorrência da reta **i'** com o eixo **X**). Tenha em conta que a reta **i'** é necessariamente uma reta de perfil passante, pois pertence a um plano passante.

Note que, caso o plano π não contivesse o ponto **P**, a determinação da reta **i'** implicaria o recurso a uma reta auxiliar do plano σ . Está exposta a economia de traçados que justificou conduzir o plano π pelo ponto **P**.

Etapa 4. O ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos. Assim, o ângulo formado entre as retas **i** e **i'** é, então, o ângulo formado entre os planos ρ e σ – esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que é o próprio plano π .

Esse ângulo está contido no plano π , que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo recurso a uma mudança do diedro de projeção, de forma a transformar o plano π (o plano que contém o ângulo) num plano frontal (de frente).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Para tal é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção por um outro plano (o **plano 4**), paralelo ao plano π . Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

– no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);

– no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo X (o eixo X') é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com $1/4$. Como o **plano 4** é paralelo ao plano π , o eixo X' é paralelo a h_π (o traço horizontal do plano π), ou seja, é perpendicular ao eixo X . As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo X' (o novo eixo X).

F_4 é a projeção do ponto F no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de F_4 ao eixo X' é igual à distância de F_2 ao eixo X (que é 3 cm – a cota de F). H_4 é a projeção do ponto H no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – H_4 situa-se no eixo X' , pois o ponto H tem cota nula. A projeção da reta i no **plano 4** (i_4) passa por F_4 e H_4 (está definida por dois pontos).

P_4 é a projeção do ponto P no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de P_4 ao eixo X' é igual à distância de P_2 ao eixo X (que é 5 cm – a cota de P). A_4 é a projeção do ponto A no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – A_4 situa-se no eixo X' , pois o ponto A tem cota nula. A projeção da reta i' no **plano 4** (i'_4) passa por P_4 e A_4 (está definida por dois pontos).

Tendo em conta que, no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), o plano π é um plano frontal (de frente), paralelo ao **plano 4**, o ângulo entre as duas retas projeta-se em verdadeira grandeza no **plano 4**. Assim, o ângulo entre as duas retas (que é o ângulo entre os planos ρ e σ) é qualquer dos dois menores ângulos formados entre i_4 e i'_4 . Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com α° .

Note que, na presente situação, a determinação do vértice do ângulo só se poderia processar com o recurso a um processo geométrico auxiliar (como é o caso da mudança do diedro de projeção efetuada) mas que, na prática, tal não é necessário. Assim, como a figura ilustra, é possível identificar o ângulo pedido sem determinar (ou identificar) o seu vértice.

Traçado:

O eixo X representa-se a **médio** (é a linha estruturante do exercício). Os dados (os traços do plano ρ) representaram-se igualmente a **médio**. O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do plano π , das retas i e i' , bem como, ainda, todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada).

126.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto A , pelas suas projeções, em função dos dados. Não há a necessidade de se representar o $\beta_{1/3}$, que é um plano passante cuja orientação é conhecida – o $\beta_{1/3}$ faz diedros de 45° com os planos de projeção.

Resolução:

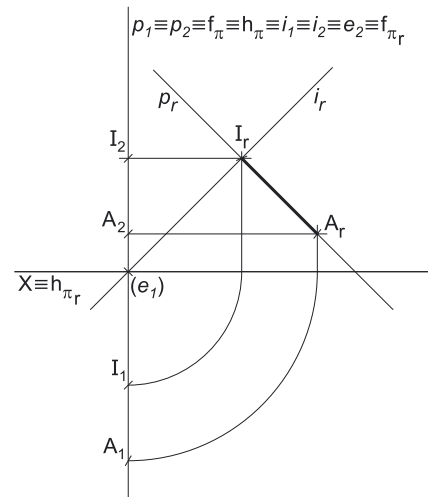
A resolução do exercício, passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância de pontos a planos** que se executa em três etapas: **1.** conduz-se, pelo ponto, uma reta ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se o ponto de interseção entre a reta e o plano dado; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância do ponto ao plano.

Etapla 1. Pelo ponto A conduziu-se uma reta p , ortogonal ao $\beta_{1/3}$. A reta p é necessariamente uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de reversibilidade**. Por outro lado, a reta p ainda não verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos**, pois é ortogonal apenas a uma «família» de retas do plano – a «família» das retas fronto-horizontais.

Etapla 2. Determina-se o ponto de interseção da reta p com o $\beta_{1/3}$. Nem a reta p nem o $\beta_{1/3}$ são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos** que se executa em três etapas, a saber: **A.** conduz-se, pela reta, um plano auxiliar que a contenha; **B.** determina-se a reta de interseção do plano auxiliar com o plano dado; **C.** o ponto de concorrência das duas retas é o ponto de interseção da reta dada com o plano dado.

A. Assim, conduziu-se, pela reta p , o plano π , que é o plano projetante da reta p – o plano π é um plano de perfil.

B. Em seguida, determinou-se a reta de interseção do plano π (o plano auxiliar) com o plano $\beta_{1/3}$ – a reta i . Para definir a reta i são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta i é necessariamente uma **reta de perfil passante**, pelo que já temos um ponto para definir a reta i – o seu ponto de concorrência com o eixo X . Falta-nos outro ponto ou uma direção, para definir a reta i . Já temos a direção da reta i – a reta i , porque pertence ao $\beta_{1/3}$, é uma reta de perfil que faz ângulos de 45° com os dois planos de projeção, atravessando os 1^a e 3^a Diedros. A reta i está, assim, definida por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo X) e uma direção (faz ângulos de 45° com ambos os planos de projeção, ou seja, com os traços do plano π). Salienta-se que a reta i é também uma reta de perfil, cujas projeções não verificam, igualmente, o **Critério de Reversibilidade**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

C. O ponto de concorrência das retas p e i é o ponto de interseção da reta p com o $\beta_{1/3}$ – o ponto **I**. Não é possível determinar diretamente o ponto de concorrência das retas p e i , pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**. Optou-se pelo rebatimento do plano π para o Plano Frontal de Projeção – em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento, que é f_π (a reta e , que é o traço frontal do plano π). Em seguida, rebateu-se a reta i – a reta i_r está definida por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo X , que é um ponto da charneira, pelo que é fixo) e por uma direção (faz ângulos de 45° com os traços do plano π em rebatimento). Rebateu-se também o ponto A – A_r é o ponto A rebatido. Pelo ponto A_r , conduziu-se a reta p_r (a reta p rebatida), perpendicular à reta i_r , o que nos garante a ortogonalidade entre a reta p e o $\beta_{1/3}$ – a reta p_r é, agora, ortogonal a uma segunda «família» de retas do $\beta_{1/3}$ (a «família» das retas de perfil do $\beta_{1/3}$). A reta p_r já verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos** em relação ao $\beta_{1/3}$. Por fim, determinou-se, em rebatimento, o ponto **I** (o ponto de concorrência entre as retas p_r e i_r) – I_r . O ponto **I** é o ponto de concorrência da reta p com a reta i e é o ponto de interseção da reta p com o $\beta_{1/3}$.

Neste momento, com a determinação do ponto de interseção da reta p com o $\beta_{1/3}$ (o ponto **I**), foi concluída a **Etapa 2 do método geral da distância de pontos a planos**.

Etapa 3. A distância entre os dois pontos é a distância do ponto **A** ao $\beta_{1/3}$. Inverteu-se o rebatimento do ponto **I** (invertendo o rebatimento do plano π) e determinaram-se as suas projeções, o que nos permitiu desenhar as projeções do segmento **[AI]**. As projeções do segmento **[AI]** são as projeções do segmento representativo da distância do ponto **A** ao $\beta_{1/3}$.

O segmento **[AI]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pois é oblíquo a ambos os planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. No entanto, tendo em conta o rebatimento previamente efetuado (o rebatimento do plano π), observa-se que o segmento **[AI]** está em verdadeira grandeza nesse rebatimento – a verdadeira grandeza da distância do ponto **A** ao plano $\beta_{1/3}$ está no segmento **[A_rI_r]**, e foi devidamente assinalada no desenho.

Traçado:

Os dados representados são apenas um ponto, cuja linha de chamada se representa a **leve**, pelo que não há qualquer representação a **médio** no que respeita aos dados do exercício. O eixo X representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O pedido representou-se a **forte** – a verdadeira grandeza da distância (o objetivo final do exercício). As projeções da distância, porque são parte do pedido mas não o objetivo final do exercício, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso da reta p , das projeções horizontais dos arcos do rebatimento, das retas p e i rebatidas, etc.), representaram-se a **leve**.

127.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os planos ρ e σ , pelos seus traços, em função dos dados. Os planos são paralelos ao $\beta_{2/4}$, pelo que são ortogonais ao $\beta_{1/3}$ – nesse sentido, os dois planos têm os seus traços simétricos em relação ao eixo X (planos ortogonais ao $\beta_{1/3}$ têm os seus traços simétricos em relação ao eixo X).

Resolução:

Este exercício corresponde, na prática, a uma variante da situação da distância entre dois planos de rampa. De facto, é pedido um plano de rampa, paralelo ao plano ρ e que dista 2 cm do plano ρ , o que corresponde, na prática, a resolver um exercício de distância entre dois planos de rampa.

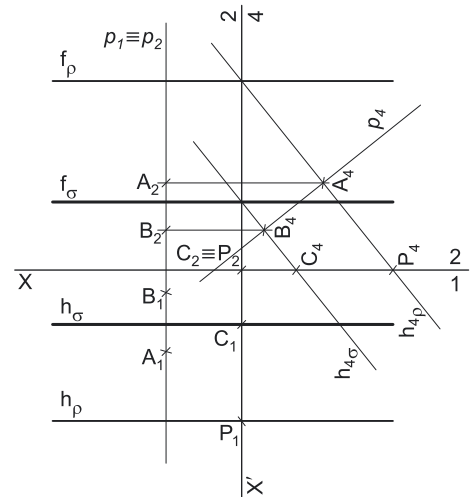
Nesse sentido, a resolução do exercício passa necessariamente pelo recurso ao **método geral da distância entre dois planos paralelos**, que se executa em três etapas: **1.** conduz-se uma reta ortogonal aos dois planos; **2.** determinam-se os pontos de interseção entre a reta e os dois planos dados; **3.** a distância entre os dois pontos é a distância entre os dois planos.

Etapa 1. Conduziu-se uma reta p , qualquer, ortogonal aos dois planos. A reta p é uma reta de perfil, cujas projeções são se desenham imediatamente. A reta p é necessariamente uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de reversibilidade**. Por outro lado, a reta p ainda não verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos**, pois é ortogonal apenas a uma «família» de retas dos planos – a «família» das retas fronto-horizontais.

Etapa 2. Determinam-se os pontos de interseção da reta p com os dois planos. Nem a reta p nem os planos são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos**. No entanto, nesta situação, optou-se por se recorrer diretamente a uma **mudança do diedro de projeção**, o que nos permitirá transformar os planos de rampa em planos projetantes. Nesse sentido, não só a questão da ortogonalidade da reta p em relação aos dois planos poderá ser resolvida de forma direta, como também de forma direta poderá ser resolvida, também, a questão das interseções entre a reta p e os dois planos.

Optemos por transformar os planos ρ e σ (o plano pretendido) em planos projetantes horizontais – planos verticais. Para tal é necessário substituir o Plano Horizontal de Projeção por um outro plano (o **plano 4**), ortogonal aos planos ρ e σ . Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Frontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções frontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções horizontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se os afastamentos** (que estão referenciados ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se as cotas** (que estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao **plano 4**).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, o novo eixo X (o eixo X') é a reta de interseção do **plano 2** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com $4/2$. Como o **plano 4** é ortogonal aos dois planos, o eixo X' é perpendicular aos traços frontais dos dois planos (o que significa ser perpendicular ao eixo X inicial). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo X' (o novo eixo X).

Em seguida, há que determinar o novo traço horizontal do plano p (o traço do plano p no **plano 4**), o que se processa com o recurso a um ponto P , qualquer, de h_p . P_4 é a projeção do ponto P no **plano 4** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de P_4 ao eixo X' é igual à distância de P_1 ao eixo X (que é 4 cm – o afastamento de h_p). Isto permitiu-nos desenhar o traço do plano p no **plano 4** – h_{4p} . Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano p é um plano projetante horizontal, o traço do plano p no **plano 4** (h_{4p}) está definido por dois pontos – o seu ponto de concorrência com f_p (que se situa no eixo X') e P_4 (a nova projeção horizontal do ponto P).

No novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), o plano p é um plano vertical (bem como o será o plano σ), pelo que já é possível garantir a ortogonalidade da reta p em relação ao plano p . Nesse sentido, conduziu-se p_4 (a projeção da reta p no **plano 4**), qualquer, perpendicular a h_{4p} .

Para concluirmos a **Etapa 2** é necessário determinar os pontos de interseção da reta p com os dois planos (o plano dado e o plano pretendido). O ponto A é o ponto de interseção da reta p com o plano p e determinou-se a partir da sua projeção no **plano 4** – A_4 . A_2 (a projeção frontal do ponto A) determinou-se diretamente, sobre p_2 (a projeção frontal da reta p). A projeção horizontal do ponto A (A_1) determinou-se em função do seu afastamento, que se manteve – assim, a distância de A_1 ao eixo X é igual à distância de A_4 ao eixo X' .

No entanto, não é possível de forma imediata, determinar o ponto de interseção da reta p com o plano σ , porque este plano ainda não está definido, pelo que a determinação do ponto B (o ponto de interseção da reta p com o plano σ) não é direta.

Passemos, então, para a **Etapa 3**.

Etapa 3. A distância entre os dois pontos (de interseção) é a distância entre os dois planos. Assim, o ponto B (o ponto de interseção da reta p com o plano σ) é um ponto da reta p que se situa a 2 cm do ponto A . Uma vez que, no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 2** e pelo **plano 4**), a reta p é uma reta horizontal (de nível), o segmento de reta $[AB]$, porque estará contido na reta p , projeta-se em verdadeira grandeza no **plano 4**.

Assim, sobre p_4 (a projeção da reta p no **plano 4**), a partir de A_4 (a projeção do ponto A no **plano 4**), mediram-se os 2 cm (a distância entre os dois planos), em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar B_4 (a projeção do ponto B no **plano 4**). Note que, das duas possibilidades para medir essa distância, se escolheu aquela que nos garante que o plano σ se situará entre o plano p e o eixo X (conforme pede o enunciado expressamente). O ponto B é, assim, o ponto de interseção da reta p com o plano σ e determinou-se a partir da sua projeção no **plano 4** – B_4 . B_2 (a projeção frontal do ponto B) determinou-se diretamente, sobre p_2 (a projeção frontal da reta p). A projeção horizontal do ponto B (B_1) determinou-se em função do seu afastamento, que se manteve – assim, a distância de B_1 ao eixo X é igual à distância de B_4 ao eixo X' .

Note que se concluíram, em simultâneo, as **Etapas 2 e 3 do método geral para a determinação da distância entre dois planos paralelos**.

Em seguida, desenhou-se o traço do plano σ no **plano 4** – $h_{4\sigma}$. Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano σ é um plano projetante horizontal, o traço do plano σ no **plano 4** ($h_{4\sigma}$) passa necessariamente por B_4 . Assim, o traço do plano σ no **plano 4** ($h_{4\sigma}$) está definido por um ponto (B_4) e por uma direção (é paralelo a h_{4p}), pois os dois planos são paralelos.

Foi possível, em seguida, desenhar o traço frontal do plano σ – é concorrente com $h_{4\sigma}$ no eixo X' e é fronto-horizontal (é paralelo a f_p), pelo que está definido por um ponto e uma direção.

Para determinar o traço horizontal do plano σ no diedro de projeção inicial, recorreu-se a um ponto C , do plano σ , com cota nula (no diedro de projeção inicial). Assim, determinou-se a projeção frontal do ponto C e determinou-se, em seguida, a sua projeção no **plano 4** (C_4). Tendo em conta que os afastamentos se mantiveram, a projeção horizontal do ponto C (C_1) determinou-se em função do seu afastamento – assim, a distância de C_1 ao eixo X é igual à distância de C_4 ao eixo X' .

Por fim, por C_1 (a projeção horizontal do ponto C), conduziu-se h_{σ} , paralelo ao eixo X – h_{σ} (o traço horizontal do plano σ) está definido por um ponto (o ponto C) e uma direção (é fronto-horizontal). O plano σ , representado pelos seus traços, é o plano pedido – situa-se a 2 cm do plano p , entre o plano p e o eixo X .

Note que a determinação das projeções dos pontos A e B (no diedro de projeção inicial) é completamente irrelevante para a conclusão do exercício – poderiam ter sido omitidas.

Traçado:

Os dados (os traços do plano p) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X , que é a linha estruturante do exercício. O pedido representou-se a **forte** – os traços do plano σ (o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares – caso da reta p , do eixo X' , dos traços dos planos no **plano 4** ou, ainda, da projeção da reta p no **plano 4**.

128.

Dados:

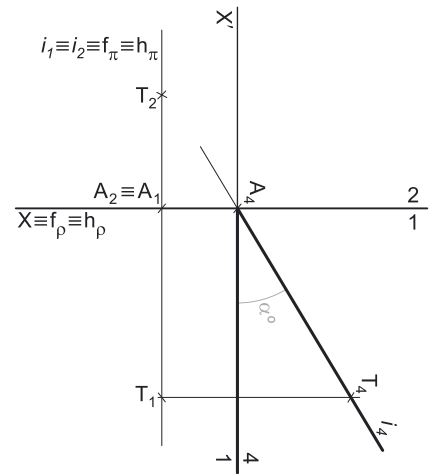
Em primeiro lugar, representou-se o ponto **T**, pelas suas projeções, em função dos dados. O plano ρ está representado pelo eixo **X** e pelas projeções do ponto **T** (o ponto que define o plano).

Resolução:

O ângulo entre dois planos está contido num plano ortogonal aos dois planos (um plano ortogonal à aresta do diedro) – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre as retas de interseção dos dois planos dados com o plano ortogonal à aresta do diedro. Assim, a determinação do ângulo entre os dois planos passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em quatro etapas, a saber: **1.** Identifica-se a aresta do diedro; **2.** conduz-se um plano ortogonal à aresta do diedro (que é um plano ortogonal aos dois planos); **3.** determinam-se as retas de interseção desse plano com os dois planos dados; **4.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.

Etapa 1. Identificar a aresta do diedro. A aresta do diedro formado pelo plano ρ e pelo Plano Horizontal de Projeção é a reta de interseção entre os dois planos, que é o eixo **X** – trata-se de uma reta fronto-horizontal. A aresta do diedro está, assim, identificada.

Etapa 2. Conduzir um plano ortogonal à aresta do diedro. Um plano ortogonal a uma reta fronto-horizontal é necessariamente um plano de perfil (duplamente projetante). Assim, o plano π (um plano de perfil qualquer) é o plano ortogonal à aresta do diedro.



Note que, por uma questão de economia de traçados (que mais adiante se explicará), se conduziu o plano π pelo ponto **T**.

Etapa 3. Determinam-se as retas de interseção do plano ortogonal à aresta do diedro com os dois planos dados. A reta de interseção do plano π com o Plano Horizontal de Projeção é, imediatamente, o traço horizontal do plano π – h_π . A reta i é a reta de interseção do plano π com o plano ρ e está definida por dois pontos – o ponto **T** (que é um ponto que pertence aos dois planos) e o ponto **A** (o ponto de concorrência da reta i com o eixo **X**). Tenha em conta que a reta i é necessariamente uma reta de perfil passante, pois pertence a um plano passante.

Note que, caso o plano π não contivesse o ponto **T**, a determinação da reta i implicaria o recurso a uma reta auxiliar do plano ρ . Está exposta a economia de traçados que justificou conduzir o plano π pelo ponto **T**.

Etapa 4. O ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos. Assim, o ângulo formado entre h_π e a reta i , então, o ângulo formado entre o plano ρ e o Plano Horizontal de Projeção – esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que é o próprio plano π .

Esse ângulo está contido no plano π , que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo recurso a uma mudança do diedro de projeção, de forma a transformar o plano π (o plano que contém o ângulo) num plano frontal (de frente).

Para tal é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção por um outro plano (o **plano 4**), paralelo ao plano π . Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é paralelo ao plano π , o eixo **X'** é paralelo a h_π (o traço horizontal do plano π), ou seja, é perpendicular ao eixo **X**. As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**).

T_4 é a projeção do ponto **T** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de T_4 ao eixo **X'** é igual à distância de T_2 ao eixo **X** (que é 3 cm – a cota de **T**). A_4 é a projeção do ponto **A** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – A_4 situa-se no eixo **X'**, pois o ponto **A** tem cota nula. A projeção da reta i no **plano 4** (i_4) passa por T_4 e A_4 (está definida por dois pontos).

Tendo em conta que, no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), o plano π é um plano frontal (de frente), paralelo ao **plano 4**, o ângulo entre as duas retas projeta-se em verdadeira grandeza no **plano 4**. Assim, o ângulo entre as duas retas (que é o ângulo entre o plano ρ e o Plano Horizontal de Projeção) é qualquer dos dois menores ângulos formados entre o eixo **X'** e a reta i_4 , com vértice em A_4 . Nesse sentido, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com α^0 .

Traçado:

O eixo **X** representa-se a **médio** (é a linha estruturante do exercício). O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do plano π , da reta i e de todos os traçados referentes à mudança do diedro de projeção efetuada).

129.

Dados:

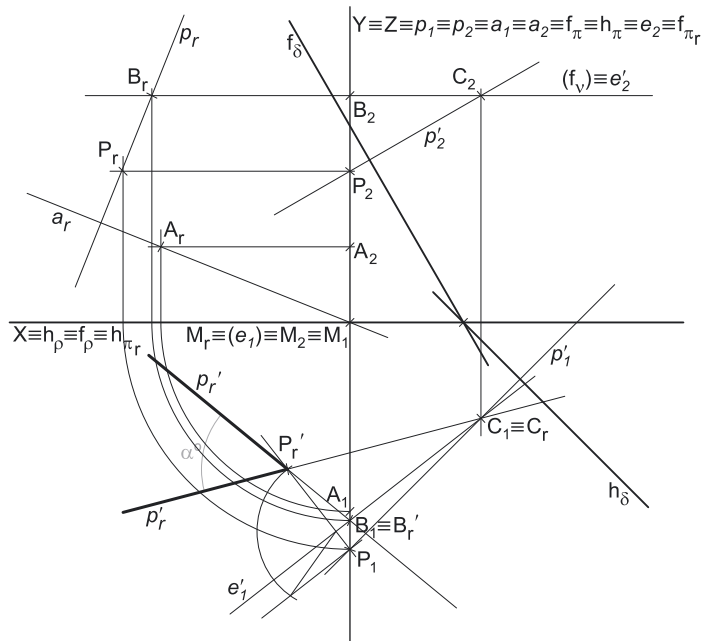
Em primeiro lugar, representou-se o plano δ pelos seus traços, bem como o ponto **A**, pelas suas projeções, em função dos dados. O plano ρ está representado pelo eixo **X** e pelas projeções do ponto **A** (o ponto que define o plano).

Resolução:

O ângulo entre dois planos está contido num plano ortogonal aos dois planos (um plano ortogonal à aresta do diedro) – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre as retas de interseção dos dois planos dados com o plano ortogonal à aresta do diedro. Assim, a determinação do ângulo entre os planos δ e ρ passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em quatro etapas, a saber: **1.** Identifica-se a aresta do diedro; **2.** conduz-se um plano ortogonal à aresta do diedro (que é um plano ortogonal aos dois planos); **3.** determinam-se as retas de interseção desse plano com os dois planos dados; **4.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.

Etapa 1. Identificar a aresta do diedro. A aresta do diedro formado pelos planos δ e ρ (a reta de interseção entre os dois planos) é necessariamente uma reta oblíqua, cuja direção não é conhecida – é necessária a determinação da reta para a sua correta identificação.

Etapa 2. Conduzir um plano ortogonal à aresta do diedro. Um plano ortogonal a uma reta oblíqua é necessariamente um plano oblíquo (um **plano não projetante**). No entanto, sem a prévia determinação da reta de interseção entre os dois planos, não é possível conduzir, de forma direta, qualquer plano ortogonal à aresta do diedro.



Nesse sentido, conclui-se que o plano ortogonal à aresta do diedro **não tem determinação direta nem é projetante**, pelo que, nesta situação, é aconselhável o recurso ao **2º método geral para a determinação do ângulo entre dois planos**, que se executa sequencialmente em duas etapas, a saber: **1.** Por um ponto exterior qualquer, conduzem-se duas retas ortogonais, individualmente, a cada um dos planos (essas duas retas definem, na prática, um plano ortogonal aos dois planos e, por isso, ortogonal à aresta do diedro); **2.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre os dois planos.

Etapa 1. Por um ponto **P**, exterior aos dois planos, conduziram-se duas retas – a reta **p**, ortogonal ao plano ρ , e a reta **p'**, ortogonal ao plano δ . Por uma questão de economia de traçados, optou-se por se situar o ponto **P** no plano de perfil que contém o ponto **A** (o ponto que define o plano ρ). A reta **p** é uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**. Também por isso, ao contrário do que acontece com a reta **p'** (que é uma reta oblíqua), não está ainda garantida a ortogonalidade entre a reta **p** e o plano ρ .

Assim, temos duas situações pendentes:

1. por um lado, para que a reta **p** esteja totalmente definida em Dupla Projeção Ortogonal (em termos práticos), necessitamos de um outro ponto da reta **p**, para além do ponto **P**;
2. por outro lado, para que a reta **p** seja ortogonal ao plano ρ , a reta **p** tem de ser ortogonal a uma outra «família» de retas do plano ρ (para além da «família» de retas fronto-horizontais, cuja ortogonalidade já está garantida). Essa outra «família» de retas pode ser a «família» das retas de perfil do plano ρ .

Assim, recorreu-se a uma reta **a**, pertencente ao plano ρ – a reta **a** está definida por dois pontos (o ponto **A** e o ponto **M**, que é o seu ponto de concorrência com o eixo **X**). A reta **a** é, também ela, uma reta de perfil, cujas projeções também não verificam o **Critério de Reversibilidade** – não é possível, de forma direta, garantir a ortogonalidade das retas **p** e **a**. Assim, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar, de forma a ser possível garantir a ortogonalidade entre as duas retas. Optou-se pelo rebatimento do plano de perfil – nesse sentido conduziu-se, pelas duas retas do plano π , de perfil, que contém as duas retas.

Optou-se por rebater o plano π para o Plano Frontal de Projeção (a charneira foi f_π). Rebateu-se o plano π , rebatendo-se os pontos **A**, **M** e **P**. O ponto **M** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). Em seguida, desenhou-se a_r , que passa por **A_r** e por **M_r** (a reta a_r está definida por dois pontos – os pontos **A_r** e **HM_r**). Pelo ponto **P_r** conduziu-se a reta p_r , perpendicular a a_r . Já garantimos, em rebatimento, a ortogonalidade da reta **p** em relação à reta **a**, pelo que está garantida a ortogonalidade da reta **p** em relação ao plano ρ . A reta **p** é também ortogonal à «família» das retas de perfil do plano ρ , pelo que a reta **p** já é ortogonal a duas «famílias» de retas do plano ρ – a reta **p** é ortogonal ao plano ρ .

Sobre a reta p_r , representou-se um outro ponto, qualquer – o ponto **B_r**. O ponto **B_r** é, em rebatimento, um ponto **B** pertencente à reta **p**. Invertendo o rebatimento do plano π , determinaram-se as projeções do ponto **B**. A reta **p** (definida pelos pontos **P** e **B**) é ortogonal ao plano ρ , pois é ortogonal a duas «famílias» de retas do plano ρ – a «família» das retas fronto-horizontais e a «família» das suas retas de perfil.

Está cumprida a **Etapa 1** deste **2º método geral** – as retas **p** e **p'**, porque são concorrentes, definem um plano, plano esse plano que é um plano ortogonal à aresta dos diedros (é um plano ortogonal aos dois planos dados) e é o plano que contém o ângulo.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Etapa 2. O ângulo formado entre as duas retas (a reta p e a reta p') é o ângulo formado entre os dois planos (os planos ρ e γ). Esse ângulo está contido no plano definido pelas duas retas, que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano definido pelas duas retas (as retas p e p') para um plano horizontal (de nível) v qualquer. Nesse sentido, representou-se um plano v , horizontal (de nível), passando pelo ponto B (o ponto da reta p que foi previamente determinado). Esta opção teve a ver com a economia de traçados que tal permite, como adiante se exporá. O plano v não tem traço horizontal, pelo que o seu traço frontal foi identificado entre parêntesis. Em seguida, determinou-se a charneira do rebatimento (reta e'), que é a reta de interseção entre os dois planos. A reta e está definida por dois pontos – o ponto B (que é o ponto de interseção da reta p com o plano v) e o ponto C (que é o ponto de interseção da reta p' com plano v). O ponto C foi determinado a partir da sua projeção frontal, pois o plano v é um plano projetante frontal.

Note que, caso o plano v não contivesse o ponto B , seria necessário determinar, através do rebatimento (por exemplo), o ponto de interseção da reta p com o plano v , uma vez que, ao contrário da reta p' , as projeções da reta p não verificam o **Critério de Reversibilidade**.

Os pontos B e C são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se imediatamente $B_r' \equiv B_1$ e $C_r' \equiv C_1$. O ponto B_r' é o ponto B rebatido pelo seu segundo rebatimento – o ponto B rebatido pelo rebatimento do plano definido pelas retas p e p' . Já temos, em rebatimento, um ponto para definir cada uma das duas retas em rebatimento. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Para tal recorreu-se ao rebatimento do ponto P , que é o vértice do ângulo (e, portanto, é um ponto que pertence às duas retas em simultâneo).

O rebatimento do ponto P (pelo rebatimento do plano definido pelas retas p e p') processou-se com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Nesse sentido, por P_1 conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira mediu-se a distância do ponto P ao plano v (a cota de P em relação ao plano v) e desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto P em verdadeira grandeza (que tem um dos seus vértices sobre a charneira). Com o compasso, fazendo centro da charneira (no vértice do triângulo que se situa na charneira) e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto P , até à perpendicular à charneira que passa por P_1 , determinando P_r' . O ponto P_r' é o ponto P rebatido pelo seu segundo rebatimento – o ponto P rebatido pelo rebatimento do plano definido pelas retas p e p' .

Em seguida, desenhou-se a reta p em rebatimento. A reta p_r' (a reta p rebatida) passa por P_r' e B_r' (está definida por dois pontos). Note que a reta p_r' é a reta rebatida pelo seu segundo rebatimento – a reta p rebatida pelo rebatimento do plano definido pelas retas p e p' . Em seguida, desenhou-se a reta p' em rebatimento. A reta p_r' (a reta p' rebatida) passa por P_r' e C_r' (está definida por dois pontos). O ângulo as retas p_r' e p_r' é o ângulo entre os dois planos – o ângulo entre os planos ρ e δ é, pois, qualquer dos dois ângulos agudos formados entre as retas p_r' e p_r' , com vértice em P_r' . Assim, identificou-se um dos dois ângulos agudos a traço forte (as semirretas que limitam o ângulo) e assinalou-se a verdadeira grandeza da sua amplitude com α .

Traçado:

O eixo X representa-se a **médio** (é a linha estruturante do exercício). Os dados (os traços do plano δ) representaram-se igualmente a **médio**. O ângulo pedido (as semirretas que ladeiam o ângulo) representou-se a **forte**, pois é o pedido (é o objetivo do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas p e p' , do plano v e de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano π e ao rebatimento do plano definido pelas retas p e p').

18 REPRESENTAÇÃO DE SÓLIDOS III

130.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A**, **B** e **K**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Em seguida, desenharam-se os traços do plano δ . Os pontos **A** e **K** têm, ambos, afastamento nulo, pelo que o traço frontal do plano δ (f_δ) passa necessariamente pelos **A** e **K** (f_δ está definido por dois pontos). Os pontos **B** e **K** têm, ambos, cota nula, pelo que o traço horizontal do plano δ (h_δ) passa necessariamente pelos pontos **B** e **K** (h_δ está definido por dois pontos).

Resolução:

Determinação das projeções da base da pirâmide:

O plano que contém o triângulo **[ABC]** (o plano δ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o triângulo **[ABC]** (a base da pirâmide) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se por recorrer ao rebatimento do plano δ para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Assim, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano (que roda sobre si próprio) – tem-se, imediatamente, $h_\delta \equiv e_r \equiv h_{\delta_r}$ (e_r , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo **X**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos verticais (ortogonais a h_δ).

O ponto **B** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo), tal como o ponto **K** – tem-se imediatamente $B_r \equiv B_1$ e $K_r \equiv K_1 \equiv K_2$. Em seguida, rebateu-se o traço frontal do plano δ (f_δ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir f_{δ_r} (o traço frontal do plano em rebatimento), que é K_r . Falta-nos outro ponto ou uma direção. Optou-se por se rebater o ponto **A**, que é um ponto de f_δ e, simultaneamente, é um vértice do triângulo. Para rebater o ponto **A** conduziu-se, por A_1 , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano que contém o arco do rebatimento do ponto **A**). Com o compasso, fazendo centro em K_r e com raio $\overline{K_2A_2}$, desenhou-se um arco (de transporte) até à perpendicular à charneira que passa por A_1 , determinando-se A_r (o ponto **A** rebatido). Em seguida, desenhou-se f_{δ_r} (o traço frontal do plano δ rebatido), passando por A_r e K_r (está definido por dois pontos).

A partir dos pontos A_r e B_r , construiu-se o triângulo **[ABC]** em verdadeira grandeza (em rebatimento), e determinaram-se os pontos C_r e O_r (o ponto **O** é o centro do triângulo). Para determinar as projeções do triângulo, inverteu-se o rebatimento do plano δ , determinando-se as projeções dos pontos **C** e **O**.

A inversão do rebatimento do ponto **C** processou-se com o recurso à reta f , frontal (de frente), do plano δ , à qual o ponto **C** pertence. A reta f_r (a reta f rebatida) está definida por um ponto (o ponto C_r) e por uma direção (é paralela a f_{δ_r}). Em seguida, determinaram-se as projeções da reta f . O ponto **H** é o traço horizontal da reta f e é um ponto da charneira (que é h_δ), pelo que roda sobre si próprio – tem-se imediatamente $H_r \equiv H_1$ (H_2 situa-se no eixo **X**). Já temos um ponto para definir a reta f em projeções – o ponto **H**. Já temos também a direção da reta f (que é a direção das retas frontais do plano δ), o que nos permitiu desenhar as duas projeções da reta f .

Por fim, por C_r conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com f_1 (a projeção horizontal da reta f) é C_1 (a projeção horizontal do ponto **C**). A projeção frontal do ponto **C** (C_2) situa-se sobre f_2 (a projeção frontal da reta f).

A inversão do rebatimento do ponto **O** e a determinação das suas projeções processou-se de forma idêntica à exposta para o ponto **C**, e também com o recurso a uma reta frontal (de frente) do plano δ – a reta f' foi a reta frontal (de frente) do plano δ a que se recorreu, para inverter o rebatimento do ponto **O** (note que não se identificou o traço horizontal da reta f' , para não sobrecarregar em demasia o desenho, com excesso de notações que dificultariam a leitura da resolução gráfica apresentada).

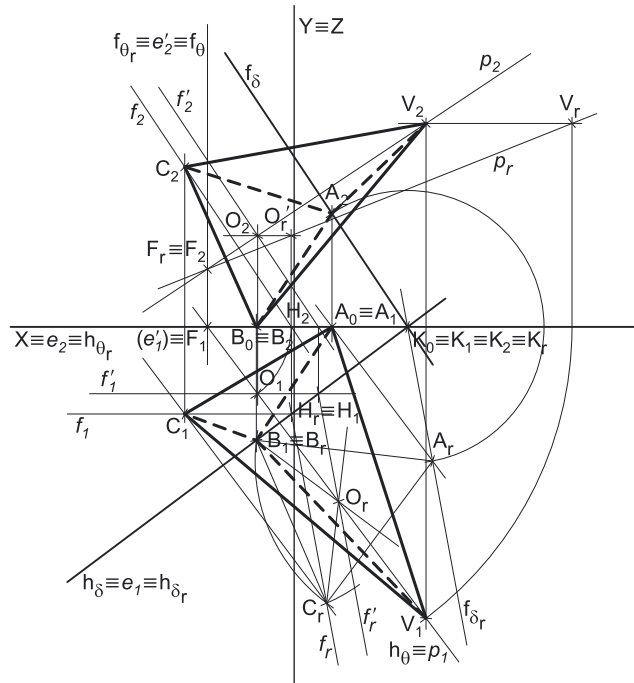
A partir das projeções dos três pontos (**A**, **B** e **C**), desenharam-se as projeções do triângulo **[ABC]**.

Determinação das projeções do vértice da pirâmide:

A pirâmide pedida é uma **pirâmide regular**, pelo que o eixo da pirâmide é necessariamente **ortogonal** ao plano da base. O eixo da pirâmide está, assim, contido numa reta que passa pelo ponto **O** e é ortogonal ao plano δ . Nesse sentido, pelas projeções do ponto **O** conduziram-se as projeções da reta p , a reta suporte do eixo da pirâmide.

A reta p é ortogonal a f_δ , que é uma reta frontal (de frente) do plano com afastamento nulo – a ortogonalidade entre a reta p e f_δ é direta em projeção frontal, pelo que p_2 (a projeção frontal da reta p) é perpendicular a f_δ . A reta p é também ortogonal a h_δ , que é uma reta horizontal (de nível) do plano com cota nula – a ortogonalidade entre a reta p e h_δ é direta em projeção horizontal, pelo que p_1 (a projeção horizontal da reta p) é perpendicular a h_δ . Assim, a reta p é ortogonal ao plano δ , pois é ortogonal a duas retas concorrentes do plano δ (verifica o **Critério da ortogonalidade entre retas e planos**).

A altura da pirâmide é a distância do seu vértice (o ponto **V**) ao plano da base, que é medida numa reta ortogonal ao plano da base (trata-se a **distância de um ponto a um plano**). O segmento **[OV]** (o eixo da pirâmide) está contido na reta p , pelo que o ponto **V** é um ponto da reta p . Assim, a distância do ponto **V** ao plano δ mede-se na reta p . A reta p não é paralela a qualquer dos planos de projeção, pelo que o segmento **[OV]** (o eixo da pirâmide) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do segmento estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Optou-se pelo rebatimento do plano projetante horizontal da reta p para o Plano Frontal de Projeção. Nesse sentido, representou-se o plano θ (o plano projetante horizontal da reta p) pelos seus traços e identificou-se a charneira do rebatimento (reta e'), que é f_θ – tem-se imediatamente $f_\theta \equiv e'_2 \equiv f_{\theta_r}$.

Em seguida, efetuou-se o rebatimento do ponto O , determinando $O_r' - O_r'$ é o ponto O rebatido no seu segundo rebatimento (O rebatido pelo rebatimento do plano θ). Já temos um ponto para definir a reta p_r (a reta p rebatida). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Recorreu-se ao ponto F , o traço frontal da reta p . Assim, determinou-se o traço frontal da reta (o ponto F) que é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente $F_r \equiv F_2$. Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta p_r . A reta p_r (a reta p rebatida) passa por O_r' e por F_r (está definida por dois pontos).

Sobre a reta p_r , a partir de O_r' , mediram-se os 8 cm (a altura da pirâmide, que é a distância do ponto V ao plano δ) e determinou-se V_r . Em seguida, inverteu-se o rebatimento do ponto V e determinaram-se as suas projeções, sobre as projeções homónimas da reta p .

Determinação das projeções da pirâmide:

A partir das projeções dos quatro vértices da pirâmide (os vértices A , B e C , da base, e o vértice V), desenharam-se os seus contornos aparentes.

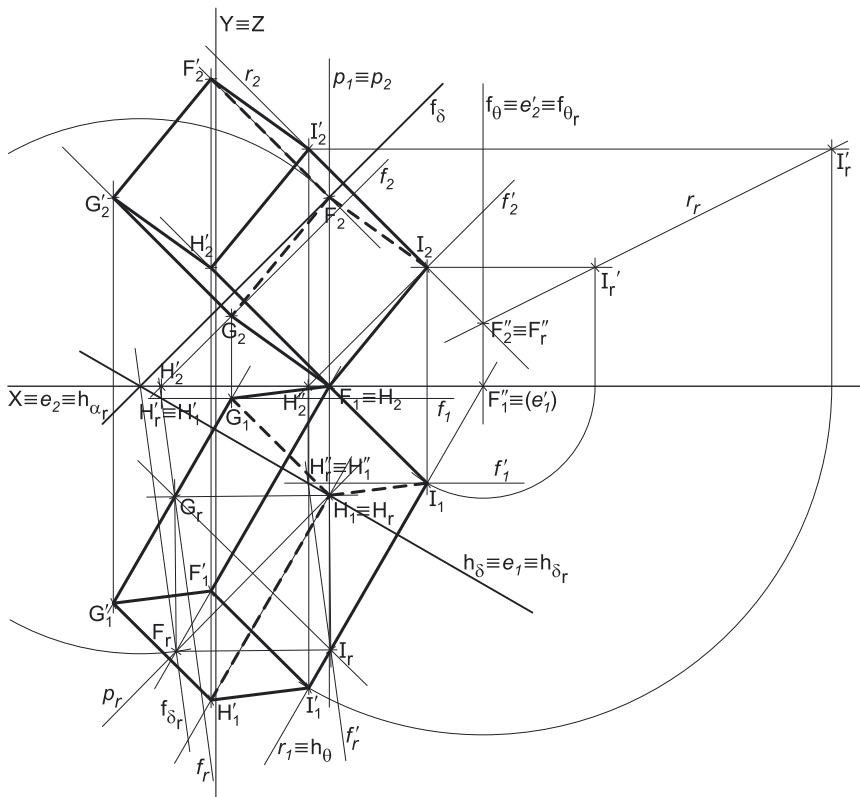
O contorno aparente frontal é a linha fechada $[BCV]$ (que é, afinal, a face lateral $[BCV]$), cuja projeção frontal é o polígono $[B_2C_2V_2]$. Em projeção frontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice A . Este vértice, por ser o vértice de **menor afastamento** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas $[AB]$ e $[AC]$, da base, e a aresta lateral $[AV]$. Note que, em projeção frontal, apenas a face lateral $[BCV]$ é visível. Em projeção frontal, a base $[ABC]$ é invisível, bem como as faces laterais $[ABV]$ e $[ACV]$.

O contorno aparente horizontal é a linha fechada $[ACV]$ (que é, afinal, a face lateral $[ACV]$), cuja projeção horizontal é o polígono $[A_1C_1V_1]$. Em projeção horizontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente horizontal – o vértice B . Este vértice, por ser o vértice de **menor cota** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas $[AB]$ e $[BC]$, da base, e a aresta lateral $[BV]$. Note que, em projeção horizontal, apenas a face lateral $[ACV]$ é visível. Em projeção horizontal, a base $[ABC]$ é invisível, bem como as faces laterais $[ABV]$ e $[BCV]$.

Traçado:

Os traços do plano δ , porque integram os dados, representaram-se a **médio**. O eixo X representa-se igualmente a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. As duas projeções da pirâmide (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. O triângulo $[ABC]$, em rebatimento, representa-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano δ (que nos permitiram determinar as projeções do triângulo $[ABC]$), bem como o plano θ e todos os traçados relativos ao rebatimento do plano θ (que nos permitiram determinar as projeções do vértice V).

131.



Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano δ , pelos seus traços, em função dos dados. Em seguida, desenharam-se as projeções da reta p , que fica definida por dois pontos – os pontos F (que é um ponto de f_δ) e o ponto H (que é um ponto de h_δ), ou seja, os seus traços. Os traços da reta p (os pontos F e H são, imediatamente, dois vértices do quadrado $[FGHI]$).

Resolução:

Determinação das projeções da base inferior do prisma:

O plano que contém o quadrado $[FGHI]$ (o plano δ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o quadrado $[FGHI]$ (a base inferior do prisma) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se por recorrer ao rebatimento do plano δ para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Assim, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano (que roda sobre si próprio) – tem-se, imediatamente, $h_\delta \equiv e_1 \equiv h_{\delta_r}$ (e_2 , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo X). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos verticais (ortogonais a h_δ).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O ponto **H** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente $H_r \equiv H_1$. Em seguida, rebateu-se o traço frontal do plano δ (f_δ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir f_{δ_r} (o traço frontal do plano em rebatimento), que é o ponto de concorrência dos traços do plano (que é um ponto da charneira e, por isso é fixo – roda sobre si próprio). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Optou-se por se rebater o ponto **F**, que é um ponto de f_δ e, simultaneamente, é um vértice do quadrado. Para rebater o ponto **F** conduziu-se, por F_1 , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano que contém o arco do rebatimento do ponto **F**). Com o compasso, fazendo centro no ponto de concorrência dos traços do plano δ e com raio até F_2 , desenhou-se um arco (de transporte) até à perpendicular à charneira que passa por F_1 , determinando-se F_r (o ponto **F** rebatido). Em seguida, desenhou-se f_{δ_r} (o traço frontal do plano δ rebatido), passando por F_r e pelo ponto de concorrência dos dois traços do plano (f_{δ_r} está definido por dois pontos).

A partir dos pontos F_r e H_r , construiu-se o quadrado **[FGHI]** em verdadeira grandeza (em rebatimento), e determinaram-se os pontos G_r e I_r . Para determinar as projeções do quadrado, inverteu-se o rebatimento do plano δ , determinando-se as projeções dos pontos **G** e **I**.

A inversão do rebatimento do ponto **G** processou-se com o recurso à reta f , frontal (de frente), do plano δ , à qual o ponto **G** pertence. A reta f_r (a reta f rebatida) está definida por um ponto (o ponto G_r) e por uma direção (é paralela a f_{δ_r}). Em seguida, determinaram-se as projeções da reta f . O ponto H'' é o traço horizontal da reta f e é um ponto da charneira (que é h_δ), pelo que roda sobre si próprio – tem-se imediatamente $H''_r \equiv H''_1$ (H''_2 situa-se no eixo **X**). Já temos um ponto para definir a reta f em projeções – o ponto H'' . Já temos também a direção da reta f (que é a direção das retas frontais do plano δ), o que nos permitiu desenhar as duas projeções da reta f .

Por fim, por G_r conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com f_1 (a projeção horizontal da reta f) é G_1 (a projeção horizontal do ponto **G**). A projeção frontal do ponto **G** (G_2) situa-se sobre f_2 (a projeção frontal da reta f).

A inversão do rebatimento do ponto **I** e a determinação das suas projeções processou-se de forma idêntica à exposta para o ponto **G**, e também com o recurso a uma reta frontal (de frente) do plano δ – a reta f' foi a reta frontal (de frente) do plano δ a que se recorreu, para inverter o rebatimento do ponto **I**. O ponto H''' é o traço horizontal da reta f' .

A partir das projeções dos quatro pontos (**F**, **G**, **H** e **I**), desenharam-se as projeções do quadrado **[FGHI]**.

Determinação das projeções dos vértices da base superior do prisma:

O prisma pedido é um **prisma regular**, pelo que as arestas laterais do sólido são necessariamente **ortogonais** aos planos das bases. Qualquer aresta lateral do prisma está, assim, contida numa reta ortogonal ao plano δ . Consideremos a aresta lateral **[II']** – pelas projeções do ponto **I** conduziram-se as projeções da reta r , a reta suporte da aresta lateral **[II']**.

A reta r é ortogonal a f_δ , que é uma reta frontal (de frente) do plano com afastamento nulo – a ortogonalidade entre a reta r e f_δ é direta em projeção frontal, pelo que r_2 (a projeção frontal da reta r) é perpendicular a f_δ . A reta r é também ortogonal a h_δ , que é uma reta horizontal (de nível) do plano com cota nula – a ortogonalidade entre a reta r e h_δ é direta em projeção horizontal, pelo que r_1 (a projeção horizontal da reta r) é perpendicular a h_δ . Assim, a reta r é ortogonal ao plano δ , pois é ortogonal a duas retas concorrentes do plano δ (verifica o **Critério da ortogonalidade entre retas e planos**).

A altura do prisma é a distância entre os planos das bases, que é medida numa reta ortogonal aos planos das bases (trata-se a **distância entre dois planos paralelos**). O segmento **[II']** (a aresta lateral **[II']**) está contido na reta r , pelo que o ponto I' é um ponto da reta r . Assim, a distância do ponto I' ao ponto **I** é a distância do ponto I' ao plano δ e corresponde à distância entre os planos das duas bases, que se mede na reta r . A reta r não é paralela a qualquer dos planos de projeção, pelo que o segmento **[II']** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do segmento estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano projetante horizontal da reta r para o Plano Frontal de Projeção. Nesse sentido, representou-se o plano θ (o plano projetante horizontal da reta r) pelos seus traços e identificou-se a charneira do rebatimento (reta e'), que é f_θ – tem-se imediatamente $f_\theta \equiv e'_2 \equiv f_{\theta_r}$.

Em seguida, efetuou-se o rebatimento do ponto **I**, determinando I'_r – I'_r é o ponto **I** rebatido no seu segundo rebatimento (**I** rebatido pelo rebatimento do plano θ). Já temos um ponto para definir a reta r_r (a reta r rebatida). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Recorreu-se ao ponto F'' , o traço frontal da reta r . Assim, determinou-se o traço frontal da reta (o ponto F'') que é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente $F''_r \equiv F''_2$. Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta r_r . A reta r_r (a reta r rebatida) passa por I'_r e por F''_r (está definida por dois pontos).

Sobre a reta r_r , a partir de I'_r , mediram-se os 7 cm (a altura do prisma, que é a distância do ponto I' ao plano δ) e determinou-se I'_r . Em seguida, inverteu-se o rebatimento do ponto I' e determinaram-se as suas projeções, sobre as projeções homónimas da reta r .

Em seguida, teve-se em conta que as arestas laterais do prisma são todas paralelas entre si e, ainda, que as arestas da base superior são paralelas às arestas correspondentes da base inferior.

Assim, pelas projeções do ponto **F** (um dos vértices da base inferior) conduziram-se as projeções da reta suporte da aresta lateral **[FF']** (que não se identificaram, para não sobrecarregar o desenho com excesso de notações) – o ponto F' é o vértice da base superior que corresponde ao vértice **F** da base inferior. Em seguida, pelas projeções do ponto I' conduziram-se as projeções homónimas da reta suporte da aresta **[I'F']** da base superior (que também não se identificaram, para não sobrecarregar o desenho com excesso de notações). O vértice F' da base superior é o ponto de concorrência das retas suporte daquelas duas arestas.

De forma idêntica, pelas projeções do ponto **H** (outro dos vértices da base inferior) conduziram-se as projeções da reta suporte da aresta lateral **[HH']** (que mais uma vez não se identificaram, para não sobrecarregar o desenho com excesso de notações) – o ponto H' é o vértice da base superior que corresponde ao vértice **H** da base inferior. Em seguida, pelas projeções do ponto I' conduziram-se as projeções homónimas da reta suporte da aresta **[I'H']** da base superior (que também não se identificaram, para não sobrecarregar o desenho com excesso de notações). O vértice H' da base superior é o ponto de concorrência das retas suporte daquelas duas arestas.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por fim, pelas projeções do ponto **G** (outro dos vértices da base inferior) conduziram-se as projeções da reta suporte da aresta lateral **[GG']** (que de novo não se identificaram, para não sobrecarregar o desenho com excesso de notações) – o ponto **G'** é o vértice da base superior que corresponde ao vértice **G** da base inferior. Em seguida, pelas projeções do ponto **H'** conduziram-se as projeções homónimas da reta suporte da aresta **[H'G']** da base superior (que também não se identificaram, para não sobrecarregar o desenho com excesso de notações). O vértice **G'** da base superior é o ponto de concorrência das retas suporte daquelas duas arestas.

Determinação das projeções do prisma:

A partir das projeções dos oito vértices do prisma (os vértices **F, G, H** e **I** da base inferior, e os vértices **F', G', H'** e **I'**, da base superior), desenharam-se os seus contornos aparentes.

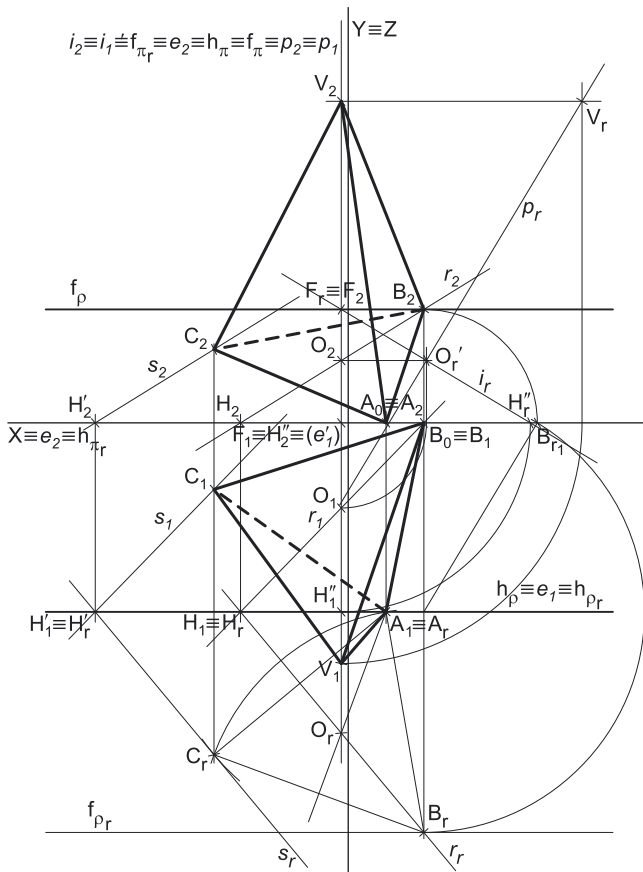
O contorno aparente frontal é a linha fechada **[GHII'F'G']**, cuja projeção frontal é o polígono **[G₂H₂I₂I'₂F'₂G'₂]**. Em projeção frontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – o vértice **F** e o vértice **H'**. O vértice **F**, por ser o vértice de **menor afastamento** do prisma, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[FG]** e **[FI]**, da base inferior, e a aresta lateral **[FF']**. O vértice **H'**, por ser o vértice de **maior afastamento** do prisma, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[G'H']** e **[H'I']**, da base superior, e a aresta lateral **[HH']**. Note que, em projeção frontal, a base superior é visível, bem como as faces laterais **[GG'H'H]** e **[HH'I'I]**. A base inferior e as faces laterais **[FF'G'G]** e **[FF'I'I]** são invisíveis.

O contorno aparente horizontal é a linha fechada **[GFII'H'G']**, cuja projeção horizontal é o polígono **[G₁F₁I₁I'₁H'₁G'₁]**. Em projeção horizontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – o vértice **F'** e o vértice **H**. O vértice **H**, por ser o vértice de **menor cota** do prisma, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[GH]** e **[HI]**, da base inferior, e a aresta lateral **[HH']**. O vértice **F'**, por ser o vértice de **maior cota** do prisma, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[F'G']** e **[F'I']**, da base superior, e a aresta lateral **[FF']**. Note que, em projeção horizontal, a base superior é visível, bem como as faces laterais **[FF'G'G]** e **[FF'I'I]**. A base inferior e as faces laterais **[GG'H'H]** e **[HH'I'I]** são invisíveis.

Traçado:

Os traços do plano δ , porque integram os dados, representaram-se a **médio**. O eixo **X** representa-se igualmente a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. As duas projeções do prisma (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são o pedido. O quadrado **[FGHI]**, em rebatimento, representa-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano δ (que nos permitiram determinar as projeções do quadrado **[FGHI]**), o plano θ e todos os traçados relativos ao rebatimento do plano θ (que nos permitiram determinar as projeções do vértice **I'**), bem como todos os traçados que nos permitiram determinar os restantes vértices da base superior do sólido.

132.



Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Em seguida, determinaram-se os traços do plano p .

O ponto **A** é um ponto com cota nula, pelo que já temos um ponto para definir h_p (o traço horizontal do plano p). Falta-nos outro ponto ou uma direção. O traço horizontal de um plano de rampa é uma reta fronto-horizontal do plano com cota nula, pelo que já temos a direção para definir h_p – h_p está definido por um ponto (o ponto **A**) e por uma direção (é fronto-horizontal – paralelo ao eixo **X**).

O ponto **B** é um ponto com afastamento nulo, pelo que já temos um ponto para definir f_p (o traço frontal do plano p). Falta-nos outro ponto ou uma direção. O traço frontal de um plano de rampa é uma reta fronto-horizontal do plano com afastamento nulo, pelo que já temos a direção para definir f_p – f_p está definido por um ponto (o ponto **B**) e por uma direção (é fronto-horizontal – paralelo ao eixo **X**).

Resolução:

Determinação das projeções da base da pirâmide:

O plano que contém o triângulo **[ABC]** (o plano p) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o triângulo **[ABC]** (a base da pirâmide) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se por recorrer ao rebatimento do plano p para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Assim, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano (que roda sobre si próprio) – tem-se, imediatamente, $h_p \equiv e_1 \equiv h_{pr}$ (e_2 , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo **X**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil (ortogonais a h_p).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, rebateu-se o traço frontal do plano ρ (f_p), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos uma direção para definir f_{p_r} (o traço frontal do plano em rebatimento), que é a direção das retas fronto-horizontais. Falta-nos um ponto para definir f_{p_r} . Nesse sentido, há que rebater o ponto **B**, que é um ponto de f_p e, simultaneamente, é um vértice do triângulo. O rebatimento do ponto **B** tem de se processar necessariamente com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Assim conduziu-se, por B_1 , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano que contém o arco do rebatimento do ponto **B**). Com o compasso, fazendo centro em B_1 e com raio B_1B_2 (que é a cota do ponto **B**) transportou-se a cota do ponto **B** para o eixo **X**, determinando-se o ponto B_r (que é o ponto **B** rebatido pelo plano de perfil que contém o arco do seu rebatimento, bem como o triângulo do rebatimento do ponto **B**). Em seguida, desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto **B**, que tem um vértice em B_1 , outro vértice em B_r e o terceiro vértice na charneira do rebatimento (h_p). Por fim, com o compasso, fazendo centro na charneira do rebatimento e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **B** em verdadeira grandeza, até à perpendicular à charneira que passa por B_1 , onde se situa B_r (o ponto **B** rebatido). Já temos o ponto que nos faltava para definir f_{p_r} . Nesse sentido, desenhou-se f_{p_r} , passando por B_r e paralelo ao eixo **X** – f_{p_r} está definido por um ponto (o ponto B_r) e por uma direção (é fronto-horizantal).

O ponto **A** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente $A_r \equiv A_1$. A partir dos pontos A_r e B_r , construiu-se o triângulo **[ABC]** em verdadeira grandeza (em rebatimento), e determinaram-se os pontos C_r e O_r (o ponto **O** é o centro do triângulo). Para determinar as projeções do triângulo, inverteu-se o rebatimento do plano ρ , determinando-se as projeções dos pontos **C** e **O**.

A inversão do rebatimento do ponto **O** processa-se com o recurso à reta r , oblíqua, do plano ρ , à qual o ponto **O** pertence. A reta r_r (a reta r rebatida) está definida por dois pontos – o ponto O_r e o ponto B_r . Em seguida, determinaram-se as projeções da reta r . O ponto **H** é o traço horizontal da reta r e é um ponto da charneira (que é h_p), pelo que roda sobre si próprio – tem-se imediatamente $H_r \equiv H_1$ (H_2 situa-se no eixo **X**). Já temos um ponto para definir a reta r em projeções – o ponto **H**. Tendo em conta que a reta r passa pelo ponto **B** (o ponto **B** é o traço frontal da reta r), já temos outro ponto para definir a reta r – a reta r está definida por dois pontos (os pontos **H** e **B**), o que nos permitiu desenhar as duas projeções da reta r .

Em seguida, por O_r conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com r_r (a projeção horizontal da reta r) é O_1 (a projeção horizontal do ponto **O**). A projeção frontal do ponto **O** (O_2) situa-se sobre r_2 (a projeção frontal da reta r).

A inversão do rebatimento do ponto **C** e a determinação das suas projeções processou-se de forma idêntica à exposta para o ponto **O**, com o recurso a uma outra reta oblíqua do plano ρ – a reta s . A reta s_r (a reta s rebatida) está definida por um ponto (o ponto C_r) e por uma direção (é paralela à reta r_r). O ponto **H'** é o traço horizontal da reta s e é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio – tem-se imediatamente $H'_r \equiv H'_1$ (H'_2 situa-se no eixo **X**). A reta s , em projeções, está definida por um ponto (o ponto **H'**) e por uma direção (a direção da reta r , pois a reta s é paralela à reta r). As projeções do ponto **C** situam-se sobre as projeções homónimas da reta s , na perpendicular à charneira que passa por C_r (e que corresponde ao plano de perfil que contém o arco do seu rebatimento).

A partir das projeções dos três pontos (**A**, **B** e **C**), desenharam-se as projeções do triângulo **[ABC]**.

Determinação das projeções do vértice da pirâmide:

A pirâmide pedida é uma **pirâmide regular**, pelo que o eixo da pirâmide é necessariamente **ortogonal** ao plano da base. O eixo da pirâmide está, assim, contido numa reta que passa pelo ponto **O** e é ortogonal ao plano ρ . Nesse sentido, pelas projeções do ponto **O** conduziram-se as projeções da reta p , a reta suporte do eixo da pirâmide – a reta p é uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**, pelo que a reta p não está totalmente definida. Por outro lado, também ainda não está garantida a ortogonalidade entre a reta p e o plano ρ .

A altura da pirâmide é a distância do seu vértice (o ponto **V**) ao plano da base, que é medida numa reta ortogonal ao plano da base (trata-se a **distância de um ponto a um plano**). O segmento **[OV]** (o eixo da pirâmide) está contido na reta p , pelo que o ponto **V** é um ponto da reta p . Assim, a distância do ponto **V** ao plano ρ mede-se na reta p . A reta p não é paralela a qualquer dos planos de projeção, pelo que o segmento **[OV]** (o eixo da pirâmide) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do segmento estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano projetante da reta p (um plano de perfil) para o Plano Frontal de Projeção. Nesse sentido, identificou-se o plano π (o plano projetante da reta p) pelos seus traços e identificou-se a charneira do rebatimento (reta e'), que é f_π – tem-se imediatamente $f_\pi \equiv e'_2 \equiv f_{\pi_r}$.

Em seguida, efetuou-se o rebatimento do ponto **O**, determinando $O_r' - O_r'$ é o ponto **O** rebatido no seu segundo rebatimento (**O** rebatido pelo rebatimento do plano π). Já temos um ponto para definir a reta p_r (a reta p rebatida). Falta-nos outro ponto ou uma direção. A direção é a direção ortogonal ao plano ρ , que só fica garantida através da ortogonalidade da reta p a uma outra reta do plano ρ . Nesse sentido, recorreu-se à reta i , que é uma reta de perfil do plano ρ (a reta i é a reta de interseção do plano π com o plano ρ). A reta i está definida por dois pontos – os seus traços nos planos de projeção (os pontos **F** e **H''**). Para se garantir a ortogonalidade da reta p em relação ao plano ρ , é necessário garantir a ortogonalidade da reta p em relação à reta i (para que se verifique o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos**). Tendo em conta que se trata de duas retas de perfil (cujas projeções não verifica o **Critério de Reversibilidade**), é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar – o rebatimento do plano π , já iniciado.

Efetuem os rebatimento da reta i . O ponto **F** é um ponto da charneira (reta e'), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente $F_r \equiv F_2$. Rebateu-se o ponto **H''** (o traço horizontal da reta i), determinando-se H''_r . A reta i_r (a reta i rebatida) passa por F_r e por H''_r (e tem ainda de passar por O_r' , pois o ponto **O** também pertence à reta i). Em seguida, desenhou-se a reta p_r , passando por O_r' e perpendicular a i_r – está garantida a ortogonalidade da reta p em relação à reta i , pelo que está garantida a ortogonalidade da reta p em relação ao plano ρ . Note que o ponto **O** é, na prática, o ponto de concorrência das retas p e i , o que se pode comprovar em rebatimento.

Sobre a reta p_r , a partir de O_r' , mediram-se os 8 cm (a altura da pirâmide, que é a distância do ponto **V** ao plano ρ) e determinou-se V_r . Em seguida, inverteu-se o rebatimento do ponto **V** e determinaram-se as suas projeções, sobre as projeções homónimas da reta p .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Determinação das projeções da pirâmide:

A partir das projeções dos quatro vértices da pirâmide (os vértices **A**, **B** e **C**, da base, e o vértice **V**), desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é a linha fechada **[BACV]**, cuja projeção frontal é o polígono **[B₂A₂C₂V₂]**. Todos os vértices da pirâmide pertencem ao contorno aparente frontal. No entanto, a aresta **[BC]**, da base, é invisível, pois separa duas faces invisíveis em projeção frontal – a base **[ABC]** e a face lateral **[BCV]**. As faces laterais **[ABV]** e **[ACV]** são as duas faces visíveis em projeção frontal.

O contorno aparente horizontal é a linha fechada **[ABCV]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[A₁B₁C₁V₁]**. Todos os vértices da pirâmide pertencem ao contorno aparente horizontal. No entanto, a aresta **[AC]**, da base, é invisível, pois separa duas faces invisíveis em projeção horizontal – a base **[ABC]** e a face lateral **[ACV]**. As faces laterais **[ABV]** e **[BCV]** são as duas faces visíveis em projeção horizontal.

Traçado:

Os traços do plano ρ , porque integram os dados, representaram-se a **médio**. O eixo **X** representa-se igualmente a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. As duas projeções da pirâmide (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são o pedido. O triângulo **[ABC]**, em rebatimento, representa-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano ρ (que nos permitiram determinar as projeções do triângulo **[ABC]**), bem como o plano π e todos os traçados relativos ao rebatimento do plano π (que nos permitiram determinar as projeções do vértice **V**).

133.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **C**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Em seguida, determinaram-se os traços do plano ρ .

O ponto **C** é um ponto com afastamento nulo, pelo que já temos um ponto para definir f_ρ (o traço frontal do plano ρ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. O traço frontal de um plano de rampa é uma reta fronto-horizontal do plano com afastamento nulo, pelo que já temos a direção para definir $f_\rho - f_\rho$ está definido por um ponto (o ponto **C**) e por uma direção (é fronto-horizontal – paralelo ao eixo **X**).

Em seguida, desenharam-se as projeções da reta **r**, a reta que passa pelos pontos **A** e **C** e determinou-se o seu traço horizontal, o ponto **H**. O ponto **H** é um ponto com cota nula, pelo que já temos um ponto para definir h_ρ (o traço horizontal do plano ρ). Falta-nos outro ponto ou uma direção. O traço horizontal de um plano de rampa é uma reta fronto-horizontal do plano com cota nula, pelo que já temos a direção para definir $h_\rho - h_\rho$ está definido por um ponto (o ponto **H**) e por uma direção (é fronto-horizontal – paralelo ao eixo **X**).

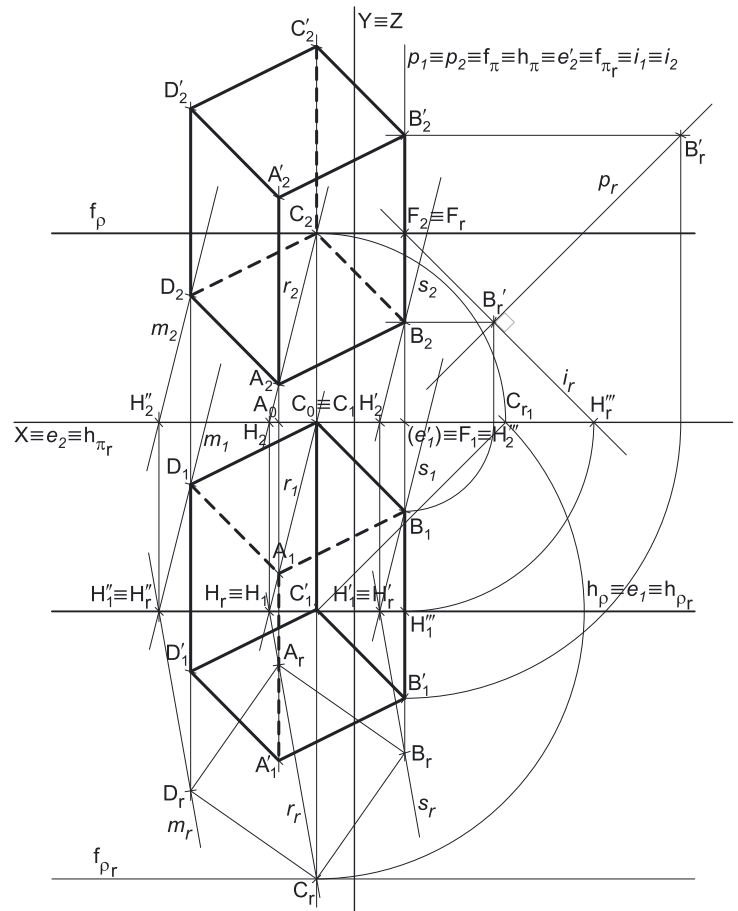
Resolução:

Determinação das projeções da base inferior do prisma:

O plano que contém o quadrado **[ABCD]** (o plano ρ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o quadrado **[ABCD]** (a base inferior do prisma) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se por recorrer ao rebatimento do plano ρ para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Assim, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano (que roda sobre si próprio) – tem-se, imediatamente, $h_\rho \equiv e_1 \equiv h_{\rho_r}$ (e_1 , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo **X**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil (ortogonais a h_ρ).

Em seguida, rebateu-se o traço frontal do plano ρ (f_ρ), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos uma direção para definir f_{ρ_r} (o traço frontal do plano em rebatimento), que é a direção das retas fronto-horizontais. Falta-nos um ponto para definir f_{ρ_r} . Nesse sentido, há que rebater o ponto **C**, que é um ponto de f_ρ , e, simultaneamente, é um vértice do quadrado. O rebatimento do ponto **C** tem de se processar necessariamente com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Assim conduziu-se, por C_1 , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano que contém o arco do rebatimento do ponto **C**). Com o compasso, fazendo centro em C_1 e com raio C_1C_2 (que é a cota do ponto **C**) transportou-se a cota do ponto **C** para o eixo **X**, determinando-se o ponto C_{r1} (que é o ponto **C** rebatido pelo plano de perfil que contém o arco do seu rebatimento, bem como o triângulo do rebatimento do ponto **C**). Em seguida, desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto **C**, que tem um vértice em C_1 , outro vértice em C_{r1} e o terceiro vértice na charneira do rebatimento (h_ρ). Por fim, com o compasso, fazendo centro na charneira do rebatimento e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **C** em verdadeira grandeza, até à perpendicular à charneira que passa por C_1 , onde se situa C_r (o ponto **C** rebatido). Já temos o ponto que nos faltava para definir f_{ρ_r} . Nesse sentido, desenhou-se f_{ρ_r} , passando por C_r e paralelo ao eixo **X** – f_{ρ_r} está definido por um ponto (o ponto C_r) e por uma direção (é fronto-horizontal).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Para rebater o ponto **A** é necessário rebater uma reta do plano ρ , à qual o ponto **A** pertença – a reta **r**, neste caso. O ponto **H** (o traço horizontal da reta **r**) é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente $H_r \equiv H_1$. Tendo em conta que o ponto **C** é o traço frontal da reta **r**, a reta r_r (a reta **r** rebatida) passa por H_r e por C_r (está definida por dois pontos). Em seguida, por A_1 conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se A_r sobre a reta r_r .

A partir dos pontos A_r e C_r , construiu-se o quadrado **[ABCD]** em verdadeira grandeza (em rebatimento), e determinaram-se os pontos **B_r** e **D_r**. Para determinar as projeções do quadrado, inverteu-se o rebatimento do plano ρ , determinando-se as projeções dos pontos **B** e **D**.

A inversão do rebatimento do ponto **B** processa-se com o recurso à reta **s**, oblíqua, do plano ρ , à qual o ponto **B** pertence. A reta s_r (a reta **s** rebatida) está definida por um ponto (o ponto B_r) e uma direção (é paralela à reta r_r). Em seguida, determinaram-se as projeções da reta **s**. O ponto H' é o traço horizontal da reta **s** e é um ponto da charneira (que é h_p), pelo que roda sobre si próprio – tem-se imediatamente $H'_r \equiv H'_1$ (H'_2 situa-se no eixo **X**). Já temos um ponto para definir a reta **s** em projeções – o ponto H' . Tendo em conta que a reta **s** é paralela à reta **r**, já temos também a direção para definir a reta **s** em projeção – a reta s_r , em projeções, está definida por um ponto (o ponto H') e uma direção (é paralela à reta **r**).

Em seguida, por B_r conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com s_1 (a projeção horizontal da reta **s**) é B_1 (a projeção horizontal do ponto **B**). A projeção frontal do ponto **B** (B_2) situa-se sobre s_2 (a projeção frontal da reta **s**).

A inversão do rebatimento do ponto **D** e a determinação das suas projeções processou-se de forma idêntica à exposta para o ponto **B**, com o recurso a uma outra reta oblíqua do plano ρ – a reta **m**. A reta m_r (a reta **m** rebatida) está definida por um ponto (o ponto D_r) e por uma direção (é paralela às retas r_r e s_r). O ponto H'' é o traço horizontal da reta **m** e é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio – tem-se imediatamente $H''_r \equiv H''_1$ (H''_2 situa-se no eixo **X**). A reta **m**, em projeções, está definida por um ponto (o ponto H'') e por uma direção (a direção das retas **r** e **s**, pois a reta **m** é paralela àquelas duas retas). As projeções do ponto **D** situam-se sobre as projeções homónimas da reta **m**, na perpendicular à charneira que passa por D_r (e que corresponde ao plano de perfil que contém o arco do seu rebatimento).

A partir das projeções dos quatro pontos (**A**, **B**, **C** e **D**), desenharam-se as projeções do quadrado **[ABCD]**.

Determinação das projeções dos vértices da base superior do prisma:

O prisma pedido é um **prisma regular**, pelo que as arestas laterais do sólido são necessariamente **ortogonais** aos planos das bases. Qualquer aresta lateral do prisma está, assim, contida numa reta ortogonal ao plano ρ . Consideremos a aresta lateral **[BB']** – pelas projeções do ponto **B** conduziram-se as projeções da reta **p**, a reta suporte da aresta lateral **[BB']**. A reta **p** é uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**, pelo que a reta **p** não está totalmente definida. Por outro lado, também ainda não está garantida a ortogonalidade entre a reta **p** e o plano ρ .

A altura do prisma é a distância entre os planos das bases, que é medida numa reta ortogonal aos planos das bases (trata-se a **distância entre dois planos paralelos**). O segmento **[BB']** (a aresta lateral **[BB']**) está contido na reta **p**, pelo que o ponto **B'** é um ponto da reta **p**. Assim, a distância do ponto **B'** ao ponto **B** é a distância do ponto **B'** ao plano ρ e corresponde à distância entre os planos das duas bases, que se mede na reta **p**. A reta **p** não é paralela a qualquer dos planos de projeção, pelo que o segmento **[BB']** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do segmento estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano projetante da reta **p** (um plano de perfil) para o Plano Frontal de Projeção. Nesse sentido, identificou-se o plano π (o plano projetante da reta **p**) pelos seus traços e identificou-se a charneira do rebatimento (reta e'), que é f_π – tem-se imediatamente $f_\pi \equiv e'_2 \equiv f_{\pi r}$.

Em seguida, efetuou-se o rebatimento do ponto **B**, determinando B'_r – B'_r é o ponto **B** rebatido no seu segundo rebatimento (**B** rebatido pelo rebatimento do plano π). Já temos um ponto para definir a reta p_r (a reta **p** rebatida). Falta-nos outro ponto ou uma direção. A direção é a direção ortogonal ao plano ρ , que só fica garantida através da ortogonalidade da reta **p** a uma outra reta do plano ρ . Nesse sentido, recorreu-se à reta **i**, que é uma reta de perfil do plano ρ (a reta **i** é a reta de interseção do plano π com o plano ρ). A reta **i** está definida por dois pontos – os seus traços nos planos de projeção (os pontos **F** e H''''). Para se garantir a ortogonalidade da reta **p** em relação ao plano ρ , é necessário garantir a ortogonalidade da reta **p** em relação à reta **i** (para que se verifique o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos**). Tendo em conta que se trata de duas retas de perfil (cujas projeções não verifica o **Critério de Reversibilidade**), é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar – o rebatimento do plano π , já iniciado.

Efetuem os rebatimento da reta **i**. O ponto **F** é um ponto da charneira (reta e'), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente $F_r \equiv F_2$. Rebateu-se o ponto H'''' (o traço horizontal da reta **i**), determinando-se H''''_r . A reta i_r (a reta **i** rebatida) passa por F_r e por H''''_r (e tem ainda de passar por B'_r , pois o ponto **B** também pertence à reta **i**). Em seguida, desenhou-se a reta p_r , passando por B'_r e perpendicular a i_r – está garantida a ortogonalidade da reta **p** em relação à reta **i**, pelo que está garantida a ortogonalidade da reta **p** em relação ao plano ρ . Note que o ponto **B** é, na prática, o ponto de concorrência das retas **p** e **i**, o que se pode comprovar em rebatimento.

Sobre a reta p_r , a partir de B'_r , mediram-se os 7 cm (a altura do prisma, que é a distância do ponto **B'** ao plano ρ) e determinou-se B'_r . Em seguida, inverteu-se o rebatimento do ponto **B'** e determinaram-se as suas projeções, sobre as projeções homónimas da reta **p**.

Determinação das projeções do prisma:

A partir das projeções dos oito vértices do prisma (os vértices **A**, **B**, **C** e **D** da base inferior, e os vértices **A'**, **B'**, **C'** e **D'**, da base superior), desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é a linha fechada **[ABB'C'D'D]**, cuja projeção frontal é o polígono **[A₂B₂B'₂C'₂D'₂D₂]**. Em projeção frontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – o vértice **C** e o vértice **A'**. O vértice **C**, por ser o vértice de **menor afastamento** do prisma, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[BC]** e **[CD]**, da base inferior, e a aresta lateral **[CC']**. O vértice **A'**, por ser o vértice de **maior afastamento** do prisma, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[A'B']** e **[A'D']**, da base superior, e a aresta lateral **[AA']**. Note que, em projeção frontal, a base superior é visível, bem como as faces laterais **[AA'B'B]** e **[AA'D'D]**. A base inferior e as faces laterais **[BB'C'C]** e **[CC'D'D]** são invisíveis.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O contorno aparente horizontal é a linha fechada $[BCDD'A'B']$, cuja projeção horizontal é o polígono $[B_1C_1D_1D'_1A'_1B'_1]$. Em projeção horizontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – o vértice C' e o vértice A . O vértice A , por ser o vértice de **menor cota** do prisma, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas $[AB]$ e $[AD]$, da base inferior, e a aresta lateral $[AA']$. O vértice C' , por ser o vértice de **maior cota** do prisma, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas $[B'C']$ e $[C'D']$, da base superior, e a aresta lateral $[CC']$. Note que, em projeção horizontal, a base superior é visível, bem como as faces laterais $[BB'C'C]$ e $[CC'D'D]$. A base inferior e as faces laterais $[AA'B'B]$ e $[AA'D'D]$ são invisíveis.

Traçado:

Os traços do plano ρ , porque integram os dados, representaram-se a **médio**. O eixo X representa-se igualmente a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. As duas projeções do prisma (o objetivo do exercício), com as respectivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. O quadrado $[ABCD]$, em rebatimento, representa-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano ρ (que nos permitiram determinar as projeções do quadrado $[ABCD]$), o plano π e todos os traçados relativos ao rebatimento do plano π (que nos permitiram determinar as projeções do vértice B'), bem como todos os traçados que nos permitiram determinar os restantes vértices da base superior do sólido.

134.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto O , pelas suas projeções, em função dos dados – o plano ρ está representado pelo eixo X (onde se situam os seus traços) e pelas projeções do ponto O .

Resolução:

Determinação das projeções da base da pirâmide:

O plano que contém o quadrado $[ABCD]$ (o plano ρ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o quadrado $[ABCD]$ não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do triângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

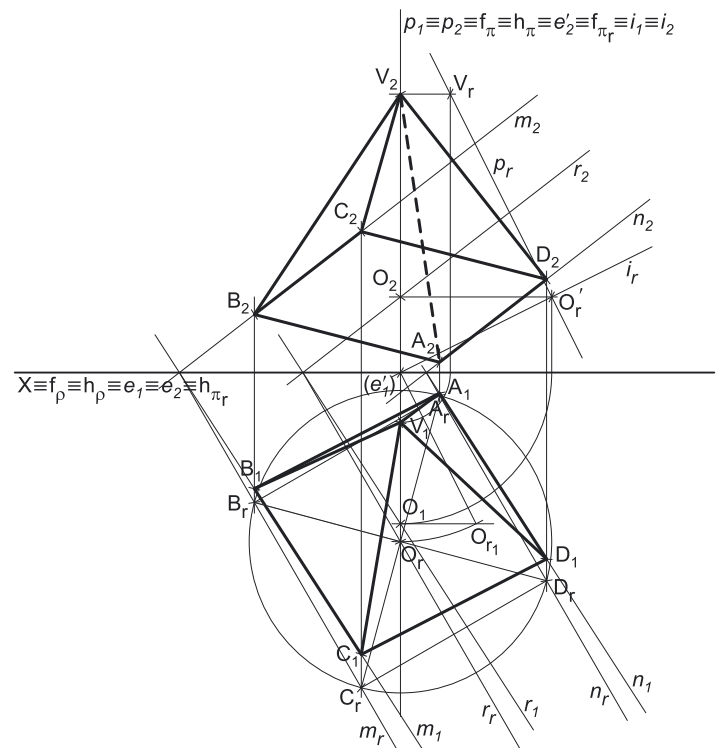
Por outro lado, o ângulo que o lado $[AB]$ faz com o eixo X é um **ângulo real** e não um **ângulo em projeções** – o ângulo entre o lado $[AB]$ e o eixo X está contido no plano ρ . Nesse sentido, o plano que contém o ângulo (o plano ρ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optemos por rebater o plano ρ para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento das suas retas). Começemos por identificar a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano ρ (h_ρ), que se situa no eixo X , pelo que se tem imediatamente $X \equiv f_\rho \equiv h_\rho \equiv e_1 \equiv e_2$. Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil.

Efeituou-se o rebatimento do ponto O . O rebatimento do ponto O tem de se processar necessariamente com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Assim conduziram-se, por O_1 , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano que contém o arco do rebatimento do ponto O) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira, e a partir de O_1 , mediu-se a cota do ponto O , o que nos permitiu determinar o ponto O_{r1} (O_{r1} é o ponto O , rebatido pelo rebatimento do plano de perfil que contém o arco do seu rebatimento). Em seguida, desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto O , que tem um vértice em O_1 , outro vértice em O_{r1} e o terceiro vértice na charneira do rebatimento (no eixo X). Por fim, com o compasso, fazendo centro na charneira do rebatimento e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto O em verdadeira grandeza, até à perpendicular à charneira que passa por O_1 , onde se situa O_r (o ponto O rebatido).

Com o compasso, fazendo centro em O_r e com 4 cm de raio, desenhou-se a circunferência circunscrita ao quadrado, em verdadeira grandeza (em rebatimento) e procedeu-se à construção do quadrado, em rebatimento, inscrito na circunferência. É dado que o lado $[AB]$ faz um ângulo de 30° com o eixo X e, em função dos dados, deduz-se au esse ângulo tem abertura para a esquerda. Por outro lado, atendendo a que as diagonais de um quadrado fazem ângulos de 45° com os lados do polígono, a diagonal $[AC]$ do quadrado faz necessariamente um ângulo de 75° com o eixo X ($30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$). Por fim, esse ângulo já pode medir-se em verdadeira grandeza, em rebatimento. Assim, por O_r conduziu-se uma reta fazendo um ângulo de 45° (a.e.) com o eixo X , o que nos permitiu determinar os pontos A_r e C_r , sobre a circunferência – tenha em conta que se respeitou o facto de o ponto A ser o vértice de menor afastamento do quadrado, pelo que C será, necessariamente, o seu vértice de maior afastamento. Em seguida, efetuou-se a restante construção do quadrado, o que nos permitiu determinar os pontos B_r e D_r .

A inversão do rebatimento do plano ρ processa-se com o recurso a retas do plano ρ às quais os pontos pertencem. Assim, optou-se por recorrer às retas suporte dos lados $[AD]$ e $[BC]$ do quadrado. A reta m_r é, em rebatimento, a reta suporte do lado $[BC]$ do quadrado – a reta m_r está definida por dois pontos (os pontos B_r e C_r). Para se determinarem as projeções dos vértices B e C do polígono, é necessário determinar as projeções da reta m . A reta m é uma reta passante, pelo que o seu ponto de concorrência com o eixo X é um ponto fixo (é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio) – já temos um ponto para definir a reta m em projeções. Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta m em projeções.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Os dados do plano ρ são insuficientes para definir a reta m , pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano ρ , esta que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção. Recorreu-se à reta r , como reta auxiliar do plano ρ . A reta r é uma reta paralela à reta m que passa pelo ponto O . Assim, a reta r_r (a reta r rebatida) está definida por um ponto (o ponto O_r) e por uma direção (é paralela à reta m_r). A reta r é, também ela, uma reta passante, pelo que o seu ponto de concorrência com o eixo X é um ponto fixo (é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio) – já temos um ponto para definir a reta r em projeções. Por outro lado, a reta r passa pelo ponto O , cujas projeções já são conhecidas – já temos outro ponto para definir a reta r em projeções. Este raciocínio permitiu-nos desenhar as projeções da reta r , que está definida por dois pontos – o ponto O e o seu ponto de concorrência com o eixo X .

Já temos a direção que nos faltava para definir a reta m em projeções – a direção da reta r . Assim, desenharam-se as projeções da reta m – a reta m está definida por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo X) e por uma direção (é paralela à reta r). Em seguida, pelo ponto B_r conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com m_r (a projeção horizontal da reta m) é B_1 (a projeção horizontal do ponto B). A projeção frontal do ponto B (B_2) situa-se sobre m_2 (a projeção frontal da reta m). As projeções do ponto C determinaram-se de forma semelhante, sobre as projeções da reta m , sobre a perpendicular à charneira que passa por C_r (e que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto C).

A determinação das projeções dos pontos A e D processou-se de forma idêntica à exposta para os pontos B e C . A reta n é a reta suporte do lado $[AD]$ do quadrado – a reta n é, também ela, uma reta passante e é paralela às retas r e m . Assim, as projeções da reta n determinaram-se de forma semelhante à exposta para as projeções da reta m (a reta n , em projeções, está definida por um ponto e uma direção). As projeções dos pontos A e D determinaram-se sobre as projeções homónimas da reta n , sobre as perpendiculares à charneira que por eles passam.

A partir das projeções dos quatro pontos (A , B , C e D), desenharam-se as projeções do quadrado $[ABCD]$.

Determinação das projeções do vértice da pirâmide:

A pirâmide pedida é uma **pirâmide regular**, pelo que o eixo da pirâmide é necessariamente **ortogonal** ao plano da base. O eixo da pirâmide está, assim, contido numa reta que passa pelo ponto O e é ortogonal ao plano ρ . Nesse sentido, pelas projeções do ponto O conduziram-se as projeções da reta p , a reta suporte do eixo da pirâmide – a reta p é uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**, pelo que a reta p não está totalmente definida. Por outro lado, também ainda não está garantida a ortogonalidade entre a reta p e o plano ρ .

A altura da pirâmide é a distância do seu vértice (o ponto V) ao plano da base, que é medida numa reta ortogonal ao plano da base (trata-se a **distância de um ponto a um plano**). O segmento $[OV]$ (o eixo da pirâmide) está contido na reta p , pelo que o ponto V é um ponto da reta p . Assim, a distância do ponto V ao plano ρ mede-se na reta p . A reta p não é paralela a qualquer dos planos de projeção, pelo que o segmento $[OV]$ (o eixo da pirâmide) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do segmento estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano projetante da reta p (um plano de perfil) para o Plano Frontal de Projeção. Nesse sentido, identificou-se o plano π (o plano projetante da reta p) pelos seus traços e identificou-se a charneira do rebatimento (reta e'), que é $f_\pi -$ tem-se imediatamente $f_\pi \equiv e'_2 \equiv f_{\pi r}$.

Em seguida, efetuou-se o rebatimento do ponto O , determinando $O_r' - O_r'$ é o ponto O rebatido no seu segundo rebatimento (O rebatido pelo rebatimento do plano π). Já temos um ponto para definir a reta p_r (a reta p rebatida). Falta-nos outro ponto ou uma direção. A direção é a direção ortogonal ao plano ρ , que só fica garantida através da ortogonalidade da reta p a uma outra reta do plano ρ . Nesse sentido, recorreu-se à reta i , que é uma reta de perfil do plano ρ (a reta i é a reta de interseção do plano π com o plano ρ). A reta i está definida por dois pontos – o ponto O (que é um ponto que pertence simultaneamente aos dois planos) e pelo seu ponto de concorrência com o eixo X (porque a reta i é necessariamente uma reta passante). Para se garantir a ortogonalidade da reta p em relação ao plano ρ , é necessário garantir a ortogonalidade da reta p em relação à reta i (para que se verifique o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos**). Tendo em conta que se trata de duas retas de perfil (cujas projeções não verifica o **Critério de Reversibilidade**), é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar – o rebatimento do plano π , já iniciado.

Efetuem os rebatimentos da reta i . O ponto de concorrência da reta i com o eixo X (que não se identificou) é um ponto da charneira (reta e'), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). A reta i_r (a reta i rebatida) passa pelo seu ponto de concorrência com o eixo X e por O_r' . Em seguida, desenhou-se a reta p_r , passando por O_r' e perpendicular a i_r – está garantida a ortogonalidade da reta p em relação à reta i , pelo que está garantida a ortogonalidade da reta p em relação ao plano ρ . Note que o ponto O é, na prática, o ponto de concorrência das retas p e i , o que se pode comprovar em rebatimento.

Sobre a reta p_r , a partir de O_r' , mediram-se os 6 cm (a altura da pirâmide, que é a distância do ponto V ao plano ρ) e determinou-se V_r . Em seguida, inverteu-se o rebatimento do ponto V e determinaram-se as suas projeções, sobre as projeções homónimas da reta p .

Determinação das projeções da pirâmide:

A partir das projeções dos cinco vértices da pirâmide (os vértices A , B , C e D , da base, e o vértice V), desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é a linha fechada $[ABVD]$, cuja projeção frontal é o polígono $[A_2B_2V_2D_2]$. Em projeção frontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice C . Este vértice, por ser o vértice de **maior afastamento** da pirâmide, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas $[BC]$ e $[CD]$, da base, e a aresta lateral $[CV]$. Por outro lado, a aresta lateral $[AV]$ é invisível, em projeção frontal, pois separa duas faces invisíveis em projeção frontal – as faces laterais $[ABV]$ e $[ADV]$. Em projeção frontal, a base $[ABCD]$ é visível, bem como as faces laterais $[BCV]$ e $[CDV]$.

O contorno aparente horizontal é a linha fechada $[ABCD]$, cuja projeção horizontal é o polígono $[A_1B_1C_1D_1]$. Em projeção horizontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice V . Este vértice, por ser o vértice de **maior cota** da pirâmide, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – todas as arestas laterais (as arestas $[AV]$, $[BV]$, $[CV]$ e $[DV]$). Em projeção horizontal, a base $[ABCD]$ é invisível, enquanto todas as faces laterais são visíveis.

Traçado:

O eixo X representou-se a **médio** (é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano ρ , porque estão coincidentes com o eixo X , representaram-se a **médio** (a expressividade que já tinha sido atribuída ao eixo X). As duas projeções da pirâmide (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. O quadrado $[ABCD]$, em rebatimento, representa-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano ρ (que nos permitiram determinar as projeções do quadrado $[ABCD]$), bem como o plano π e todos os traçados relativos ao rebatimento do plano π (que nos permitiram determinar as projeções do vértice V).

135.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados – o plano ρ está representado pelo eixo **X** (onde se situam os seus traços) e pelas projeções do ponto **O**.

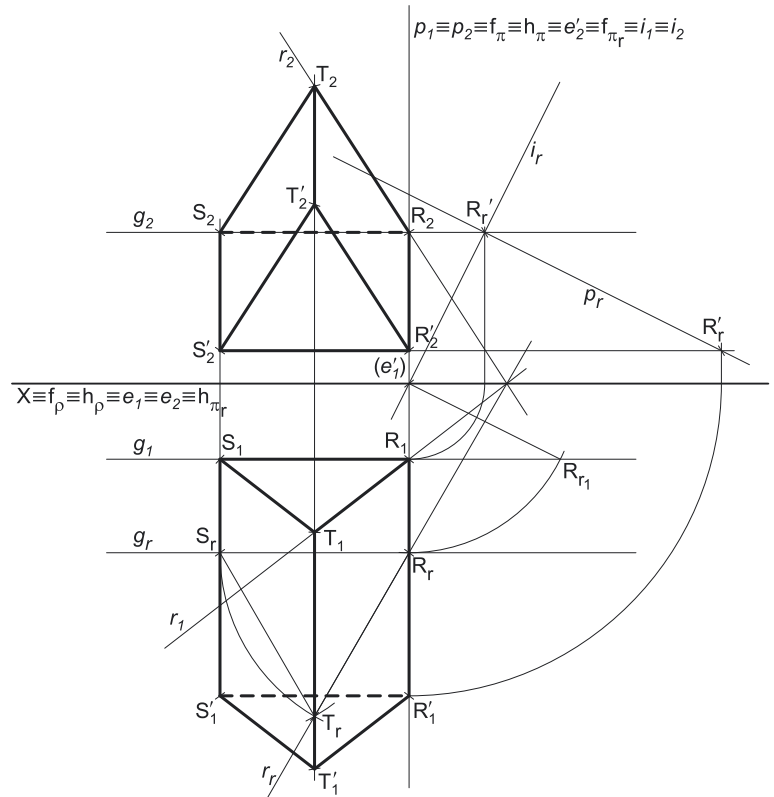
Resolução:

Determinação das projeções da base inferior do prisma:

O plano que contém o triângulo **[RST]** (o plano ρ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o triângulo **[RST]** (a base de menor afastamento do prisma) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se por recorrer ao rebatimento do plano ρ para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Assim, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano (que roda sobre si próprio) – tem-se, imediatamente, $h_p \equiv e_1 \equiv h_{p_1}$ (e_2 , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo **X**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil (ortogonais a h_p).

Efeetuou-se o rebatimento do ponto **R**. O rebatimento do ponto **R** tem de se processar necessariamente com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Assim conduziram-se, por **R₁**, uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano que contém o arco do rebatimento do ponto **R**) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira, e a partir de **R₁**, mediu-se a cota do ponto **R**, o que nos permitiu determinar o ponto **R_{r1}** (**R_{r1}** é o ponto **R**, rebatido pelo rebatimento do plano de perfil que contém o arco do seu rebatimento). Em seguida, desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto **R**, que tem um vértice em **R₁**, outro vértice em **R_{r1}** e o terceiro vértice na charneira do rebatimento (no eixo **X**). Por fim, com o compasso, fazendo centro na charneira do rebatimento e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **R** em verdadeira grandeza, até à perpendicular à charneira que passa por **R₁**, onde se situa **R_r** (o ponto **R** rebatido).



A partir do ponto **R_r**, construiu-se o triângulo **[RST]** em verdadeira grandeza (em rebatimento), respeitando os dados (o lado **[RS]** é fronto-horizontal, ou seja, paralelo ao eixo **X**) e determinaram-se os pontos **S**, e **T**. Para determinar as projeções do triângulo, inverteu-se o rebatimento do plano ρ , determinando-se as projeções dos pontos **S** e **T**.

A inversão do rebatimento dos pontos **S** e **T** processou-se com o recurso a retas do plano ρ , às quais aqueles pontos pertencem. Assim, recorreu-se à reta **r** (a reta suporte do lado **[RT]** do triângulo) para se determinarem as projeções do ponto **T**. A reta **r_r** (a reta **r** rebatida) está definida por dois pontos – os pontos **R_r** e **T_r**. A reta **r** é uma reta passante, pelo que o seu ponto de concorrência com o eixo **X** é um ponto fixo (é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio) – já temos um ponto para definir a reta **r** em projeções. Por outro lado, a reta **r** passa pelo ponto **R**, cujas projeções já são conhecidas – já temos outro ponto para definir a reta **r** em projeções. Este raciocínio permitiu-nos desenhar as projeções da reta **r**, que está definida por dois pontos – o ponto **R** e o seu ponto de concorrência com o eixo **X**.

Em seguida, por **T_r** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com **r₁** (a projeção horizontal da reta **r**) é **T₁** (a projeção horizontal do ponto **T**). A projeção frontal do ponto **T** (**T₂**) situa-se sobre **r₂** (a projeção frontal da reta **r**).

Em seguida, recorreu-se à reta **g** (a reta suporte do lado **[RS]** do triângulo) para se determinarem as projeções do ponto **S**. A reta **g_r** (a reta **g** rebatida) está definida por dois pontos (os pontos **R_r** e **S_r**) e, ainda, por uma direção (é fronto-horizontal). A reta **g** é uma reta fronto-horizontal, pelo que já temos uma direção para definir a reta em projeções. Por outro lado, a reta **g** passa pelo ponto **R**, cujas projeções já são conhecidas – já temos um ponto para definir a reta **g** em projeções. Este raciocínio permitiu-nos desenhar as projeções da reta **g**, que está definida por um ponto (o ponto **R**) e por uma direção (é fronto-horizontal).

Em seguida, por **S_r** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com **g₁** (a projeção horizontal da reta **g**) é **S₁** (a projeção horizontal do ponto **S**). A projeção frontal do ponto **S** (**S₂**) situa-se sobre **g₂** (a projeção frontal da reta **g**).

A partir das projeções dos três pontos (**R**, **S** e **T**), desenharam-se as projeções do triângulo **[RST]**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Determinação das projeções dos vértices da base superior do prisma:

O prisma pedido é um **prisma regular**, pelo que as arestas laterais do sólido são necessariamente **ortogonais** aos planos das bases. Qualquer aresta lateral do prisma está, assim, contida numa reta ortogonal ao plano p . Consideremos a aresta lateral $[RR']$ – pelas projeções do ponto R conduziram-se as projeções da reta p , a reta suporte da aresta lateral $[RR']$. A reta p é uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**, pelo que a reta p não está totalmente definida. Por outro lado, também ainda não está garantida a ortogonalidade entre a reta p e o plano p .

A altura do prisma é a distância entre os planos das bases, que é medida numa reta ortogonal aos planos das bases (trata-se a **distância entre dois planos paralelos**). O segmento $[RR']$ (a aresta lateral $[RR']$) está contido na reta p , pelo que o ponto R' é um ponto da reta p . Assim, a distância do ponto R' ao ponto R é a distância do ponto R' ao plano p e corresponde à distância entre os planos das duas bases, que se mede na reta p . A reta p não é paralela a qualquer dos planos de projeção, pelo que o segmento $[RR']$ não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do segmento estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano projetante da reta p (um plano de perfil) para o Plano Frontal de Projeção. Nesse sentido, identificou-se o plano π (o plano projetante da reta p) pelos seus traços e identificou-se a charneira do rebatimento (reta e'), que é f_{π} – tem-se imediatamente $f_{\pi} \equiv e'_2 \equiv f_{\pi_r}$.

Em seguida, efetuou-se o rebatimento do ponto R , determinando R_r' – R_r' é o ponto R rebatido no seu segundo rebatimento (R rebatido pelo rebatimento do plano π). Já temos um ponto para definir a reta p_r (a reta p rebatida). Falta-nos outro ponto ou uma direção. A direção é a direção ortogonal ao plano p , que só fica garantida através da ortogonalidade da reta p a uma outra reta do plano p . Nesse sentido, recorreu-se à reta i , que é uma reta de perfil do plano p (a reta i é a reta de interseção do plano π com o plano p). A reta i está definida por dois pontos – o ponto R (que é um ponto que pertence simultaneamente aos dois planos) e pelo seu ponto de concorrência com o eixo X (porque a reta i é necessariamente uma reta passante). Para se garantir a ortogonalidade da reta p em relação ao plano p , é necessário garantir a ortogonalidade da reta p em relação à reta i (para que se verifique o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos**). Tendo em conta que se trata de duas retas de perfil (cujas projeções não verifica o **Critério de Reversibilidade**), é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar – o rebatimento do plano π , já iniciado.

Efetuemos o rebatimento da reta i . O ponto de concorrência da reta i com o eixo X (que não se identificou) é um ponto da charneira (reta e'), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). A reta i_r (a reta i rebatida) passa pelo seu ponto de concorrência com o eixo X e por R_r' . Em seguida, desenhou-se a reta p_r , passando por R_r' e perpendicular a i_r – está garantida a ortogonalidade da reta p em relação à reta i , pelo que está garantida a ortogonalidade da reta p em relação ao plano p . Note que o ponto R é, na prática, o ponto de concorrência das retas p e i , o que se pode comprovar em rebatimento.

Sobre a reta p_r , a partir de R_r' , mediram-se os 7 cm (a altura do prisma, que é a distância do ponto R' ao plano p) e determinou-se R'_r . Em seguida, inverteu-se o rebatimento do ponto R' e determinaram-se as suas projeções, sobre as projeções homónimas da reta p .

Determinação das projeções do prisma:

A partir das projeções dos oito vértices do prisma (os vértices R , S e T da base de menor afastamento, e os vértices R' , S' e T' , da base de maior afastamento), desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é a linha fechada $[RTSS'R']$, cuja projeção frontal é o polígono $[R_2T_2S'_2S'_2R'_2]$. Em projeção frontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice T' . O vértice T' , por ser o vértice de **maior afastamento** do prisma, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas $[R'T']$ e $[S'T']$, da base de maior afastamento, e a aresta lateral $[TT']$. Por outro lado, a aresta $[RS]$ da base de menor afastamento é invisível, pois separa duas faces invisíveis em projeção frontal – a base $[RST]$ e a face lateral $[RR'S'S]$. Note que, em projeção frontal, a base de maior afastamento é visível, bem como as faces laterais $[RR'T'T]$ e $[SS'T'T]$.

O contorno aparente horizontal é a linha fechada $[RSS'T'R']$, cuja projeção horizontal é o polígono $[R_1S_1S'_1T'_1R'_1]$. Em projeção horizontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente horizontal – o vértice T . O vértice T , por ser o vértice de **maior cota** do prisma, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas $[RT]$ e $[ST]$, da base de menor afastamento, e a aresta lateral $[TT']$. Por outro lado, a aresta $[R'S']$ da base de maior afastamento é invisível, pois separa duas faces invisíveis em projeção horizontal – a base $[R'S'T']$ e a face lateral $[RR'S'S]$. Note que, em projeção horizontal, a base de menor afastamento é visível, bem como as faces laterais $[RR'T'T]$ e $[SS'T'T]$.

Traçado:

O eixo X representou-se a **médio** (é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano p , porque estão coincidentes com o eixo X , representaram-se a **médio** (a expressividade que já tinha sido atribuída ao eixo X). As duas projeções da pirâmide (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. O triângulo $[RST]$, em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano p (que nos permitiram determinar as projeções do triângulo $[RST]$), bem como o plano π e todos os traçados relativos ao rebatimento do plano π (que nos permitiram determinar as projeções do vértice R'), bem como todos os traçados que nos permitiram determinar os restantes vértices da base de maior afastamento do sólido.

136.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se a reta r , pelas suas projeções, em função dos dados. A reta r tem as suas projeções paralelas entre si, pois é paralela ao $\beta_{2/4}$ (retas paralelas ao $\beta_{2/4}$ têm as suas projeções paralelas entre si). Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto C , pertencente à reta r , em função da sua abscissa (que é dada). Sabendo que a reta r é uma reta de maior inclinação do plano α , determinaram-se, em seguida, os traços do plano.

Em primeiro lugar, determinou-se o traço frontal da reta r – o ponto F . Já temos um ponto para definir f_α (o traço frontal do plano α). Falta-nos outro ponto ou uma direção. A reta r é uma reta de maior inclinação do plano α , pelo que a sua projeção frontal (r_2) é perpendicular ao traço frontal do plano (f_α). Assim, já temos a direção que nos faltava para definir f_α – f_α está definido por um ponto (o ponto F) e por uma direção (é perpendicular a r_2).

Por fim, determinou-se o traço horizontal do plano α (h_α), que é concorrente com f_α num ponto do eixo X – assim, já temos um ponto para definir h_α . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir h_α . Nesse sentido, determinou-se o ponto H , o traço horizontal da reta r . Já temos o ponto que nos faltava para definir h_α . O traço horizontal do plano α (h_α) está definido por dois pontos – o ponto H e o ponto de concorrência dos traços do plano.

Resolução:**Determinação das projeções do quadrado [ABCD]:**

O plano que contém o quadrado [ABCD] (o plano α) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o quadrado [ABCD] (a face inferior do cubo) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

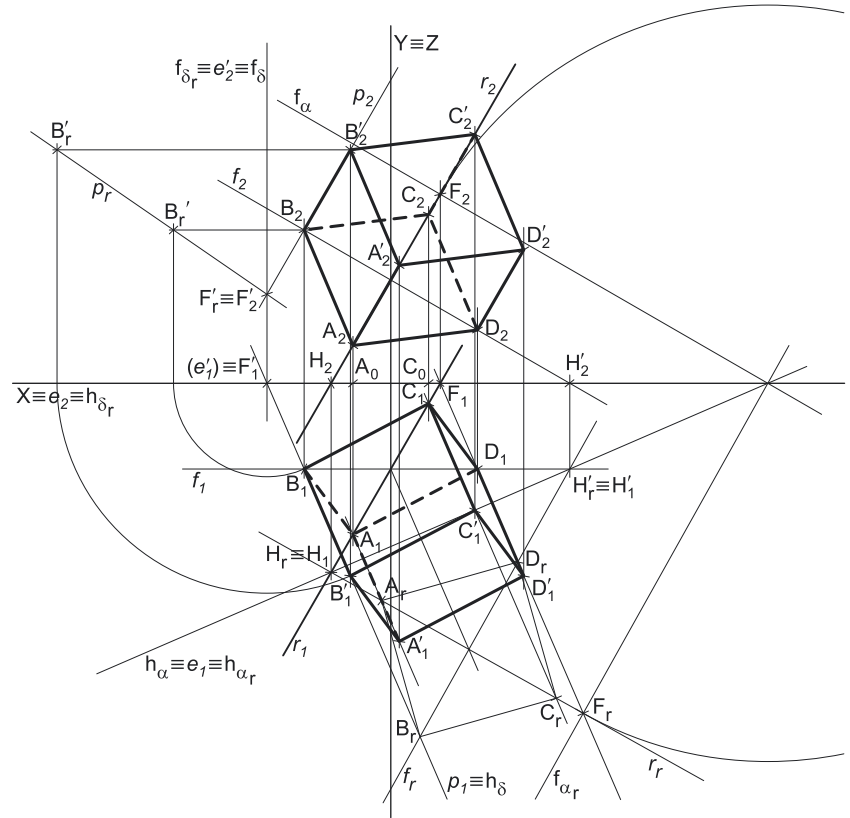
Optou-se por recorrer ao rebatimento do plano α para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Assim, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano (que roda sobre si próprio) – tem-se, imediatamente, $h_\alpha \equiv e_1 \equiv h_{\alpha_r}$ (e_2 , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo X). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos verticais (ortogonais a h_α).

O ponto H é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente $H_r \equiv H_1$. Em seguida, rebateu-se o traço frontal do plano α (f_α), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir f_α (o traço frontal do plano em rebatimento), que é o ponto de concorrência dos traços do plano (que é um ponto da charneira e, por isso é fixo – roda sobre si próprio). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Optou-se por se rebater o ponto F , que é um ponto de f_α . Para rebater o ponto F conduziu-se, por F_1 , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano que contém o arco do rebatimento do ponto F). Com o compasso, fazendo centro no ponto de concorrência dos traços do plano α e com raio até F_2 , desenhou-se um arco (de transporte) até à perpendicular à charneira que passa por F_1 , determinando-se F_r (o ponto F rebatido). Em seguida, desenhou-se f_{α_r} (o traço frontal do plano α rebatido), passando por F_r e pelo ponto de concorrência dos dois traços do plano (f_{α_r} está definido por dois pontos).

Em seguida, desenhou-se a reta r_r (a reta r rebatida), que passa por F_r e por H_r (está definida por dois pontos), o que nos permitiu rebater os pontos A e C (através do rebatimento de uma reta à qual os dois pontos pertencem – a reta r). Assim, por A_1 (a projeção horizontal do ponto A) conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco dos eu rebatimento) e determinou-se A_r sobre a reta r_r (o ponto A é um ponto da reta r , pelo que A_r se situa necessariamente sobre r_r). De forma semelhante, o ponto C_r situa-se sobre a reta r_r , na perpendicular à charneira que passa por C_1 (a projeção horizontal do ponto C), perpendicular essa que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto C .

A partir dos pontos A_r e C_r , construiu-se o quadrado [ABCD] em verdadeira grandeza (em rebatimento), e determinaram-se os pontos B_r e D_r . Para determinar as projeções do quadrado, inverteu-se o rebatimento do plano δ , determinando-se as projeções dos pontos B e D .

A inversão do rebatimento dos pontos B e D processou-se com o recurso à reta f , frontal (de frente), do plano α , à qual os dois pontos pertencem (a reta f é a reta suporte da diagonal [BD] do quadrado). Note que a reta r , porque é uma reta de maior inclinação do plano α , é perpendicular a todas as retas frontais (de frente) do plano α . Uma vez que as duas diagonais de um quadrado são perpendiculares entre si, e por que a diagonal [AC] está contida numa reta de maior inclinação do plano α , a diagonal [BD] está necessariamente contida numa reta frontal (de frente) do plano α .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A reta f_r (a reta f rebatida) está definida por dois pontos (os pontos B_r e D_r) e ainda por uma direção (é paralela a $f_{\alpha r}$). Em seguida, determinaram-se as projeções da reta f . O ponto H' é o traço horizontal da reta f e é um ponto da charneira (que é h_{α}), pelo que roda sobre si próprio – tem-se imediatamente $H'_r \equiv H'_1$ (H'_2 situa-se no eixo X). Já temos um ponto para definir a reta f em projeções – o ponto H' . Já temos também a direção da reta f (que é a direção das retas frontais do plano α), o que nos permitiu desenhar as duas projeções da reta f .

Por fim, por B_r conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com f_1 (a projeção horizontal da reta f) é B_1 (a projeção horizontal do ponto B). A projeção frontal do ponto B (B_2) situa-se sobre f_2 (a projeção frontal da reta f). O processo atrás exposto para o ponto B repetiu-se para o ponto D , o que nos permitiu determinar as duas projeções do ponto D .

A partir das projeções dos quatro pontos (A , B , C e D), desenharam-se as projeções do quadrado $[ABCD]$.

Determinação das projeções dos vértices da face $[A'B'C'D']$ do cubo:

O cubo é um **poliedro regular**, em que as arestas compreendidas entre as faces $[ABCD]$ e $[A'B'C'D']$ do sólido são necessariamente **ortogonais** aos planos que contêm aquelas duas faces. Consideremos a aresta $[BB']$ – pelas projeções do ponto B conduziram-se as projeções da reta p , a reta suporte da aresta lateral $[BB']$.

A reta p é ortogonal a f_{α} , que é uma reta frontal (de frente) do plano com afastamento nulo – a ortogonalidade entre a reta p e f_{α} é direta em projeção frontal, pelo que p_2 (a projeção frontal da reta p) é perpendicular a f_{α} . A reta p é também ortogonal a h_{α} , que é uma reta horizontal (de nível) do plano com cota nula – a ortogonalidade entre a reta p e h_{α} é direta em projeção horizontal, pelo que p_1 (a projeção horizontal da reta p) é perpendicular a h_{α} . Assim, a reta p é ortogonal ao plano α , pois é ortogonal a duas retas concorrentes do plano α (verifica o **Critério da ortogonalidade entre retas e planos**).

O comprimento da aresta $[BB']$ é a distância entre os planos que contêm as faces $[ABCD]$ e $[A'B'C'D']$, que é medida numa reta ortogonal aos planos das bases (trata-se a **distância entre dois planos paralelos**). O segmento $[BB']$ (a aresta $[BB']$) está contido na reta p , pelo que o ponto B' é um ponto da reta p . Assim, a distância do ponto B' ao ponto B é a distância do ponto B' ao plano α e corresponde à distância entre os planos das duas faces, que se mede na reta p . A reta p não é paralela a qualquer dos planos de projeção, pelo que o segmento $[BB']$ não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do segmento estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano projetante horizontal da reta p para o Plano Frontal de Projeção. Nesse sentido, representou-se o plano δ (o plano projetante horizontal da reta p) pelos seus traços e identificou-se a charneira do rebatimento (reta e'), que é f_{δ} – tem-se imediatamente $f_{\delta} \equiv e'_2 \equiv f_{\delta r}$.

Em seguida, efetuou-se o rebatimento do ponto B , determinando B'_r – B'_r é o ponto B rebatido no seu segundo rebatimento (B rebatido pelo rebatimento do plano δ). Já temos um ponto para definir a reta p_r (a reta p rebatida). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Recorreu-se ao ponto F' , o traço frontal da reta p . Assim, determinou-se o traço frontal da reta (o ponto F') que é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente $F'_r \equiv F'_2$. Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta p_r . A reta p_r (a reta p rebatida) passa por B'_r e por F'_r (está definida por dois pontos).

A medida da aresta $[BB']$ é igual à medida do lado do quadrado $[ABCD]$, que já foi previamente determinado em rebatimento. Assim, com o compasso, transportou-se a medida do lado do quadrado (que é A_rB_r , por exemplo) para a reta p_r , a partir de B'_r , e determinou-se B'_r . Em seguida, inverteu-se o rebatimento do ponto B' e determinaram-se as suas projeções, sobre as projeções homónimas da reta p .

Em seguida, teve-se em conta que as arestas do cubo que são ortogonais ao plano α são todas paralelas entre si e, ainda, que as arestas da face superior são paralelas às arestas correspondentes da face inferior.

Assim, pelas projeções do ponto A (um dos vértices da face inferior) conduziram-se as projeções da reta suporte da aresta $[AA']$ (que não se identificaram, para não sobrecarregar o desenho com excesso de notações) – o ponto A' é o vértice da face superior que corresponde ao vértice A da face inferior. Em seguida, pelas projeções do ponto B' conduziram-se as projeções homónimas da reta suporte da aresta $[A'B']$ da face superior (que também não se identificaram, para não sobrecarregar o desenho com excesso de notações). O vértice A' da face superior é o ponto de concorrência das retas suporte daquelas duas arestas.

De forma idêntica, pelas projeções do ponto C (outro dos vértices da face inferior) conduziram-se as projeções da reta suporte da aresta $[CC']$ (que mais uma vez não se identificaram, para não sobrecarregar o desenho com excesso de notações) – o ponto C' é o vértice da face superior que corresponde ao vértice C da face inferior. Em seguida, pelas projeções do ponto B' conduziram-se as projeções homónimas da reta suporte da aresta $[B'C']$ da face superior (que também não se identificaram, para não sobrecarregar o desenho com excesso de notações). O vértice C' da face superior é o ponto de concorrência das retas suporte daquelas duas arestas.

Por fim, pelas projeções do ponto D (outro dos vértices da base inferior) conduziram-se as projeções da reta suporte da aresta $[DD']$ (que de novo não se identificaram, para não sobrecarregar o desenho com excesso de notações) – o ponto D' é o vértice da face superior que corresponde ao vértice D da face inferior. Em seguida, pelas projeções do ponto C' conduziram-se as projeções homónimas da reta suporte da aresta $[C'D']$ da face superior (que também não se identificaram, para não sobrecarregar o desenho com excesso de notações). O vértice D' da face superior é o ponto de concorrência das retas suporte daquelas duas arestas.

Determinação das projeções do prisma:

A partir das projeções dos oito vértices do cubo (os vértices A , B , C e D da face inferior, e os vértices A' , B' , C' e D' , da face superior), desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é a linha fechada $[ABB'C'D'D]$, cuja projeção frontal é o polígono $[A_2B_2B'_2C'_2D'_2D_2]$. Em projeção frontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – o vértice A' e o vértice C . O vértice C , por ser o vértice de **menor afastamento** do cubo, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas $[CC']$, $[BC]$ e $[CD]$. O vértice A' , por ser o vértice de **maior afastamento** do cubo, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas $[AA']$, $[A'B']$ e $[A'D']$. Note que, em projeção frontal, a face superior é visível, bem como as faces $[AA'B'B]$ e $[AA'D'D]$. A face inferior e as faces $[BB'C'C]$ e $[CC'D'D]$ são invisíveis.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O contorno aparente horizontal é a linha fechada $[BCDD'A'B']$, cuja projeção horizontal é o polígono $[B_1C_1D_1D'_1A'_1B'_1]$. Em projeção horizontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – o vértice **A** e o vértice **C'**. O vértice **A**, por ser o vértice de **menor cota** do cubo, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas $[AA']$, $[AB]$ e $[AD]$. O vértice **C'**, por ser o vértice de **maior cota** do cubo, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas $[CC']$, $[B'C']$ e $[C'D']$. Note que, em projeção horizontal, a face superior é visível, bem como as faces $[BB'C'C]$ e $[CC'D'D]$. A face inferior e as faces $[AA'B'B]$ e $[AA'D'D]$ são invisíveis.

Traçado:

As projeções da reta r , porque integram os dados, representaram-se a **médio**. O eixo **X** representa-se igualmente a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. Os traços do plano, porque são auxiliares no contexto do exercício, representaram-se a **médio-leve**. As duas projeções do cubo (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. O quadrado $[ABCD]$, em rebatimento, representou-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano α (que nos permitiram determinar as projeções do quadrado $[ABCD]$), o plano δ e todos os traçados relativos ao rebatimento do plano δ (que nos permitiram determinar as projeções do vértice **B'**), bem como todos os traçados que nos permitiram determinar os restantes vértices da face superior do sólido.

137.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano ρ , pelos seus traços, em função dos dados. O plano ρ tem os seus traços simétricos em relação ao eixo **X**, pois é ortogonal a $\beta_{1/3}$ (planos ortogonais a $\beta_{1/3}$ têm os seus traços simétricos em relação a eixo **X**).

Em seguida, determinaram-se as projeções dos pontos **A** e **B**, pertencentes ao plano ρ – os dois pontos têm de verificar a **condição para que um ponto pertença a um plano** (têm de pertencer a uma reta que pertença ao plano). A reta r é a reta auxiliar do plano ρ a que se recorreu, para se determinarem as projeções do ponto **A** – a reta r está definida por dois pontos (o ponto **H**, o seu traço horizontal, e o ponto **F**, o seu traço frontal). O ponto **A** é o ponto da reta r que tem 4 cm de afastamento.

A reta g , fronto-horizontal, é a reta a que se recorreu para se determinarem as projeções do ponto **B**. A reta g passa pelo ponto **A** (os pontos **A** e **B** têm o mesmo afastamento), pelo que a reta g está definida por um ponto (o ponto **A**) e por uma direção (é fronto-horizontal). O ponto **B** é o ponto da reta g que se situa 6 cm para a direita do ponto **A** (para que **A** se situe à esquerda de **B**). Note que o segmento $[AB]$ se projeta em verdadeira grandeza em ambas as projeções, pois a reta g é paralela a ambos os planos de projeção – a distância do ponto **A** ao ponto **B** (a medida da aresta do sólido) pode ser medida tanto em projeção horizontal, como em projeção frontal).

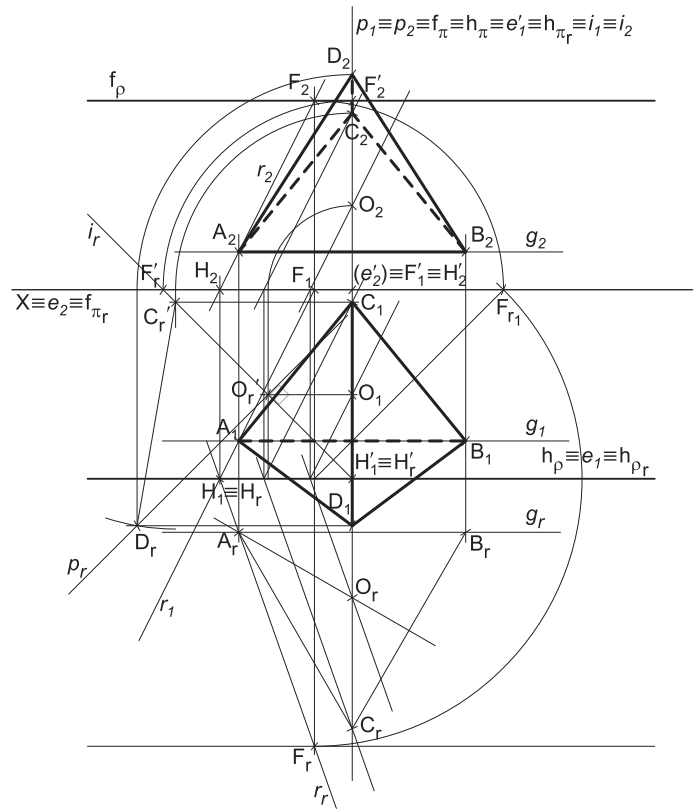
Resolução:

Determinação das projeções do triângulo $[ABC]$:

O plano que contém o triângulo $[ABC]$ (o plano ρ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o triângulo $[ABC]$ (a base da pirâmide) não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se por recorrer ao rebatimento do plano ρ para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Assim, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano (que roda sobre si próprio) – tem-se, imediatamente, $h_p \equiv e_1 \equiv h_{p_r}$ (e_2 , a projeção frontal da charneira, situa-se no eixo **X**). Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil (ortogonais a h_p).

Em seguida, rebateu-se o traço frontal do plano ρ (f_p), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos uma direção para definir f_{p_r} (o traço frontal do plano em rebatimento), que é a direção das retas fronto-horizontais. Falta-nos um ponto para definir f_{p_r} . Nesse sentido, há que rebater o ponto **F** (o traço frontal da reta r), que é um ponto de f_p . O rebatimento do ponto **F** tem de se processar necessariamente com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Assim conduziu-se, por F_1 , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano que contém o arco do rebatimento do ponto **F**). Com o compasso, fazendo centro em F_1 e com raio F_1F_2 (que é a cota do ponto **F**) transportou-se a cota do ponto **F** para o eixo **X**, determinando-se o ponto F_{r1} (que é o ponto **F** rebatido pelo plano de perfil que contém o arco do seu rebatimento, bem como o triângulo do rebatimento do ponto **F**). Em seguida, desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto **F**, que tem um vértice em F_1 , outro vértice em F_{r1} e o terceiro vértice na charneira do rebatimento (h_p). Por fim, com o compasso, fazendo centro na charneira do rebatimento e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **F** em verdadeira grandeza, até à perpendicular à charneira que passa por F_1 , onde se situa F_r (o ponto **F** rebatido). Já temos o ponto que nos faltava para definir f_{p_r} . Nesse sentido, desenhou-se f_{p_r} , passando por F_r e paralelo ao eixo **X** – f_{p_r} está definido por um ponto (o ponto F_r) e por uma direção (é fronto-horizontal).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O ponto **H** (o traço horizontal da reta **r**) é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente $H_r \equiv H_1$. Este procedimento permitiu-nos desenhar a reta r_r (a reta **r** rebatida), passando por F_r e por H_r (a reta r_r está definida por dois pontos). Em seguida, rebateu-se o ponto **A** conduzindo, por A_1 (a projeção horizontal do ponto **A**), uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção desta perpendicular à charneira com a reta r_r é A_r (o ponto **A** rebatido).

Por A_r conduziu-se a reta **g**, (a reta **g** rebatida), paralela ao eixo **X** – a reta g_r está definida por um ponto (o ponto A_r) e por uma direção (é fronto-horizontal). Em seguida, rebateu-se o ponto **B** conduzindo, por B_1 (a projeção horizontal do ponto **B**), uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção desta perpendicular à charneira com a reta g_r é B_r (o ponto **B** rebatido).

A partir dos pontos A_r e B_r , construiu-se o triângulo **[ABC]** em verdadeira grandeza (em rebatimento), e determinaram-se os pontos C_r e O_r (o ponto **O** é o centro do triângulo). Para determinar as projeções do triângulo, inverteu-se o rebatimento do plano ρ , determinando-se as projeções dos pontos **C** e **O**.

A inversão do rebatimento do ponto **O** processa-se com o recurso a uma reta oblíqua, do plano ρ , à qual o ponto **O** pertence – uma reta paralela à reta **r**, que não se identificou. O traço horizontal desta reta (que também não se identificou) é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). Assim, foi possível desenhar as projeções desta reta (que também não se identificaram) de forma direta – esta reta está definida por um ponto (o seu traço horizontal, que se situa na charneira) e uma direção (é paralela à reta **r**). Em seguida, por O_r conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinaram-se as suas projeções sobre as projeções homónimas (mas não identificadas) da reta (paralela à reta **r**) à qual o ponto **O** pertence.

A inversão do rebatimento do ponto **C** processou-se, igualmente, com o recurso a uma reta oblíqua, do plano ρ , à qual o ponto **C** pertence – outra reta paralela à reta **r**, que também não se identificou. O traço horizontal desta outra reta (que também não se identificou) é outro ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). Assim, foi possível desenhar as projeções desta outra reta (que também não se identificaram) de forma direta – esta outra reta está definida por um ponto (o seu traço horizontal, que se situa na charneira) e uma direção (é paralela à reta **r**). Em seguida, por C_r conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinaram-se as suas projeções sobre as projeções homónimas (mas não identificadas) da reta (paralela à reta **r**) à qual o ponto **C** pertence.

A partir das projeções dos três pontos (**A**, **B** e **C**), desenharam-se as projeções do triângulo **[ABC]**.

Determinação das projeções do quarto vértice do tetraedro:

Um tetraedro é um poliedro regular que toma a forma aparente de uma pirâmide regular, pelo que o eixo do sólido (relativo à face **[ABC]**) é necessariamente ortogonal ao plano que contém aquela face. Esse eixo está, assim, contido numa reta que passa pelo ponto **O** e é ortogonal ao plano ρ . Nesse sentido, pelas projeções do ponto **O** conduziram-se as projeções da reta **p**, a reta suporte do eixo do sólido relativo à face **[ABC]** – a reta **p** é uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o Critério de Reversibilidade, pelo que a reta **p** não está totalmente definida. Por outro lado, também ainda não está garantida a ortogonalidade entre a reta **p** e o plano ρ .

Não é conhecida a altura de um tetraedro em relação a qualquer das suas faces. No entanto, sabe-se que todas as suas arestas têm o mesmo comprimento que, neste caso, é 6 cm. Assim, o vértice **D** (o quarto vértice do tetraedro) é um ponto da reta **p**, tal que as arestas **[AD]**, **[BD]** e **[CD]** medem 6 cm (a medida da aresta do sólido). A aresta **[CD]** é de perfil, pelo que está contida no mesmo plano de perfil que contém a reta **p** – o vértice **D** é, assim, o ponto da reta **p** que dista 6 cm do vértice **C**. Tendo em conta que a aresta **[CD]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do segmento estão deformadas), é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano de perfil que contém a reta **p** e a aresta **[CD]** para o Plano Horizontal de Projeção. Nesse sentido, identificou-se o plano π pelos seus traços e identificou-se a charneira do rebatimento (reta e'), que é h_{π} – tem-se imediatamente $h_{\pi} \equiv e'_1 \equiv h_{\pi_r}$.

Em seguida, efetuou-se o rebatimento do ponto **O**, determinando $O_r' - O_r'$ é o ponto **O** rebatido no seu segundo rebatimento (**O** rebatido pelo rebatimento do plano π). Já temos um ponto para definir a reta p_r (a reta **p** rebatida). Falta-nos outro ponto ou uma direção. A direção é a direção ortogonal ao plano ρ , que só fica garantida através da ortogonalidade da reta **p** a uma outra reta do plano ρ . Nesse sentido, recorreu-se à reta **i**, que é uma reta de perfil do plano ρ (a reta **i** é a reta de interseção do plano π com o plano ρ). A reta **i** está definida por dois pontos – os seus traços nos planos de projeção (os pontos F' e H'). Para se garantir a ortogonalidade da reta **p** em relação ao plano ρ , é necessário garantir a ortogonalidade da reta **p** em relação à reta **i** (para que se verifique o Critério de ortogonalidade entre retas e planos). Tendo em conta que se trata de duas retas de perfil (cujas projeções não verifica o Critério de Reversibilidade), é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar – o rebatimento do plano π , já iniciado.

Efetuemos o rebatimento da reta **i**. O ponto H' é um ponto da charneira (reta e'), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente $H'_r \equiv H'_1$. Rebateu-se o ponto F' (o traço frontal da reta **i**), determinando-se F'_r . A reta i_r (a reta **i** rebatida) passa por F'_r e por H'_r (e tem ainda de passar por O_r' , pois o ponto **O** também pertence à reta **i**). Em seguida, desenhou-se a reta p_r , passando por O_r' e perpendicular a i_r – está garantida a ortogonalidade da reta **p** em relação à reta **i**, pelo que está garantida a ortogonalidade da reta **p** em relação ao plano ρ . Note que o ponto **O** é, na prática, o ponto de concorrência das retas **p** e **i**, o que se pode comprovar em rebatimento.

Em seguida, efetuou-se o rebatimento do ponto **C**, determinando $C_r' - C_r'$ é o ponto **C** rebatido no seu segundo rebatimento (**C** rebatido pelo rebatimento do plano π). O ponto C_r' situa-se necessariamente sobre a reta i_r , pois o ponto **C** é um ponto que pertence aos dois planos (e, por isso, pertence à reta de interseção entre os dois planos). Com o compasso, fazendo centro em C_r' e com 6 cm de raio (a medida da aresta do tetraedro) determinou-se o ponto D_r , sobre a reta p_r , o que nos permitiu desenhar a aresta **[CD]** em rebatimento – o segmento $[C_r'D_r]$. Em seguida, inverteu-se o rebatimento do ponto **D** e determinaram-se as suas projeções, sobre as projeções homónimas da reta **p**.

Determinação das projeções da pirâmide:

A partir das projeções dos quatro vértices do tetraedro (os vértices **A**, **B**, **C** e **D**), desenharam-se os seus contornos aparentes.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O contorno aparente frontal é a linha fechada **[ABD]** (que é, na prática, a própria face **[ABD]**), cuja projeção frontal é o triângulo **[A₂B₂D₂]**. Em projeção frontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **C**. Este vértice, por ser o vértice de **menor afastamento** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AC]**, **[BC]** e **[CD]**. Em projeção frontal, apenas a face **[ABD]** é visível – as restantes três faces do sólido são invisíveis em projeção frontal.

O contorno aparente horizontal é a linha fechada **[ACBD]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[A₁C₁B₁D₁]**. Todos os vértices do tetraedro pertencem ao contorno aparente horizontal. No entanto, a aresta **[AB]** é invisível, pois separa duas faces invisíveis em projeção horizontal – as faces **[ABC]** e **[ABD]**. As faces **[ACD]** e **[BCD]** são as duas faces visíveis em projeção horizontal.

Traçado:

Os traços do plano ρ , porque integram os dados, representaram-se a **médio**. O eixo **X** representa-se igualmente a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. As duas projeções do tetraedro (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. O triângulo **[ABC]**, em rebatimento, representa-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano ρ (que nos permitiram determinar as projeções do triângulo **[ABC]**), bem como o plano π e todos os traçados relativos ao rebatimento do plano π (que nos permitiram determinar as projeções do vértice **D**).

138.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respetivas projeções, em função dos dados – o plano ρ está representado pelo eixo **X** (onde se situam os seus traços e o ponto **B**) e pelas projeções do ponto **A**.

Resolução:

Determinação das projeções da base da pirâmide:

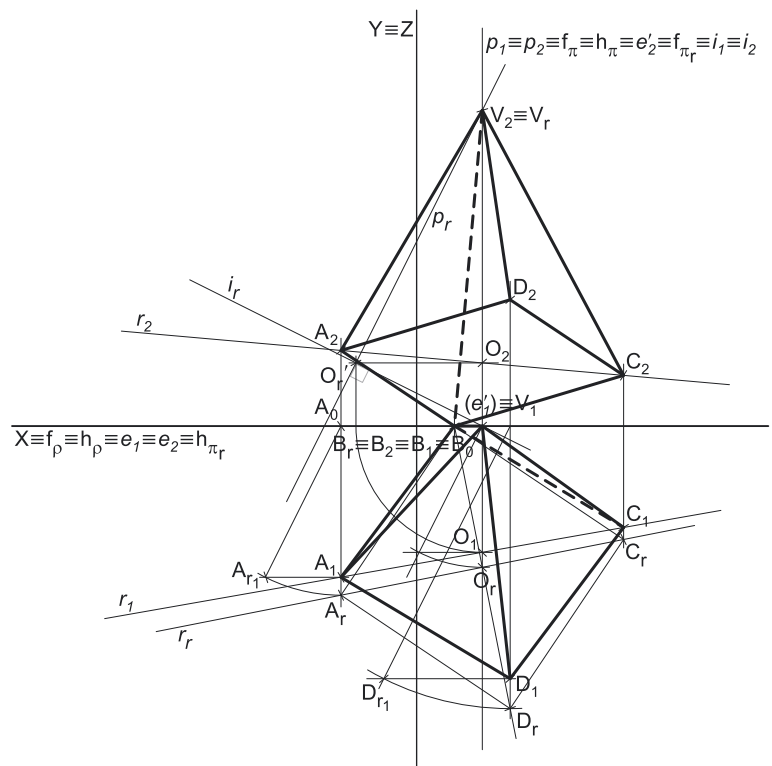
O plano que contém o quadrado **[ABCD]** (o plano ρ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o quadrado **[ABCD]** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do triângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optemos por rebater o plano ρ para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento das suas retas). Começemos por identificar a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano ρ (**h_ρ**), que se situa no eixo **X**, pelo que se tem imediatamente **X = f_ρ = h_ρ = e₁ = e₂**. Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil.

Efeituou-se o rebatimento do ponto **A**. O rebatimento do ponto **A** tem de se processar necessariamente com o recurso ao triângulo do seu rebatimento. Assim conduziram-se, por **A₁**, uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano que contém o arco do rebatimento do ponto **A**) e uma paralela à charneira. Sobre a paralela à charneira, e a partir de **A₁**, mediu-se a cota do ponto **A**, o que nos permitiu determinar o ponto **A_{r1}** (**A_{r1}** é o ponto **A**, rebatido pelo rebatimento do plano de perfil que contém o arco do seu rebatimento). Em seguida, desenhou-se o triângulo do rebatimento do ponto **A**, que tem um vértice em **A₁** e o terceiro vértice na charneira do rebatimento (no eixo **X**). Por fim, com o compasso, fazendo centro na charneira do rebatimento e com raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **A** em verdadeira grandeza, até à perpendicular à charneira que passa por **A₁**, onde se situa **A_r** (o ponto **A** rebatido).

O ponto **B** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente **B_r = B₁ = B₂**. A partir de **A_r** e de **B_r** efetuou-se a construção do quadrado **[ABCD]**, em verdadeira grandeza (em rebatimento), o que nos permitiu determinar os pontos **C_r** e **D_r**.

Para determinar as projeções do ponto **D** inverteu-se o rebatimento do plano ρ , através da construção do triângulo do rebatimento do ponto **D** (num procedimento idêntico ao exposto para o rebatimento do ponto **A**, mas pela ordem inversa). Assim, conduziu-se, por **D_r**, uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento). Em seguida, determinou-se o centro do arco do rebatimento do ponto **D** (que se situa na charneira), pelo qual se conduziu uma paralela à hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto **A** – essa paralela é a reta suporte da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto **D**. Com o compasso, fazendo centro na charneira, e com raio até **D_r**, e a partir de **D_r**, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto **D** em sentido inverso ao do rebatimento do ponto **A**, até à reta suporte da hipotenusa, onde se situa **D_{r1}** – **D_{r1}** é, assim, o outro extremo do arco do rebatimento do ponto **D** e é, também, o ponto de interseção desse arco com a reta suporte da hipotenusa do triângulo do rebatimento do ponto **D**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por D_1 , conduziu-se uma paralela à charneira (que é um dos catetos do triângulo do rebatimento do ponto D) e determinou-se D_1 (a projeção horizontal do ponto D) no ponto de interseção dessa paralela à charneira a perpendicular à charneira que passa por D_r (e que corresponde ao plano que contém o arco do seu rebatimento). O comprimento do segmento $[D_1D_{r1}]$ é a cota do ponto D , que se transportou para a linha de chamada do ponto D e nos permitiu determinar D_2 (a projeção frontal do ponto D).

A inversão do rebatimento do ponto O (e a determinação das suas projeções) efetuou-se através da repetição do atrás exposto para o ponto D , o que nos permitiu determinar as projeções do ponto O .

Por fim, a determinação das projeções do ponto C processou-se com o recurso a uma reta do plano p à qual o ponto C pertence – a reta r . A reta r é a reta suporte da diagonal $[AC]$ do quadrado. Assim, desenhou-se a reta r_r (a reta r rebatida), que passa por A_r e C_r e passa, ainda, por O_r . Nesse sentido, foi possível desenhar, de forma imediata, as duas projeções da reta r , pois a reta r está definida por dois pontos – os pontos O e A .

Em seguida, pelo ponto C_r , conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com r_1 (a projeção horizontal da reta r) é C_1 (a projeção horizontal do ponto C). A projeção frontal do ponto C (C_2) situa-se sobre r_2 (a projeção frontal da reta r).

A partir das projeções dos quatro pontos (A , B , C e D), desenharam-se as projeções do quadrado $[ABCD]$.

Determinação das projeções do vértice da pirâmide:

A pirâmide pedida é uma **pirâmide regular**, pelo que o eixo da pirâmide é necessariamente **ortogonal** ao plano da base. O eixo da pirâmide está, assim, contido numa reta que passa pelo ponto O e é ortogonal ao plano p . Nesse sentido, pelas projeções do ponto O conduziram-se as projeções da reta p , a reta suporte do eixo da pirâmide – a reta p é uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**, pelo que a reta p não está totalmente definida. Por outro lado, também ainda não está garantida a ortogonalidade entre a reta p e o plano p .

Por outro lado, uma vez que a aresta lateral $[BV]$ da pirâmide está contida no Plano Frontal de Projeção, sabe-se que todos os seus pontos têm afastamento nulo. Nesse sentido, conclui-se que o ponto V (o vértice da pirâmide) é necessariamente o traço frontal da reta p (a reta suporte do eixo da pirâmide), cujas projeções não é possível determinar sem o recurso a um processo geométrico auxiliar (pois as projeções da reta p não verificam o **Critério de Reversibilidade**).

Optou-se pelo rebatimento do plano projetante da reta p (um plano de perfil) para o Plano Frontal de Projeção. Nesse sentido, identificou-se o plano π (o plano projetante da reta p) pelos seus traços e identificou-se a charneira do rebatimento (reta e'), que é f_π – tem-se imediatamente $f_\pi \equiv e'_2 \equiv f_{\pi_r}$.

Em seguida, efetuou-se o rebatimento do ponto O , determinando $O_r' - O_r'$ é o ponto O rebatido no seu segundo rebatimento (O rebatido pelo rebatimento do plano π). Já temos um ponto para definir a reta p_r (a reta p rebatida). Falta-nos outro ponto ou uma direção. A direção é a direção ortogonal ao plano p , que só fica garantida através da ortogonalidade da reta p a uma outra reta do plano p . Nesse sentido, recorreu-se à reta i , que é uma reta de perfil do plano p (a reta i é a reta de interseção do plano π com o plano p). A reta i está definida por dois pontos – o ponto O (que é um ponto que pertence simultaneamente aos dois planos) e pelo seu ponto de concorrência com o eixo X (porque a reta i é necessariamente uma reta passante). Para se garantir a ortogonalidade da reta p em relação ao plano p , é necessário garantir a ortogonalidade da reta p em relação à reta i (para que se verifique o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos**). Tendo em conta que se trata de duas retas de perfil (cujas projeções não verifica o **Critério de Reversibilidade**), é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar – o rebatimento do plano π , já iniciado.

Efetuem os rebatimento da reta i . O ponto de concorrência da reta i com o eixo X (que não se identificou) é um ponto da charneira (reta e'), pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). A reta i_r (a reta i rebatida) passa pelo seu ponto de concorrência com o eixo X e por O_r' . Em seguida, desenhou-se a reta p_r , passando por O_r' e perpendicular a i_r – está garantida a ortogonalidade da reta p em relação à reta i , pelo que está garantida a ortogonalidade da reta p em relação ao plano p . Note que o ponto O é, na prática, o ponto de concorrência das retas p e i , o que se pode comprovar em rebatimento.

Por fim, determinou-se o traço frontal da reta p , em rebatimento, que é o ponto $V_r - V_r$ é o ponto de concorrência entre a reta p_r e f_{π_r} . O ponto V é um ponto da charneira, pelo que roida sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente $V_2 \equiv V_r$ (V_1 situa-se no eixo X).

Determinação das projeções da pirâmide:

A partir das projeções dos cinco vértices da pirâmide (os vértices A , B , C e D , da base, e o vértice V), desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é a linha fechada $[ABCV]$, cuja projeção frontal é o polígono $[A_2B_2C_2V_2]$. Em projeção frontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice D . Este vértice, por ser o vértice de **maior afastamento** da pirâmide, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas $[AD]$ e $[CD]$, da base, e a aresta lateral $[DV]$. Por outro lado, a aresta lateral $[BV]$ é invisível, em projeção frontal, pois separa duas faces invisíveis em projeção frontal – as faces laterais $[ABV]$ e $[BCV]$. Em projeção frontal, a base $[ABCD]$ é visível, bem como as faces laterais $[ADV]$ e $[CDV]$.

O contorno aparente horizontal é a linha fechada $[ABVCD]$, cuja projeção horizontal é o polígono $[A_1B_1V_1C_1D_1]$. Todos os vértices da pirâmide integram o contorno aparente horizontal. No entanto, a aresta $[BC]$ da base é invisível, em projeção horizontal, pois separa duas faces invisíveis em projeção horizontal – a base $[ABCD]$ e a face lateral $[BCV]$. Em projeção horizontal, as faces laterais $[ABV]$, $[ADV]$ e $[CDV]$ são visíveis.

Traçado:

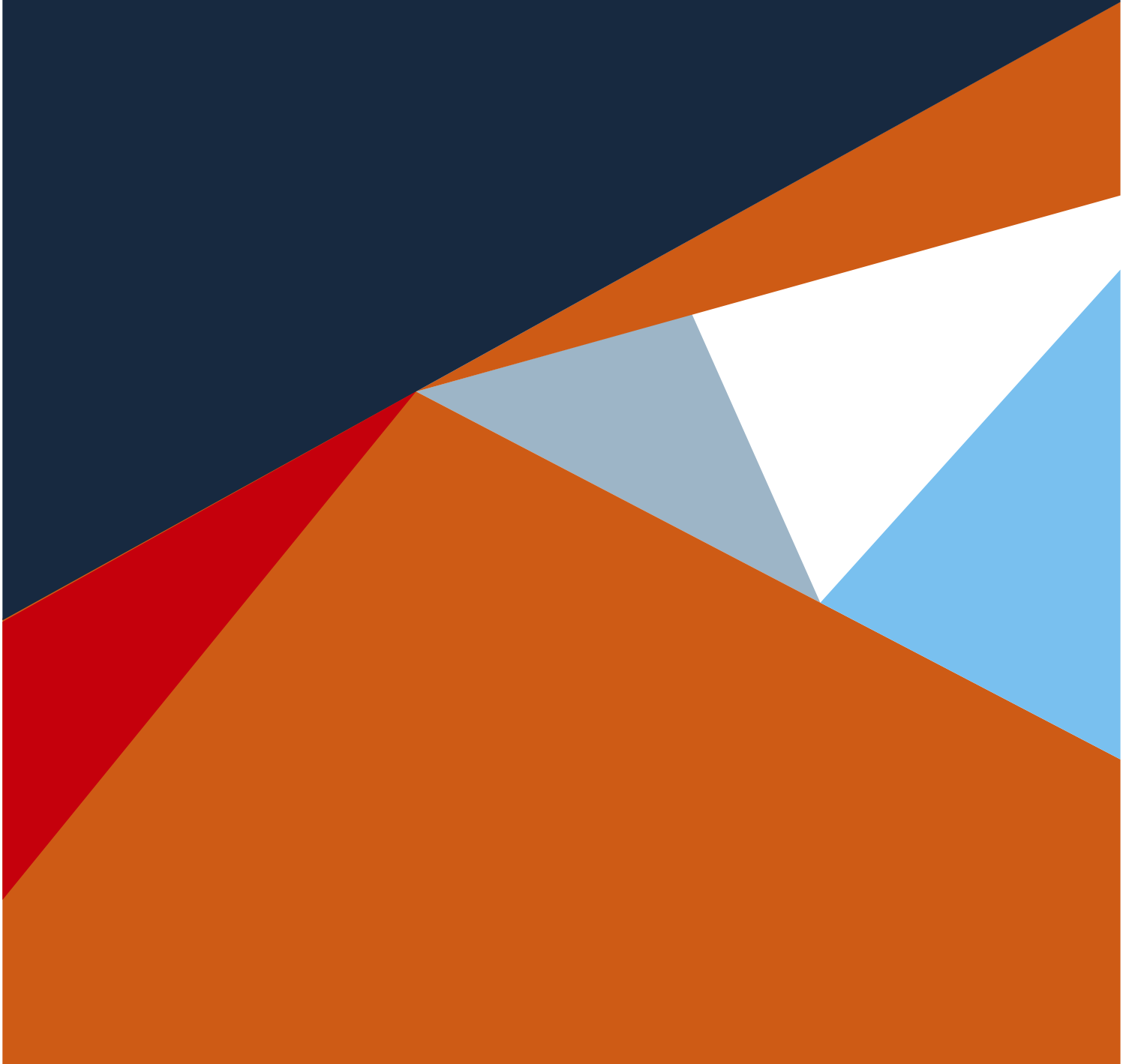
O eixo X representou-se a **médio** (é a linha estruturante do exercício). Os traços do plano p , porque estão coincidentes com o eixo X , representaram-se a **médio** (a expressividade que já tinha sido atribuída ao eixo X). As duas projeções da pirâmide (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. O quadrado $[ABCD]$, em rebatimento, representa-se a **leve**, pois trata-se de uma construção auxiliar para atingir o objetivo do exercício. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares – caso de todos os traçados referentes ao rebatimento do plano p (que nos permitiram determinar as projeções do quadrado $[ABCD]$), bem como o plano π e todos os traçados relativos ao rebatimento do plano π (que nos permitiram determinar as projeções do vértice V).

RESOLUÇÕES

GDA

11.º ANO
GEOMETRIA
DESCRITIVA A

Vol. **2**



SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

NOTA: Se bem que os dados métricos dos enunciados sejam em centímetros, as soluções aqui apresentadas não consideraram o centímetro como unidade – a escala utilizada foi de $\frac{1}{2}$, o que significa que a cada centímetro do enunciado corresponderá 0,5 cm nestas soluções. Tal opção justifica-se pelo facto de o autor considerar que, no sentido do estudante, o objetivo da consulta das soluções dos exercícios deve ser mais a verificação da correção dos raciocínios e dos traçados do que a mera comparação métrica das resoluções (a do aluno e a das soluções). Dessa forma, considerou-se de maior utilidade o desenvolvimento dos relatórios e a resolução gráfica dos problemas a uma escala que, permitindo uma comparação visual dos exercícios, evite qualquer tentativa de comparação métrica dos mesmos.

19

PLANOS TANGENTES ÀS SUPERFÍCIES CÔNICA E CILÍNDRICA

139.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o cone pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto **T**, pertencente à superfície lateral do cone e com as coordenadas pretendidas. Atendendo a que a base do cone é frontal (de frente), determinou-se previamente o lugar geométrico dos pontos da superfície lateral do cone que têm 3 cm de afastamento (o afastamento do ponto **T**). Esse lugar geométrico é a circunferência resultante da interseção da superfície lateral do sólido com um plano frontal (de frente) φ , com 3 cm de afastamento. Assim, representou-se o plano φ , pelo seu traço horizontal, e determinou-se o ponto **Q**, o ponto de interseção do plano φ com o eixo do cone – o ponto **Q**, que é o centro da circunferência. O raio da circunferência determinou-se com o recurso ao ponto de interseção do plano φ com uma geratriz qualquer do cone – o ponto **A** (que é o ponto em que o plano φ corta a geratriz mais à esquerda do contorno aparente horizontal do cone). Em seguida, desenhou-se a projeção frontal da circunferência (com centro em Q_2 e raio Q_2A_2). O ponto **T** é o ponto dessa circunferência que tem 4 cm de cota e que se situa à direita do eixo do sólido (como o enunciado pede expressamente).

Resolução:

Pretende-se determinar os traços do plano tangente à superfície lateral do cone no ponto **T**.

Qualquer plano tangente a uma superfície cônica num ponto é tangente ao longo da geratriz que passa por esse ponto (a geratriz de contacto ou de tangência). Nesse sentido, desenharam-se as projeções da geratriz **g**, que contém o ponto **T** – a geratriz **g** está definida por dois pontos – o ponto **V** e o ponto **T**. Note que se determinou ainda o ponto **F** (o traço frontal da geratriz), que é um ponto da base e é, também, um ponto que define a reta **g**. A reta **g** já é uma reta do plano θ (o plano tangente pretendido).

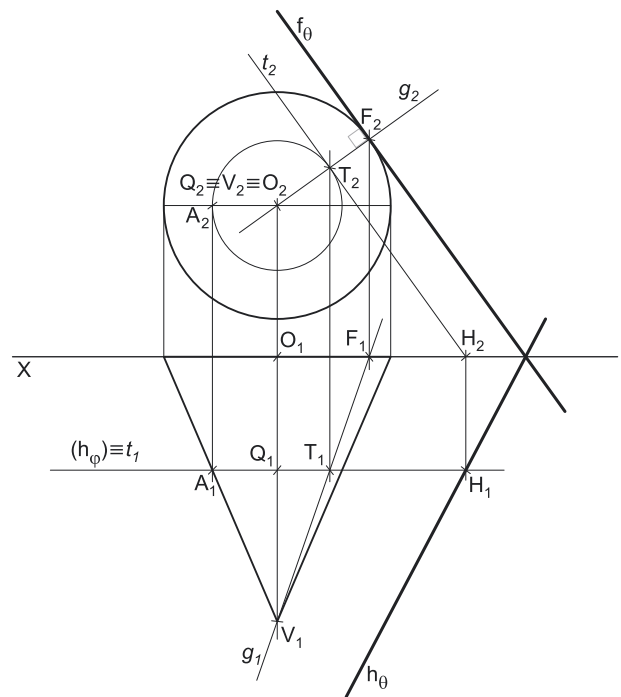
Recorreu-se a uma outra reta do plano θ – a reta **t**, que é uma reta tangente à superfície lateral do cone no ponto **T** (a reta **t** é, na prática, a reta de interseção do plano φ com o plano tangente pretendido). Já temos outra reta do plano θ . Note que a reta **t** é uma reta frontal (de frente) do plano θ .

O plano θ está, agora, definido por duas retas – as retas **t** e **g**. Em seguida, determinaram-se os traços do plano θ . O traço frontal do plano θ (f_θ) passa pelo ponto **F** (o traço frontal da geratriz **g**) e é paralelo à reta **t** (que é uma reta frontal do plano θ). Note que f_θ é tangente à base do cone no ponto **F** (o ponto da geratriz **g** que se situa na base). O traço frontal do plano (f_θ) está definido por um ponto (o ponto **F**) e por uma direção (é paralelo à reta **t** e, portanto, tangente à base do cone).

Em seguida, determinou-se o ponto **H**, o traço horizontal da reta **t**. O traço horizontal do plano θ (h_θ) passa pelo ponto **H** e é concorrente com f_θ no eixo **X** – h_θ está, assim, definido por dois pontos (o ponto **H** e o ponto de concorrência dos dois traços do plano θ).

Traçado:

Os dados (as projeções do cone) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – os traços do plano tangente ao cone no ponto **T** (os traços do plano θ , que são o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do plano φ , da circunferência necessária à determinação das projeções do ponto **T**, da geratriz **g** e da reta **t**).



140.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o cone pelas suas projeções, em função dos dados. Representou-se, também, o plano φ , o plano frontal (de frente) que contém a base do cone. O plano φ não tem traço frontal, pelo que se representou, apenas, pelo seu traço horizontal (que se identificou com o recurso a parêntesis). A reta h é a reta suporte do eixo do sólido. Tendo em conta que a base tem 2 cm de afastamento e que o cone tem 6 cm de altura, o ponto V é o ponto da reta h que tem 8 cm de afastamento ($2 + 6 = 8$).

Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto P , pertencente à superfície lateral do cone e com as coordenadas pretendidas. Atendendo a que a base do cone é frontal (de frente), determinou-se previamente o lugar geométrico dos pontos da superfície lateral do cone que têm 5 cm de afastamento (o afastamento do ponto P). Esse lugar geométrico é a circunferência resultante da interseção da superfície lateral do sólido com um plano frontal (de frente) φ' , com 5 cm de afastamento. Assim, representou-se o plano φ' , pelo seu traço horizontal, e determinou-se o ponto Q , o ponto de interseção do plano φ' com a reta h (a reta suporte do eixo do cone) – o ponto Q , que é o centro da circunferência. O raio da circunferência determinou-se com o recurso ao ponto de interseção do plano φ' com uma geratriz qualquer do cone – o ponto A (que é o ponto em que o plano φ' corta a geratriz mais à esquerda do contorno aparente horizontal do cone). Em seguida, desenhou-se a projeção frontal da circunferência (com centro em Q_2 e raio Q_2A_2). O ponto P é o ponto dessa circunferência que tem 4 cm de cota e se situa o mais à esquerda possível (como o enunciado pede expressamente).

Resolução:

Pretende-se determinar os traços do plano tangente à superfície lateral do cone no ponto P .

Qualquer plano tangente a uma superfície cônica num ponto é tangente à superfície ao longo da geratriz que passa por esse ponto (a geratriz de contacto ou de tangência). Nesse sentido, desenharam-se as projeções da geratriz g , que contém o ponto P – a geratriz g está definida por dois pontos – o ponto V e o ponto P . Note que se determinou ainda o ponto B , que é o ponto da base que pertence à geratriz g . A reta g já é uma reta do plano θ (o plano tangente pretendido).

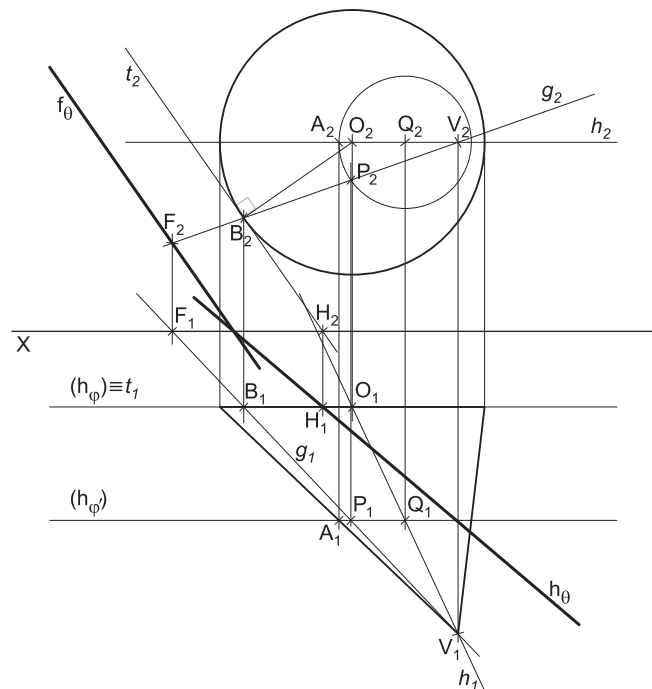
Recorreu-se a uma outra reta do plano θ – a reta t , que é uma reta tangente à superfície lateral do cone no ponto B (a reta t é, na prática, a reta de interseção do plano tangente pretendido com o plano que contém a base do sólido – o plano φ). A reta t está definida por um ponto (o ponto B) e por uma direção (é tangente à base do cone, ou seja, é perpendicular ao raio da circunferência no ponto B). Já temos outra reta do plano θ . Note que a reta t é uma reta frontal (de frente) do plano θ .

O plano θ está, agora, definido por duas retas – as retas t e g . Em seguida, determinaram-se os traços do plano θ . Para tal determinou-se o traço frontal da geratriz g – o ponto F . O traço frontal do plano θ (f_θ) passa pelo ponto F (o traço frontal da geratriz g) e é paralelo à reta t (que é uma reta frontal do plano θ). O traço frontal do plano (f_θ) está definido por um ponto (o ponto F) e por uma direção (é paralelo à reta t).

Em seguida, determinou-se o ponto H , o traço horizontal da reta t . O traço horizontal do plano θ (h_θ) passa pelo ponto H e é concorrente com f_θ no eixo $X - h_\theta$ está, assim, definido por dois pontos (o ponto H e o ponto de concorrência dos dois traços do plano θ).

Traçado:

Os dados (as projeções do cone) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – os traços do plano tangente ao cone no ponto P (os traços do plano θ , que são o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta h , dos planos φ e φ' , da circunferência necessária à determinação das projeções do ponto P , da geratriz g e da reta t).



141.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o cone, bem como o ponto **P**, pelas respetivas projeções, em função dos dados.

Resolução:

Pretende-se determinar os traços dos planos tangentes ao cone, que contêm o ponto **P**. Para tal, é necessário proceder à execução sequencial das etapas que constituem o **método geral para a determinação dos planos tangentes a um cone, passando por um ponto exterior**.

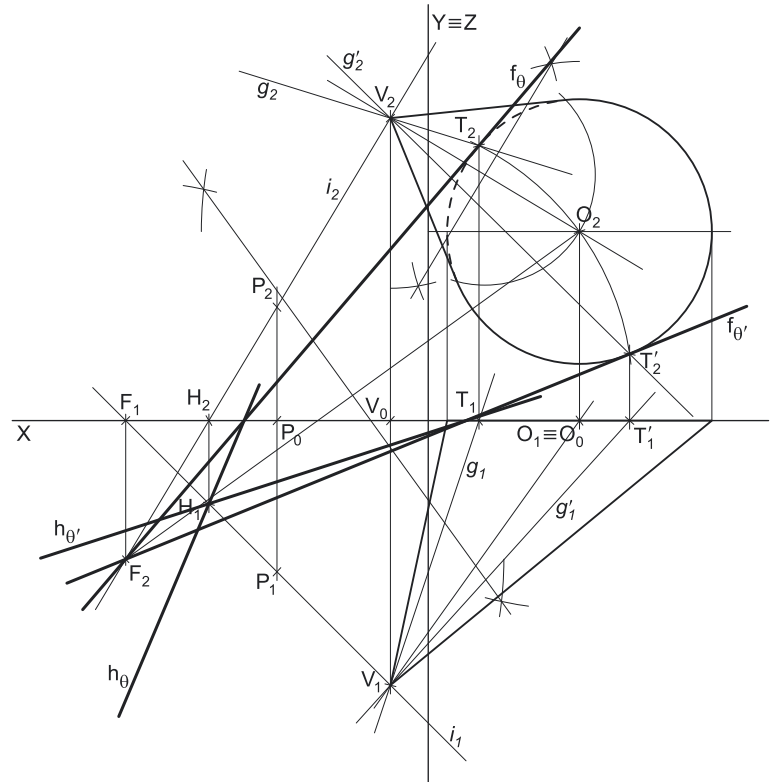
1. Conduzir, pelo ponto dado (o ponto **P**) e pelo vértice do cone, uma reta (reta **i**). A reta **i** é a reta que passa pelo ponto **V** (o vértice do cone) e pelo ponto **P** (o ponto dado) – a reta **i** está definida por dois pontos (os pontos **V** e **P**). A reta **i** é a reta de interseção dos dois planos tangentes. Assim, já temos uma reta para definir os dois planos tangentes ao cone.

2. Determinar o ponto de interseção da reta **i** com o plano da base). O ponto de interseção da reta **i** com o plano que contém a base do cone (o Plano Frontal de Projeção) é imediatamente o traço frontal da reta **i** – o ponto **F**.

3. Conduzir pelo ponto **F** as retas tangentes à base do cone – as retas de interseção dos dois planos tangentes com o plano da base. Tendo em conta que a base do cone está contida no Plano Frontal de Projeção, as retas tangentes à base do cone são, imediatamente, os traços frontais dos dois planos tangentes – **f_θ** e **f_{θ'}**. Os pontos **T** e **T'** são os pontos em que as retas **f_θ** e **f_{θ'}** são tangentes à base, respetivamente (os pontos de tangência). As retas **f_θ** e **f_{θ'}** determinaram-se com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência que passem por um ponto exterior (que, neste caso, é **F₂**, a projeção frontal do ponto **F**). A reta **f_θ** está definida por dois pontos – os pontos **T** e **F**. A reta **f_{θ'}** está definida por dois pontos – os pontos **T'** e **F**.

4. Determinar as geratrizes de contacto – as geratrizes **g** e **g'**. Desenham-se as projeções das duas geratrizes de contacto (ou de tangência). A geratriz **g** está definida por dois pontos – os pontos **V** e **T**. A geratriz **g'** está igualmente definida por dois pontos – os pontos **V** e **T'**.

5. Cada um dos dois planos tangentes está definido por três retas: o plano **θ** está definido pelas retas **i**, **f_θ** e **g** e o plano **θ'** está definido pelas retas **i**, **f_{θ'}** e **g'**. Cada um dos dois planos tangentes está definido por um número suficiente de retas que nos permite, em seguida, determinar os respetivos traços.



Para determinar os traços horizontais dos planos tangentes, determinou-se previamente o traço horizontal da reta **i** – o ponto **H**.

Em seguida, determinou-se o traço horizontal do plano **θ** (**h_θ**), que é concorrente com **f_θ** no eixo **X** e passa pelo ponto **H** (o traço horizontal da reta **i**). O traço horizontal do plano **θ** (**h_θ**) está definido por dois pontos – o ponto de concorrência dos dois traços do plano (que se situa no eixo **X**) e o ponto **H**.

Por fim, determinou-se o traço horizontal do plano **θ'** (**h_{θ'}**), que é concorrente com **f_{θ'}** no eixo **X** e passa igualmente pelo ponto **H**.

O traço horizontal do plano **θ'** (**h_{θ'}**) está também definido por dois pontos – o ponto de concorrência dos dois traços do plano (que se situa no eixo **X**) e o ponto **H**.

Traçado:

Os dados (as projeções do cone) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – os traços dos planos tangentes ao cone (os traços dos planos **θ** e **θ'**, que são o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das geratrizes **g** e **g'**, da construção necessária à determinação dos pontos **T** e **T'** ou, ainda, do eixo **Y ≡ Z**, que é uma linha de referência).

142.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o cone, bem como o ponto **A**, pelas respectivas projeções, em função dos dados. Representou-se, também, o plano φ , o plano frontal (de frente) que contém a base do cone. O plano φ não tem traço frontal, pelo que se representou, apenas, pelo seu traço horizontal (que se identificou com o recurso a parêntesis).

Resolução:

Pretende-se determinar os traços dos planos tangentes ao cone, que contém o ponto **A**. Para tal, é necessário proceder à execução sequencial das etapas que constituem o **método geral para a determinação dos planos tangentes a um cone, passando por um ponto exterior**.

1. Conduzir, pelo ponto dado (o ponto **A**) e pelo vértice do cone, uma reta (reta **i**). A reta **i** é a reta que passa pelo ponto **V** (o vértice do cone) e pelo ponto **A** (o ponto dado) – a reta **i** está definida por dois pontos (os pontos **V** e **A**). A reta **i** é a reta de interseção dos dois planos tangentes. Assim, já temos uma reta para definir os dois planos tangentes ao cone.

2. Determinar o ponto de interseção da reta **i** com o plano da base – ponto **I**. O ponto **I** é o ponto de interseção da reta **i** com o plano φ (o plano que contém a base do cone). O ponto **I** (o ponto de interseção da reta **i** com o plano da base) determinou-se de forma direta, a partir da sua projeção horizontal, pois trata-se da interseção entre uma reta **não projetante** (a reta **i**) com um **plano projetante horizontal** (o plano φ).

3. Conduzir, pelo ponto **I** as retas tangentes à base do cone – as retas **t** e **t'** (que são as retas de interseção dos dois planos tangentes com o plano da base). Os pontos **T** e **T'** são os pontos em que as retas **t** e **t'** são tangentes à base, respetivamente (os pontos de tangência). As retas **t** e **t'** determinaram-se com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência que passam por um ponto exterior (que, neste caso, é **I₂**, a projeção frontal do ponto **I**). A reta **t** é uma reta frontal (de frente) que está definida por dois pontos – os pontos **T** e **I**. A reta **t'** é outra reta frontal (de frente) que está igualmente definida por dois pontos – os pontos **T'** e **I**.

4. Determinar as geratrizes de contacto – as geratrizes **g** e **g'**. Desenharam-se as projeções das duas geratrizes de contacto (ou de tangência). A geratriz **g** está definida por dois pontos – os pontos **V** e **T**. A geratriz **g'** está igualmente definida por dois pontos – os pontos **V** e **T'**.

5. Cada um dos dois planos tangentes está definido por três retas: o plano θ está definido pelas retas **i**, **t** e **g** e o plano θ' está definido pelas retas **i**, **t'** e **g'**. Cada um dos dois planos tangentes está definido por um número suficiente de retas que nos permite, em seguida, determinar os respetivos traços.

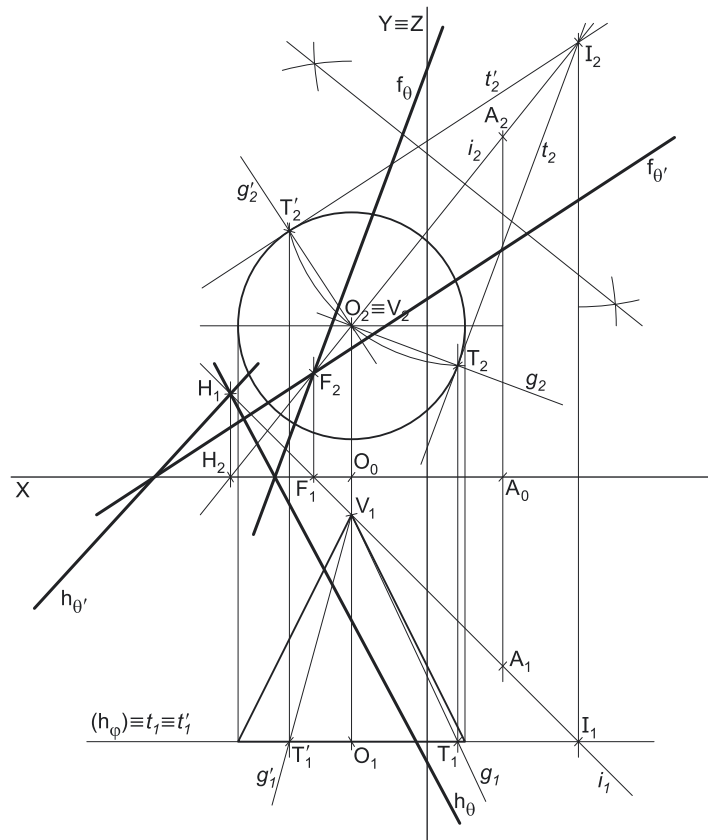
Nesse sentido, determinaram-se os traços da reta **i** – os pontos **F** e **H**.

Em seguida, determinaram-se os traços do plano θ . A reta **t** é uma reta frontal (de frente) do plano θ e retas frontais (de frente) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço frontal do plano, que é uma reta frontal (de frente) do plano com afastamento nulo. Assim, o traço frontal do plano θ (**f_θ**) passa pelo ponto **F** e é paralelo à reta **t** – está definido por um ponto (o ponto **F**) e por uma direção (a direção da reta **t**). O traço horizontal do plano θ (**h_θ**) passa pelo ponto **H** e é concorrente com o traço frontal (**f_θ**) no eixo **X** – está definido por dois pontos (o ponto **H** e o ponto de concorrência dos traços do plano, que se situa no eixo **X**).

Por fim, determinaram-se os traços do plano θ' . A reta **t'** é uma reta frontal (de frente) do plano θ' e retas frontais (de frente) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço frontal do plano, que é uma reta frontal (de frente) do plano com afastamento nulo. Assim, o traço frontal do plano θ' (**f'_θ**) passa pelo ponto **F** e é paralelo à reta **t'** – está definido por um ponto (o ponto **F**) e por uma direção (a direção da reta **t'**). O traço horizontal do plano θ' (**h'_θ**) passa pelo ponto **H** e é concorrente com o traço frontal (**f'_θ**) no eixo **X** – está definido por dois pontos (o ponto **H** e o ponto de concorrência dos traços do plano, que se situa no eixo **X**).

Traçado:

Os dados (as projeções do cone) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – os traços dos planos tangentes ao cone (os traços dos planos θ e θ' , que são o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas **t** e **t'**, das geratrizes **g** e **g'**, da construção necessária à determinação dos pontos **T** e **T'** ou, ainda, do eixo **Y \equiv Z**, que é uma linha de referência).



143.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o cone, bem como a reta h , pelas respectivas projeções, em função dos dados.

Resolução:

Pretende-se determinar os traços dos planos tangentes ao cone, que são paralelos à reta h . Para tal, é necessário proceder à execução sequencial das etapas que constituem o **método geral para a determinação dos planos tangentes a um cone, paralelos a uma reta dada**.

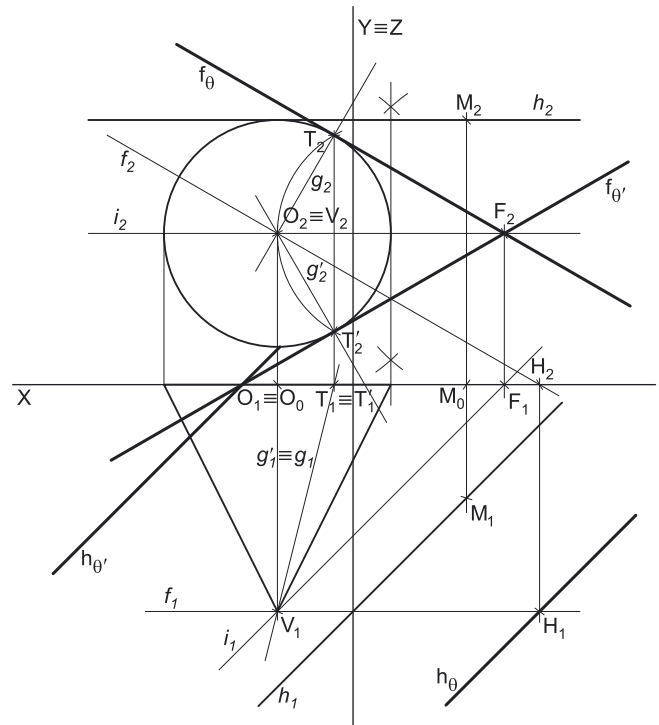
1. Conduzir pelo vértice do cone, uma reta paralela à reta dada (reta i). A reta i é a reta paralela à reta h e que passa pelo ponto V . A reta i está definida por um ponto (o ponto V) e uma direção (é paralela à reta h). A reta i é a reta de interseção dos dois planos tangentes. Assim, já temos uma reta para definir os dois planos tangentes ao cone.

2. Determinar o ponto de interseção da reta i com o plano da base. O ponto de interseção da reta i com o plano que contém a base do cone (o Plano Frontal de Projeção) é imediatamente o traço frontal da reta i – o ponto F .

3. Conduzir pelo ponto F as retas tangentes à base do cone – as retas de interseção dos dois planos tangentes com o plano da base. Tendo em conta que a base do cone está contida no Plano Frontal de Projeção, as retas tangentes à base do cone são, imediatamente, os traços frontais dos dois planos tangentes – f_0 e f_0' . Os pontos T e T' são os pontos em que as retas f_0 e f_0' são tangentes à base, respetivamente (os pontos de tangência). As retas f_0 e f_0' determinaram-se com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência que passam por um ponto exterior (que, neste caso, é F_2 , a projeção frontal do ponto F). A reta f_0 está definida por dois pontos – os pontos T e F . A reta f_0' está definida por dois pontos – os pontos T' e F .

4. Determinar as geratrizes de contacto – as geratrizes g e g' . Desenham-se as projeções das duas geratrizes de contacto (ou de tangência). A geratriz g está definida por dois pontos – os pontos V e T . A geratriz g' está igualmente definida por dois pontos – os pontos V e T' .

5. Cada um dos dois planos tangentes está definido por três retas: o plano θ está definido pelas retas i , f_0 e g e o plano θ' está definido pelas retas i , f_0' e g' . Cada um dos dois planos tangentes está definido por um número suficiente de retas que nos permite, em seguida, determinar os respetivos traços.



Em seguida, determinou-se o traço horizontal do plano θ (h_0), que é concorrente com f_0 no eixo X e é paralelo à reta i (a reta i é uma reta horizontal do plano θ). O traço horizontal do plano θ (h_0) está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano, que se situa no eixo X) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano, que é a direção da reta i). O plano θ é um **plano oblíquo**.

Por fim, determinou-se o traço horizontal do plano θ' (h_0'), que é concorrente com f_0' no eixo X (num ponto que se situa fora dos limites da folha). Analisemos, então, a questão do traço horizontal do plano θ' . É pedida uma reta – o traço horizontal do plano θ' (h_0'). Para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta h_0' é uma reta horizontal (de nível) do plano θ' , bem como a reta i , pelo que h_0' é necessariamente paralelo à reta i (retas horizontais de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano, que é uma reta horizontal do plano com cota nula). Já temos uma direção para definir a reta h_0' . Falta-nos um ponto para definir h_0' .

Os dados do plano θ' são insuficientes para definir h_0' , pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por um ponto ou por um ponto e uma direção. Recorreu-se à reta f , como reta auxiliar do plano θ' . A reta f é uma reta frontal (de frente) do plano θ' e está definida por um ponto (o ponto V) e por uma direção (a direção das retas frontais do plano θ' – é paralela a f_0'). Em seguida, determinou-se o ponto H , o traço horizontal da reta f . Já temos o ponto que nos faltava para definir h_0' – h_0' está definido por um ponto (o ponto H) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano θ').

Traçado:

Os dados (as projeções do cone e da reta h) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – os traços dos planos tangentes ao cone (os traços dos planos θ e θ' , que são o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das geratrizes g e g' , da construção necessária à determinação dos pontos T e T' , da reta f ou, ainda, do eixo $Y \equiv Z$, que é uma linha de referência).

144.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o cone, bem como a reta r , pelas respetivas projeções, em função dos dados. Representou-se, também, o plano φ , o plano frontal (de frente) que contém a base do cone. O plano φ não tem traço frontal, pelo que se representou, apenas, pelo seu traço horizontal (que se identificou com o recurso a parêntesis). Uma vez que a projeção frontal do vértice do cone (o ponto V) se situa no interior da circunferência que delimita a projeção frontal da sua base, não há quaisquer geratrizes de contorno aparente frontal – o contorno aparente frontal é a própria circunferência que delimita a base do sólido. Assim, a projeção frontal do cone reduz-se a uma circunferência (a circunferência que delimita a projeção frontal da sua base) e um ponto (a projeção frontal do vértice).

Resolução:

Pretende-se determinar os traços dos planos tangentes ao cone, que são paralelos à reta r . Para tal, é necessário proceder à execução sequencial das etapas que constituem o **método geral para a determinação dos planos tangentes a um cone, paralelos a uma reta dada**.

1. Conduzir pelo vértice do cone, uma reta paralela à reta dada (reta i). A reta i é a reta paralela à reta r e que passa pelo ponto V . A reta i está definida por um ponto (o ponto V) e uma direção (é paralela à reta r). A reta i é a reta de interseção dos dois planos tangentes. Assim, já temos uma reta para definir os dois planos tangentes ao cone.

2. Determinar o ponto de interseção da reta i com o plano da base – ponto I . O ponto I é o ponto de interseção da reta i com o plano φ (o plano que contém a base do cone). O ponto I (o ponto de interseção da reta i com o plano da base) determinou-se de forma direta, a partir da sua projeção horizontal, pois trata-se da interseção entre uma reta **não projetante** (a reta i) com um **plano projetante horizontal** (o plano φ).

3. Conduzir, pelo ponto I as retas tangentes à base do cone – as retas t e t' (que são as retas de interseção dos dois planos tangentes com o plano da base). Os pontos T e T' são os pontos em que as retas t e t' são tangentes à base, respetivamente (os pontos de tangência). As retas t e t' determinaram-se com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência que passam por um ponto exterior (que, neste caso, é I_2 , a projeção frontal do ponto I). A reta t é uma reta frontal (de frente) que está definida por dois pontos – os pontos T e I . Nesta situação, a reta t' é uma reta fronto-horizontal (um caso particular das retas frontais) que está definida por dois pontos – os pontos T' e I .

4. Determinar as geratrizes de contacto – as geratrizes g e g' . Desenharam-se as projeções das duas geratrizes de contacto (ou de tangência). A geratriz g está definida por dois pontos – os pontos V e T . A geratriz g' está igualmente definida por dois pontos – os pontos V e T' .

5. Cada um dos dois planos tangentes está definido por três retas: o plano θ está definido pelas retas i , t e g e o plano θ' está definido pelas retas i , t' e g' . Cada um dos dois planos tangentes está definido por um número suficiente de retas que nos permite, em seguida, determinar os respetivos traços.

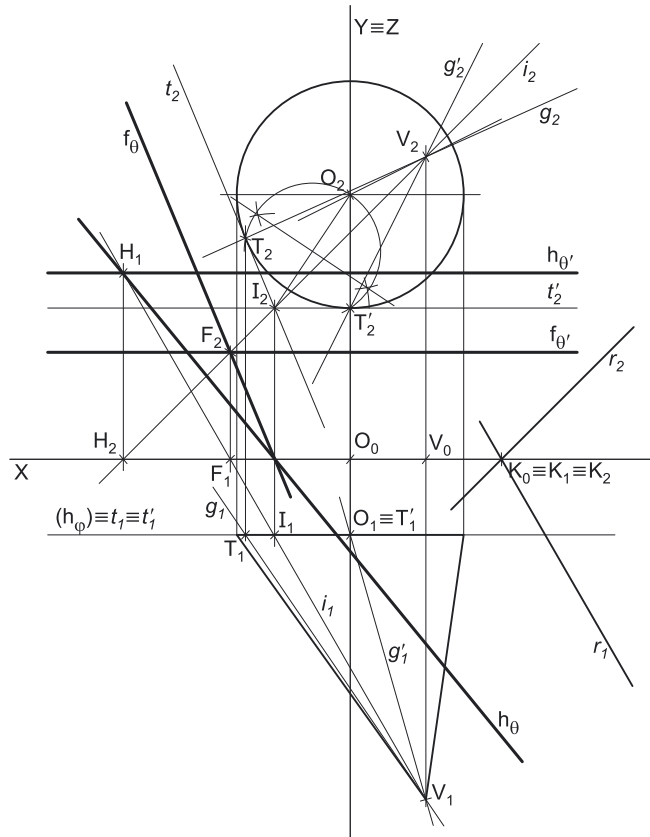
Nesse sentido, determinaram-se os traços da reta i – os pontos F e H .

Em seguida, determinaram-se os traços do plano θ . A reta t é uma reta frontal (de frente) do plano θ e retas frontais (de frente) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço frontal do plano, que é uma reta frontal (de frente) do plano com afastamento nulo. Assim, o traço frontal do plano θ (f_θ) passa pelo ponto F e é paralelo à reta t – está definido por um ponto (o ponto F) e por uma direção (a direção da reta t). O traço horizontal do plano θ (h_θ) passa pelo ponto H e é concorrente com o traço frontal (f_θ) no eixo X – está definido por dois pontos (o ponto H e o ponto de concorrência dos traços do plano, que se situa no eixo X). O plano θ é um **plano oblíquo**.

Por fim, determinaram-se os traços do plano θ' . A reta t' é uma reta fronto-horizontal (um caso particular das retas frontais) e retas frontais (de frente) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço frontal do plano, que é uma reta frontal (de frente) do plano com afastamento nulo. Assim, o traço frontal do plano θ' ($f_{\theta'}$) passa pelo ponto F e é paralelo à reta t' – está definido por um ponto (o ponto F) e por uma direção (é fronto-horizontal). O plano θ' é, assim, um **plano de rampa**. O traço horizontal do plano θ' ($h_{\theta'}$) passa pelo ponto H e é também uma reta fronto-horizontal – está igualmente definido por um ponto (o ponto H) e por uma direção (é fronto-horizontal).

Traçado:

Os dados (as projeções do cone e da reta r) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – os traços dos planos tangentes ao cone (os traços dos planos θ e θ' , que são o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas t e t' , das geratrizes g e g' , da construção necessária à determinação dos pontos T e T' ou, ainda, do eixo $Y \equiv Z$, que é uma linha de referência).



145.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o cilindro pelas suas projeções, em função dos dados. Representou-se, também, o plano φ , o plano frontal (de frente) que contém a base de maior afastamento do sólido. O plano φ não tem traço frontal, pelo que se representou, apenas, pelo seu traço horizontal (que se identificou com o recurso a parêntesis).

Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto **T**, pertencente à superfície lateral do cilindro. As coordenadas fornecidas permitiram-nos determinar imediatamente a projeção frontal do ponto **T**. Em seguida, a partir da sua projeção frontal, determinou-se a geratriz **g**, que contém o ponto **T**. A geratriz **g** está definida por um ponto (o ponto **A**, que é o ponto da geratriz que se situa na base de menor afastamento do cilindro) e pela sua direção (a direção das geratrizes e do eixo do cilindro). Desenhando a projeção horizontal da geratriz **g** (g_1), determinou-se a projeção horizontal do ponto **T** (T_1) sobre g_1 .

Determinou-se, ainda, o ponto **A'**, o ponto da geratriz **g** que se situa na base de maior afastamento do cilindro.

Resolução:

Pretende-se determinar os traços do plano tangente à superfície lateral do cilindro no ponto **T**.

Qualquer plano tangente a uma superfície cilíndrica num ponto é tangente à superfície ao longo da geratriz que passa por esse ponto (a geratriz de contacto ou de tangência). Nesse sentido, a geratriz **g** (que contém o ponto **T**) já é uma reta do plano θ (o plano tangente pretendido).

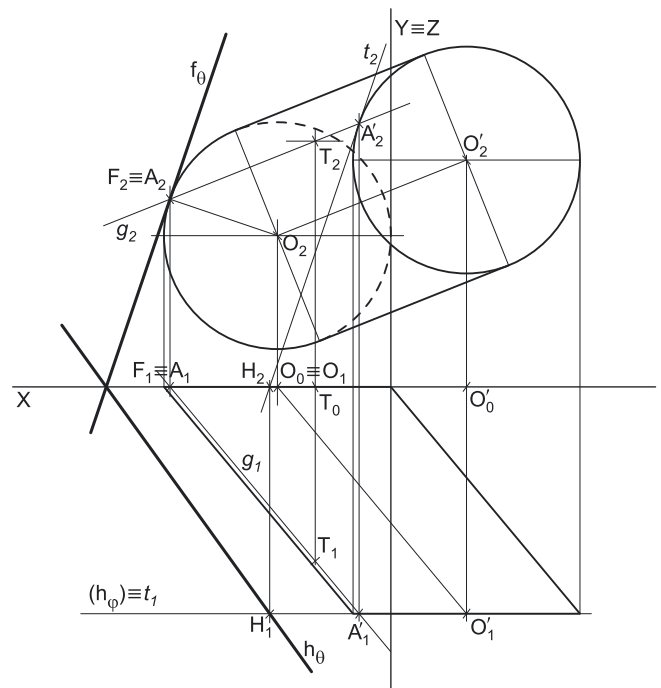
Recorreu-se a uma outra reta do plano θ – a reta **t**, que é uma reta tangente à superfície lateral do cilindro no ponto **A'** (a reta **t** é, na prática, a reta de interseção do plano φ com o plano tangente pretendido). Já temos outra reta do plano θ . Note que a reta **t** é uma reta frontal (de frente) do plano θ .

O plano θ está, agora, definido por duas retas – as retas **t** e **g**. Em seguida, determinaram-se os traços do plano θ . Para tal, determinou-se o traço frontal da geratriz **g** (o ponto **F**), que é, imediatamente, o próprio ponto **A**. O traço frontal do plano θ (f_θ) passa pelo ponto **F** (o traço frontal da geratriz **g**) e é paralelo à reta **t** (que é uma reta frontal do plano θ). Note que f_θ é tangente à base de menor afastamento do cilindro no ponto **F** (porque essa base se situa no Plano Frontal de Projeção). O traço frontal do plano (f_θ) está definido por um ponto (o ponto **F**) e por uma direção (é paralelo à reta **t** e, portanto, tangente à base de menor afastamento do cilindro).

Em seguida, determinou-se o ponto **H**, o traço horizontal da reta **t**. O traço horizontal do plano θ (h_θ) passa pelo ponto **H** e é concorrente com f_θ no eixo **X** – h_θ está, assim, definido por dois pontos (o ponto **H** e o ponto de concorrência dos dois traços do plano θ).

Traçado:

Os dados (as projeções do cilindro) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – os traços do plano tangente ao cilindro no ponto **T** (os traços do plano θ , que são o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso do plano φ , da geratriz **g**, da reta **t** ou, ainda, do eixo **Y** \equiv **Z**, que é uma linha de referência).



146.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o cilindro pelas suas projeções, em função dos dados. Representaram-se, também, os planos φ e φ' (os planos frontais que contêm as bases do sólido) pelos seus traços horizontais. Os planos φ e φ' (os planos que contêm as bases) não têm traço frontal, pelo que se representaram, apenas, pelos respetivos traços horizontais (que se identificaram com o recurso a parêntesis). Os planos φ e φ' distam 6 cm (a altura do cilindro) – o plano φ tem 1 cm de afastamento (o afastamento do ponto **O**) e o plano φ' tem 7 cm de afastamento ($1 + 6 = 7$).

Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto **P**, pertencente à superfície lateral do cilindro. Uma vez que a superfície cilíndrica que limita lateralmente o cilindro é uma **superfície projetante frontal**, determinou-se de forma imediata a projeção frontal do ponto **P** (P_2), sobre a circunferência que delimita a projeção frontal do cilindro (e que corresponde ao seu contorno aparente), atendendo ao que o enunciado pede expressamente (que o ponto **P** se situe à direita do eixo do sólido). Em seguida, determinou-se a projeção horizontal do ponto **P**, em função do seu afastamento.

Resolução:

Preende-se determinar os traços do plano tangente à superfície lateral do cilindro no ponto **T**.

Qualquer plano tangente a uma superfície cilíndrica num ponto é tangente à superfície ao longo da geratriz que passa por esse ponto (a geratriz de contacto ou de tangência). Nesse sentido, desenharam-se as projeções da geratriz **g**, a geratriz que contém o ponto **P** e que é uma reta projetante frontal. A geratriz **g** está definida por um ponto (o ponto **P**) e pela sua direção (é projetante frontal – de topo). Determinou-se, ainda, o ponto **A**, que é o ponto da geratriz **g** que pertence à base de menor afastamento do cilindro. A geratriz **g** já é uma reta do plano θ (o plano tangente pretendido).

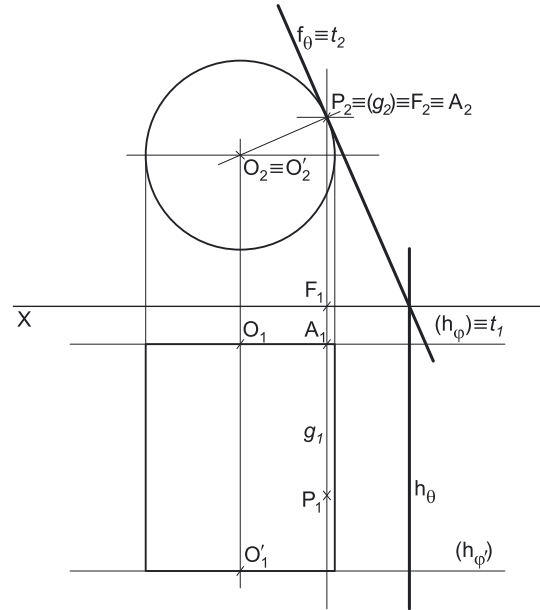
Recorreu-se a uma outra reta do plano θ – a reta **t**, que é uma reta tangente à superfície lateral do cilindro no ponto **A** (a reta **t** é, na prática, a reta de interseção do plano tangente pretendido com o plano da base de menor afastamento – o plano φ). Já temos outra reta do plano θ . Note que a reta **t** é uma reta frontal (de frente) do plano θ .

O plano θ está, agora, definido por duas retas – as retas **t** e **g**. Tendo em conta que a geratriz **g** é uma reta projetante frontal, o plano θ será, necessariamente, um **plano projetante frontal** (um **plano de topo**). Assim, determinaram-se os traços do plano θ . Para tal, determinou-se o traço frontal da geratriz **g** (o ponto **F**). O traço frontal do plano θ (f_θ) passa pelo ponto **F** (o traço frontal da geratriz **g**) e é paralelo à reta **t** (que é uma reta frontal do plano θ). Note que se tem $f_\theta \equiv t_2$, porque o plano θ é um plano projetante frontal.

Em seguida, determinou-se o traço horizontal do plano θ (h_θ), que é concorrente com f_θ no eixo **X** e é paralelo à geratriz **g** – h_θ está, assim, definido por um ponto (o ponto de concorência dos dois traços do plano θ) e por uma direção (é uma reta de topo).

Traçado:

Os dados (as projeções do cilindro) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – os traços do plano tangente ao cilindro no ponto **P** (os traços do plano θ , que são o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso dos planos φ e φ' , da geratriz **g**, da reta **t**).



147.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o cilindro, bem como o ponto **P**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Representou-se, também, o plano v (o plano horizontal que contém a base superior do sólido) pelo seu traço frontal. O plano v não tem traço horizontal, pelo que se representou, apenas, pelo seu traço frontal (que se identificou com o recurso a parêntesis).

Resolução:

Pretende-se determinar os traços dos planos tangentes ao cilindro, que passam pelo ponto **P**. Para tal, é necessário proceder à execução sequencial das etapas que constituem o **método geral para a determinação dos planos tangentes a um cilindro, passando por um ponto exterior**.

1. Conduzir, pelo ponto dado, uma reta paralela às geratrizes do cilindro (a reta i). A reta i é a reta paralela às geratrizes do cilindro e que passa pelo ponto **P**. A reta i está definida por um ponto (o ponto **P**) e uma direção (a direção das geratrizes do cilindro). A reta i é a reta de interseção dos dois planos tangentes. Assim, já temos uma reta para definir os dois planos tangentes ao cilindro.

2. Determinar o ponto de interseção da reta i com o plano da base de referência – o ponto **I**. Considerou-se, como base de referência, a base inferior do cilindro. Nesse sentido, o ponto de interseção da reta i com o plano que contém a base de referência do cilindro (o Plano Horizontal de Projeção) é imediatamente o traço horizontal da reta i – o ponto **H**.

3. Conduzir pelo ponto **H** as retas tangentes à base de referência do cilindro – as retas de interseção dos dois planos tangentes com o plano da base (de referência). Tendo em conta que a base de referência do cilindro está contida no Plano Horizontal de Projeção, as retas tangentes à base (de referência) do cilindro são, imediatamente, os traços horizontais dos dois planos tangentes – h_0 e $h_{0'}$. Os pontos **T** e **T'** são os pontos em que as retas h_0 e $h_{0'}$ são tangentes à base (de referência), respetivamente (os pontos de tangência). As retas h_0 e $h_{0'}$ determinaram-se com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência que passam por um ponto exterior (que, neste caso, é **H**₁, a projeção horizontal do ponto **H**). A reta h_0 está definida por dois pontos – os pontos **T** e **H**. A reta $h_{0'}$ está definida por dois pontos – os pontos **T'** e **H**.

4. Determinar as geratrizes de contacto – as geratrizes g e g' . Desenham-se as projeções das duas geratrizes de contacto (ou de tangência). A geratriz g está definida por um ponto (o ponto **T**) e por uma direção (a direção das geratrizes do cilindro). A geratriz g' está igualmente definida por um ponto (o ponto **T'**) e por uma direção (a direção das geratrizes do cilindro).

5. Cada um dos dois planos tangentes está definido por três retas: o plano θ está definido pelas retas i , h_0 e g e o plano θ' está definido pelas retas i , $h_{0'}$ e g' . Cada um dos dois planos tangentes está definido por um número suficiente de retas que nos permite, em seguida, determinar os respetivos traços.

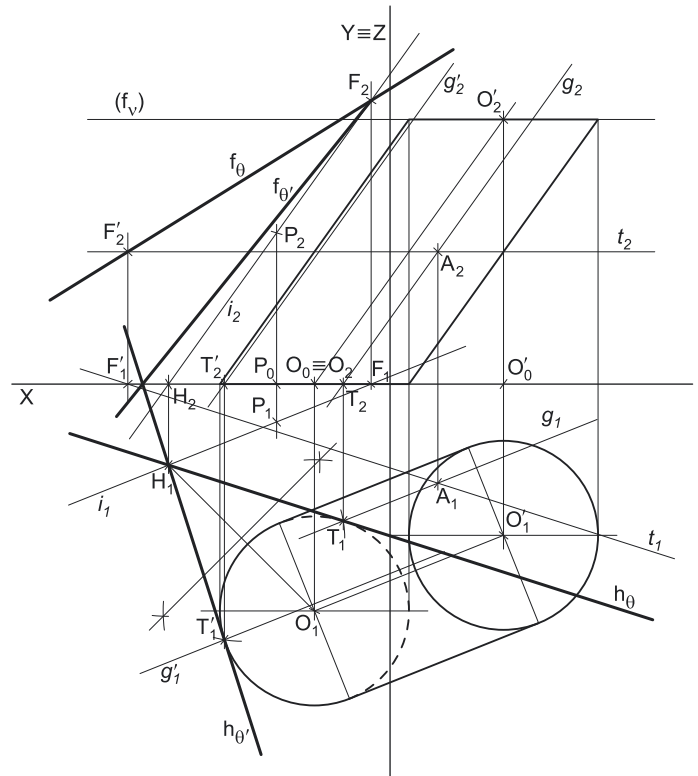
Em seguida, determinou-se o traço frontal do plano θ' ($f_{\theta'}$). Para tal, determinou-se primeiramente o traço frontal da reta i – o ponto **F**. O traço frontal do plano θ' ($f_{\theta'}$) é concorrente com $h_{0'}$ no eixo **X** e passa pelo ponto **F**. O traço frontal do plano θ' ($h_{0'}$) está definido por dois pontos – o ponto de concorrência dos dois traços do plano (que se situa no eixo **X**) e o ponto **F**.

Por fim, determinou-se o traço frontal do plano θ (f_{θ}), que é concorrente com h_0 no eixo **X** (num ponto que se situa fora dos limites da folha). Analisemos, então, a questão do traço frontal do plano θ . É pedida uma reta – o traço frontal do plano θ (f_{θ}). Para definirmos uma reta, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta f_{θ} passa necessariamente pelo ponto **F** (o traço frontal da reta i , que é uma reta do plano θ), pelo que já temos um ponto para definirmos f_{θ} . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definirmos f_{θ} .

Os dados do plano θ são insuficientes para definir f_{θ} , pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por um ponto ou por um ponto e uma direção. Recorreu-se à reta t , como reta auxiliar do plano θ . A reta t é uma reta horizontal (de nível) do plano θ e está definida por um ponto (o ponto **A**, que é o seu ponto de concorrência com a geratriz g) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano θ – é paralela a h_0). Em seguida, determinou-se o ponto **F'**, o traço frontal da reta t . Já temos o ponto que nos faltava para definir f_{θ} – f_{θ} está definido por dois pontos (os pontos **F** e **F'**).

Traçado:

Os dados (as projeções do cilindro) representaram-se a **médio**, bem como o eixo **X** (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – os traços dos planos tangentes ao cilindro (os traços dos planos θ e θ' , que são o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta i , da reta t , das geratrizes g e g' , da construção necessária à determinação dos pontos **T** e **T'** ou, ainda, do eixo $Y \equiv Z$, que é uma linha de referência).



148.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o cilindro, bem como o ponto P , pelas respectivas projeções, em função dos dados. Representaram-se, também, os planos φ e φ' (os planos frontais que contêm as bases do sólido) pelos seus traços horizontais. Os planos φ e φ' (os planos que contêm as bases) não têm traço frontal, pelo que se representaram, apenas, pelos respectivos traços horizontais (que se identificaram com o recurso a parêntesis). Os planos φ e φ' distam 6 cm (a altura do cilindro) – o plano φ tem 2 cm de afastamento (o afastamento do ponto O) e o plano φ' tem 8 cm de afastamento ($2 + 6 = 8$). A reta r é a reta suporte do eixo do cilindro e o ponto O' (o centro da base de maior afastamento do sólido) é o ponto de interseção da reta r com o plano φ' . O ponto O' determinou-se a partir da sua projeção horizontal, pois trata-se da interseção entre uma reta não projetante (a reta r) com um plano projetante horizontal (o plano φ').

Resolução:

Preende-se determinar os traços dos planos tangentes ao cilindro, que passam pelo ponto P . Para tal, é necessário proceder à execução sequencial das etapas que constituem o **método geral para a determinação dos planos tangentes a um cilindro, passando por um ponto exterior**.

1. Conduzir pelo ponto dado, uma reta paralela às geratrizes do cilindro (a reta i). A reta i é a reta paralela às geratrizes do cilindro (e à reta r) que passa pelo ponto P . A reta i está definida por um ponto (o ponto P) e uma direção (a direção das geratrizes do cilindro). A reta i é a reta de interseção dos dois planos tangentes. Assim, já temos uma reta para definir os dois planos tangentes ao cilindro.

2. Determinar o ponto de interseção da reta i com o plano da base de referência – o ponto I . Considerou-se, como base de referência, a base de menor afastamento do cilindro. O ponto I determinou-se a partir da sua projeção horizontal, pois trata-se da interseção entre uma reta não projetante (a reta i) com um plano projetante horizontal (o plano φ).

3. Conduzir pelo ponto I as retas tangentes à base de referência do cilindro – as retas t e t' (que são as retas de interseção dos dois planos tangentes com o plano da base de referência do cilindro). Os pontos T e T' são os pontos em que as retas t e t' são tangentes à base (de referência), respetivamente (os pontos de tangência). As retas t e t' determinaram-se com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência que passam por um ponto exterior (que, neste caso, é I_2 , a projeção frontal do ponto I). A reta t é uma reta frontal (de frente) que está definida por dois pontos – os pontos T e I . A reta t' é outra reta frontal (de frente) que está igualmente definida por dois pontos – os pontos T' e I .

4. Determinar as geratrizes de contacto – as geratrizes g e g' . Desenharam-se as projeções das duas geratrizes de contacto (ou de tangência). A geratriz g está definida por um ponto (o ponto T) e por uma direção (a direção das geratrizes do cilindro e da reta r). A geratriz g' está igualmente definida por um ponto (o ponto T') e por uma direção (a direção das geratrizes do cilindro e da reta r).

5. Cada um dos dois planos tangentes está definido por três retas: o plano θ está definido pelas retas i , t e g e o plano θ' está definido pelas retas i , t' e g' . Cada um dos dois planos tangentes está definido por um número suficiente de retas que nos permite, em seguida, determinar os respetivos traços.

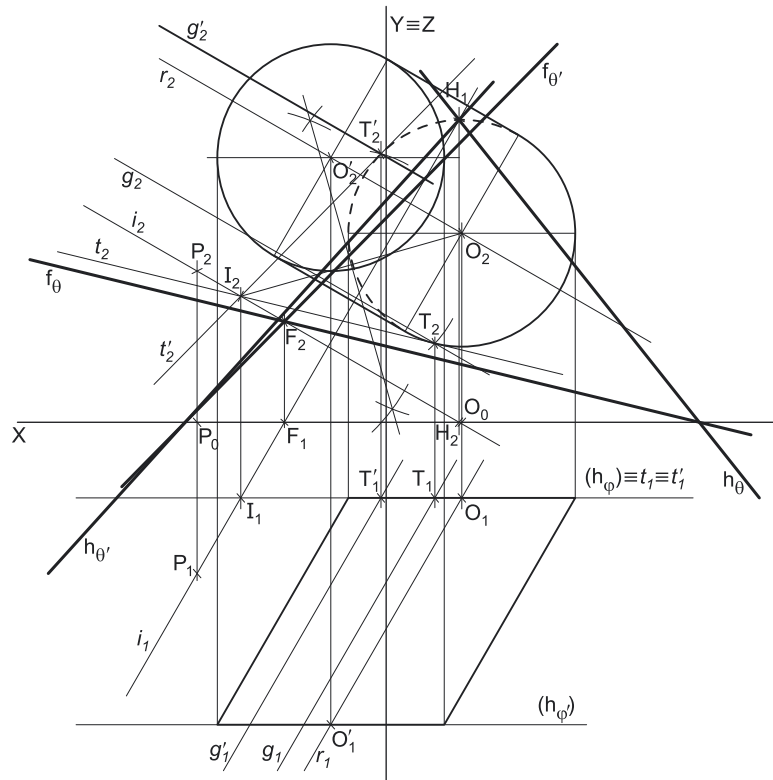
Nesse sentido, determinaram-se os traços da reta i – os pontos F e H .

Em seguida, determinaram-se os traços do plano θ . A reta t é uma reta frontal (de frente) do plano θ e retas frontais (de frente) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço frontal do plano, que é uma reta frontal (de frente) do plano com afastamento nulo. Assim, o traço frontal do plano θ (f_θ) passa pelo ponto F e é paralelo à reta t – está definido por um ponto (o ponto F) e por uma direção (a direção da reta t). O traço horizontal do plano θ (h_θ) passa pelo ponto H e é concorrente com o traço frontal (f_θ) no eixo X – está definido por dois pontos (o ponto H e o ponto de concorrência dos traços do plano, que se situa no eixo X).

Por fim, determinaram-se os traços do plano θ' . A reta t' é uma reta frontal (de frente) do plano θ' e retas frontais (de frente) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço frontal do plano, que é uma reta frontal (de frente) do plano com afastamento nulo. Assim, o traço frontal do plano θ' ($f_{\theta'}$) passa pelo ponto F e é paralelo à reta t' – está definido por um ponto (o ponto F) e por uma direção (a direção da reta t'). O traço horizontal do plano θ' ($h_{\theta'}$) passa pelo ponto H e é concorrente com o traço frontal ($f_{\theta'}$) no eixo X – está definido por dois pontos (o ponto H e o ponto de concorrência dos traços do plano, que se situa no eixo X).

Traçado:

Os dados (as projeções do cilindro) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – os traços dos planos tangentes ao cilindro (os traços dos planos θ e θ' , que são o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas r e i , das retas t e t' , das geratrizes g e g' , da construção necessária à determinação dos pontos T e T' ou, ainda, do eixo $Y \equiv Z$, que é uma linha de referência).



149.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o cilindro, bem como a reta h , pelas respectivas projeções, em função dos dados. Representou-se, também, o plano ϕ (o plano frontal que contém a base de maior afastamento do sólido) pelo seu traço horizontal. O plano ϕ não tem traço frontal, pelo que se representou, apenas, pelo seu traço horizontal (que se identificou com o recurso a parêntesis).

Resolução:

Pretende-se determinar os traços dos planos tangentes ao cilindro, que são paralelos à reta h . Para tal, é necessário proceder à execução sequencial das etapas que constituem o **método geral para a determinação dos planos tangentes a um cilindro, paralelos a uma reta dada**.

1. Conduzir, por um ponto exterior, duas retas concorrentes – uma reta paralela à reta dada e uma reta paralela às geratrizes do cilindro (essas duas retas definem um plano – o plano θ). Optou-se por considerar o ponto P como o ponto exterior, por uma questão de economia de traçados. A reta h é, assim, a reta paralela a ela si própria. Pelo ponto P conduziu-se, ainda, a reta r , paralela às geratrizes (e ao eixo) do cilindro. O plano definido pelas retas r e h (o plano θ) tem a **orientação** dos planos tangentes.

2. Determina-se a reta de interseção do plano θ (o plano definido pelas retas r e h) com o plano da base de referência do cilindro (reta i); Considerou-se, como base de referência do sólido, a sua base de menor afastamento – a base que está contida no Plano Frontal de Projeção. Assim, a reta de interseção do plano θ com o Plano Frontal de Projeção é o traço frontal do plano θ (f_θ). Determinou-se, ainda, o traço horizontal do plano θ (h_θ).

3. Conduzir as retas tangentes à base (de referência) do cilindro que são paralelas à reta i (que são as retas de interseção dos dois planos tangentes com o plano da base de referência). Assim, determinaram-se as retas tangentes à base de referência do cilindro que são paralelas a f_θ – essas retas são, imediatamente, os traços frontais dos planos tangentes ($f_{\theta'}$ e $f_{\theta''}$), pois a base de referência está contida no Plano Frontal de Projeção. Os pontos T e T' são os pontos em que as retas $f_{\theta'}$ e $f_{\theta''}$ são tangentes à base (de referência), respetivamente (os pontos de tangência). As retas $f_{\theta'}$ e $f_{\theta''}$ determinaram-se com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência que são paralelas a uma reta dada (que, neste caso, é f_θ – o traço frontal do plano θ). A reta $f_{\theta'}$ é uma reta frontal (de frente) que está definida por um ponto (o ponto T) e por uma direção (é paralela a f_θ). A reta $f_{\theta''}$ é outra reta frontal (de frente) que está igualmente definida por um ponto (o ponto T') e por uma direção (é paralela a f_θ). Já temos uma reta de cada um dos dois planos tangentes – o plano θ' está definido pelo seu traço frontal ($f_{\theta'}$) e pela sua orientação (é paralelo ao plano θ) e o plano θ'' está definido pelo seu traço frontal ($f_{\theta''}$) e pela sua orientação (é paralelo ao plano θ).

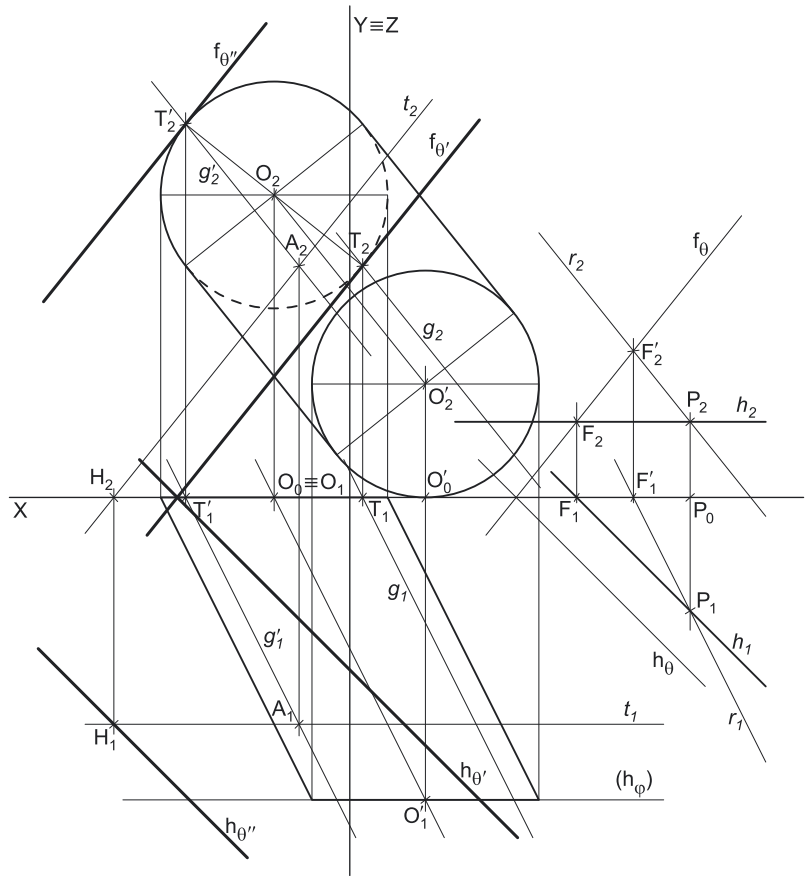
4. Determinar as geratrizes de contacto ou de tangência (as geratrizes g e g'). Desenharam-se as projeções das duas geratrizes de contacto (ou de tangência). A geratriz g está definida por um ponto (o ponto T) e por uma direção (a direção das geratrizes do cilindro). A geratriz g' está igualmente definida por um ponto (o ponto T') e por uma direção (a direção das geratrizes do cilindro). Neste momento já temos duas retas de cada um dos dois planos tangentes.

5. Cada um dos dois planos tangentes está definido pela sua orientação e por duas retas: o plano θ' está definido pelas retas $f_{\theta'}$ e g e é paralelo ao plano θ ; o plano θ'' está definido pelas retas $f_{\theta''}$ e g' e é paralelo ao plano θ .

Analisemos a determinação dos traços de cada um dos dois planos tangentes. Cada um dos traços de um plano é uma reta e para definirmos uma reta (qualquer reta) são sempre necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Por outro lado, é necessário ter em consideração que os planos θ' e θ'' são paralelos ao plano θ , cujos traços foram previamente determinados.

Começemos por determinar o traço horizontal do plano θ' . O traço horizontal do plano θ' ($h_{\theta'}$) é concorrente com $f_{\theta'}$ (o traço frontal do plano θ') no eixo X e é paralelo a h_θ (o plano definido pelas retas h e r). Assim, $h_{\theta'}$ está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direção (a direção de h_θ , que é a direção das retas horizontais do plano θ').

Salienta-se que, ao contrário do que se verificou com o plano θ' , nesta situação o ponto de concorrência dos traços do plano θ'' situa-se fora dos limites da folha. Analisemos, então, a situação do traço horizontal do plano θ'' . É pedida uma reta – o traço horizontal do plano θ'' ($h_{\theta''}$). Para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta $h_{\theta''}$ é uma reta horizontal (de nível) do plano θ'' , que é necessariamente paralela a h_θ (o traço horizontal do plano θ). Já temos uma direção para definir a reta $h_{\theta''}$. Falta-nos um ponto para definir $h_{\theta''}$.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Os dados do plano θ'' são insuficientes para definir $h_{\theta''}$, pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano, reta essa que, também ela, tem de estar definida por um ponto ou por um ponto e uma direção. Recorre-se à reta t , como reta auxiliar do plano θ' . A reta t é uma reta frontal (de frente) do plano θ' e está definida por um ponto (o ponto A , o seu ponto de concorrência com a geratriz g') e por uma direção (a direção das retas frontais do plano θ' – é paralela a $f_{\theta'}$). Em seguida, determinou-se o ponto H , o traço horizontal da reta t . Já temos o ponto que nos faltava para definir $h_{\theta'} - h_{\theta'}$, está definido por um ponto (o ponto H) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano θ' , que é a direção de $h_{\theta'}$).

Traçado:

Os dados (as projeções do cilindro e da reta h) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – os traços dos planos tangentes ao cilindro (os traços dos planos θ' e θ'' , que são o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta r , dos traços do plano θ , das geratrizes g e g' , da reta t , da construção necessária à determinação dos pontos T e T' ou, ainda, do eixo $Y \equiv Z$, que é uma linha de referência).

150.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o cilindro, bem como a reta r , pelas respetivas projeções, em função dos dados. Representaram-se, também, os planos φ e φ' (os planos frontais que contêm as bases do sólido) pelos seus traços horizontais. Os planos φ e φ' (os planos que contêm as bases) não têm traço frontal, pelo que se representaram, apenas, pelos respetivos traços horizontais (que se identificaram com o recurso a parêntesis). Os planos φ e φ' distam 7 cm (a altura do cilindro) – o plano φ tem 2 cm de afastamento (o afastamento do ponto O) e o plano φ' tem 9 cm de afastamento ($2 + 7 = 9$). A reta h é a reta suporte do eixo do cilindro. A reta r tem as suas projeções paralelas entre si, pois é uma reta paralela ao $\beta_{2/4}$ (retas paralelas ao $\beta_{2/4}$ têm as suas projeções paralelas entre si).

Resolução:

Pretende-se determinar os traços dos planos tangentes ao cilindro, que são paralelos à reta r . Para tal, é necessário proceder à execução sequencial das etapas que constituem o **método geral para a determinação dos planos tangentes a um cilindro, paralelos a uma reta dada**.

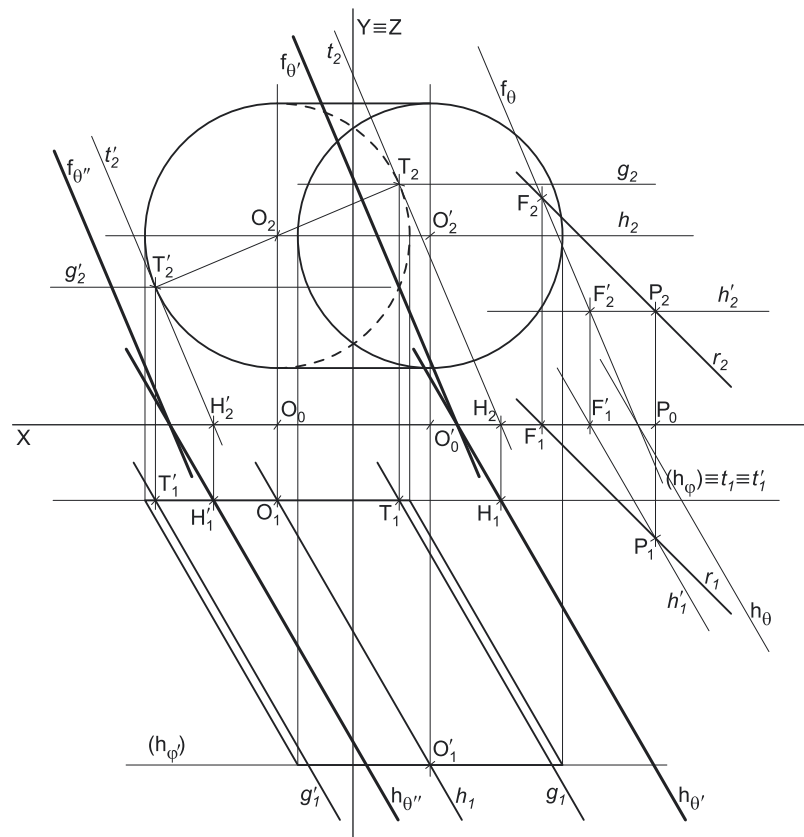
1. Conduzir, por um ponto exterior, duas retas concorrentes – uma reta paralela à reta dada e uma reta paralela às geratrizes do cilindro (essas duas retas definem um plano – o plano θ). Optou-se por considerar o ponto P como o ponto exterior, por uma questão de economia de traçados. A reta r é, assim, a reta paralela a ela si própria. Pelo ponto P conduziu-se, ainda, a reta h' , paralela às geratrizes (e ao eixo) do cilindro. O plano definido pelas retas r e h' (o plano θ) tem a **orientação** dos planos tangentes.

2. Determina-se a reta de interseção do plano θ (o plano definido pelas retas r e h') com o plano da base de referência do cilindro (reta i). Considerou-se, como base de referência do sólido, a sua base de menor afastamento – a base que está contida no plano φ . No entanto, optou-se por se determinar o traço frontal do plano θ (f_{θ}), ao invés de determinar a reta de interseção do plano θ com o plano da base de referência (o plano φ), pois um dado plano corta dois planos paralelos segundo duas retas paralelas. Assim, a reta de interseção do plano θ com o plano φ (o plano da base de referência) é paralela à reta de interseção do plano θ com o Plano Frontal de Projeção. Determinou-se, ainda, o traço horizontal do plano θ (h_{θ}).

3. Conduzir as retas tangentes à base (de referência) do cilindro que são paralelas à reta i (que são as retas de interseção dos dois planos tangentes com o plano da base de referência). Neste caso, determinaram-se as retas tangentes à base de referência do cilindro que são paralelas a f_{θ} . Os pontos T e T' são os pontos em que as retas t e t' são tangentes à base (de referência), respetivamente (os pontos de tangência). As retas t e t' determinaram-se com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência que são paralelas a uma reta dada (que, neste caso, é f_{θ} – o traço frontal do plano θ). A reta t é uma reta frontal (de frente) que está definida por um ponto (o ponto T) e por uma direção (é paralela a f_{θ}). A reta t' é outra reta frontal (de frente) que está igualmente definida por um ponto (o ponto T') e por uma direção (é paralela a f_{θ}).

Já temos uma reta de cada um dos dois planos tangentes – o plano θ' está definido pela reta t e pela sua orientação (é paralelo ao plano θ) e o plano θ'' está definido pela reta t' e pela sua orientação (é paralelo ao plano θ).

4. Determinar as geratrizes de contacto ou de tangência (as geratrizes g e g'). Desenharam-se as projeções das duas geratrizes de contacto (ou de tangência). A geratriz g está definida por um ponto (o ponto T) e por uma direção (é paralela à reta h , a reta suporte do eixo). A geratriz g' está igualmente definida por um ponto (o ponto T') e por uma direção (é também paralela à reta h , a reta suporte do eixo). Neste momento já temos duas retas de cada um dos dois planos tangentes.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

5. Cada um dos dois planos tangentes está definido pela sua orientação e por duas retas: o plano θ' está definido pelas retas t e g e é paralelo ao plano θ ; o plano θ'' está definido pelas retas t' e g' e é paralelo ao plano θ .

Analisemos a determinação dos traços de cada um dos dois planos tangentes. Cada um dos traços de um plano é uma reta e para definirmos uma reta (qualquer reta) são sempre necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Salienta-se que, **nesta situação**, cada um dos dois planos tangentes está definido por uma reta horizontal (as geratrizes g e g' são retas horizontais) e por uma reta frontal (as retas tangentes t e t' são retas frontais).

Começemos por determinar os traços do plano θ' . Para tal, determinou-se o traço horizontal da reta t – o ponto H . O traço horizontal do plano θ' ($h_{\theta'}$) passa pelo ponto H e é paralelo à geratriz g (que é uma reta horizontal do plano θ') – $h_{\theta'}$ está definido por um ponto (o ponto H) e por uma direção (a direção da geratriz g , que é a direção das retas horizontais do plano θ'). O traço frontal do plano θ' ($f_{\theta'}$) é concorrente com $h_{\theta'}$ no eixo X e é paralelo à reta t (que é uma reta frontal do plano θ') – $f_{\theta'}$ está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direção (a direção da reta t , que é a direção das retas frontais do plano θ').

Determinemos, em seguida, os traços do plano θ'' . Para tal, determinou-se o traço horizontal da reta t' – o ponto H' . O traço horizontal do plano θ'' ($h_{\theta''}$) passa pelo ponto H' e é paralelo à geratriz g' (que é uma reta horizontal do plano θ'') – $h_{\theta''}$ está definido por um ponto (o ponto H') e por uma direção (a direção da geratriz g' , que é a direção das retas horizontais do plano θ''). O traço frontal do plano θ'' ($f_{\theta''}$) é concorrente com $h_{\theta''}$ no eixo X e é paralelo à reta t' (que é uma reta frontal do plano θ'') – $f_{\theta''}$ está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direção (a direção da reta t' , que é a direção das retas frontais do plano θ'').

Note que os traços horizontais dos planos θ' e θ'' ($h_{\theta'}$ e $h_{\theta''}$) são paralelos ao traço horizontal do plano θ (h_{θ}) – o plano definido pelas retas r e h' . De forma semelhante, os traços frontais dos planos θ' e θ'' ($f_{\theta'}$ e $f_{\theta''}$) são igualmente paralelos ao traço frontal do plano θ (f_{θ}) – o plano definido pelas retas r e h' .

Traçado:

Os dados (as projeções do cilindro e da reta r) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – os traços dos planos tangentes ao cilindro (os traços dos planos θ' e θ'' , que são o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta h' , dos traços do plano θ , das retas t e t' , das geratrizes g e g' , da construção necessária à determinação dos pontos T e T' ou, ainda, do eixo $Y \equiv Z$, que é uma linha de referência).

151.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o cone, bem como a reta f , pelas respetivas projeções, em função dos dados. Representou-se, também, o plano φ , o plano frontal (de frente) que contém a base do cone. O plano φ não tem traço frontal, pelo que se representou, apenas, pelo seu traço horizontal (que se identificou com o recurso a parêntesis).

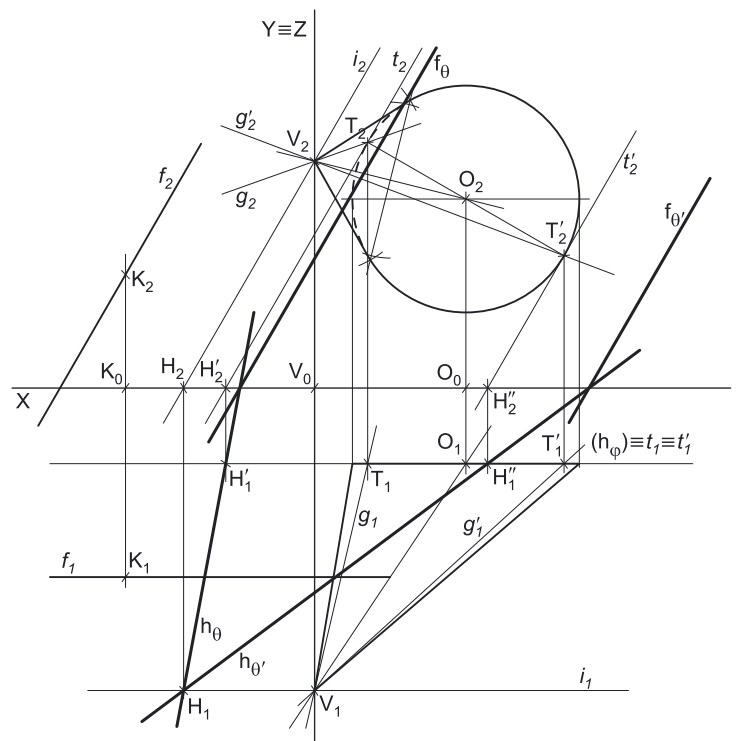
Resolução:

Pretend-se determinar os traços dos planos tangentes ao cone, que são paralelos à reta f . Para tal, é necessário proceder à execução sequencial das etapas que constituem o **método geral para a determinação dos planos tangentes a um cone, paralelos a uma reta dada**.

1. Conduzir, pelo vértice do cone, uma reta paralela à reta dada (reta i). A reta i é uma reta paralela à reta f que passa pelo ponto V . A reta i está definida por um ponto (o ponto V) e uma direção (é paralela à reta f). A reta i é a reta de interseção dos dois planos tangentes. Assim, já temos uma reta para definir os dois planos tangentes ao cone.

2. Determinar o ponto de interseção da reta i com o plano da base – ponto I . Nesta situação, a reta i é paralela ao plano que contém a base (o plano φ) – a reta i é uma reta frontal (de frente) e o plano φ é também ele um plano frontal (de frente). Assim, a reta i não intersesta o plano φ . No entanto, pode considerar-se que a reta i intersesta o plano φ no infinito – o ponto I (o ponto de interseção da reta i com o plano φ) situa-se, assim, **no infinito** (é um **ponto impróprio**).

3. Conduzir pelo ponto I as retas tangentes à base do cone – as retas t e t' (que são as retas de interseção dos dois planos tangentes com o plano da base). Nesta situação (em que o ponto I se situa no infinito), e porque as retas t e t' são concorrentes com a reta i num ponto do infinito (o ponto I), as retas t e t' são necessariamente paralelas à reta i (retas paralelas são retas concorrentes num ponto do infinito). Assim, já temos a direção das retas t e t' . Em seguida, determinaram-se os pontos T e T' , que são os pontos em que as retas t e t' são tangentes à base, respetivamente (os pontos de tangência). Os pontos T e T' determinaram-se com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência são paralelas a uma reta dada (que, neste caso, é i_2 , a projeção frontal da reta i). A reta t é uma reta frontal (de frente) que está definida por um ponto (o ponto T) e uma direção (a direção da reta i). A reta t' é outra reta frontal (de frente) que está igualmente definida por um ponto (o ponto T') e uma direção (a direção da reta i).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

4. Determinar as geratrizes de contacto – as geratrizes g e g' . Desenharam-se as projeções das duas geratrizes de contacto (ou de tangência). A geratriz g está definida por dois pontos – os pontos V e T . A geratriz g' está igualmente definida por dois pontos – os pontos V e T' .

5. Cada um dos dois planos tangentes está definido por três retas: o plano θ está definido pelas retas i , t e g e o plano θ' está definido pelas retas i , t' e g' . Cada um dos dois planos tangentes está definido por um número suficiente de retas que nos permite, em seguida, determinar os respetivos traços.

Nesse sentido, determinaram-se os traços horizontais das retas i , t e t' – os pontos H , H' e H'' .

Em seguida, determinaram-se os traços do plano θ (que está definido pelas retas i , t e g). O traço horizontal do plano θ (h_θ) passa pelos pontos H (o traço horizontal da reta i) e H' (o traço horizontal da reta t) – h_θ está definido por dois pontos (o ponto H e o ponto H'). A reta t é uma reta frontal (de frente) do plano θ e retas frontais (de frente) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço frontal do plano, que é uma reta frontal (de frente) do plano com afastamento nulo. Assim, o traço frontal do plano θ (f_θ) é concorrente com h_θ no eixo X e é paralelo à reta t – está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direção (a direção da reta t).

Por fim, determinaram-se os traços do plano θ' (que está definido pelas retas i , t' e g'). O traço horizontal do plano θ' ($h_{\theta'}$) passa pelos pontos H (o traço horizontal da reta i) e H'' (o traço horizontal da reta t') – está igualmente definido por dois pontos (o ponto H e o ponto H''). A reta t' é uma reta frontal do plano θ' e retas frontais (de frente) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço frontal do plano, que é uma reta frontal (de frente) do plano com afastamento nulo. Assim, o traço frontal do plano θ' ($f_{\theta'}$) é concorrente com $h_{\theta'}$ no eixo X e é paralelo à reta t' – está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direção (a direção da reta t').

Traçado:

Os dados (as projeções do cone e da reta f) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – os traços dos planos tangentes ao cone (os traços dos planos θ e θ' , que são o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois os são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso das retas t e t' , das geratrizes g e g' , da construção necessária à determinação dos pontos T e T' ou, ainda, do eixo $Y \equiv Z$, que é uma linha de referência).

152.

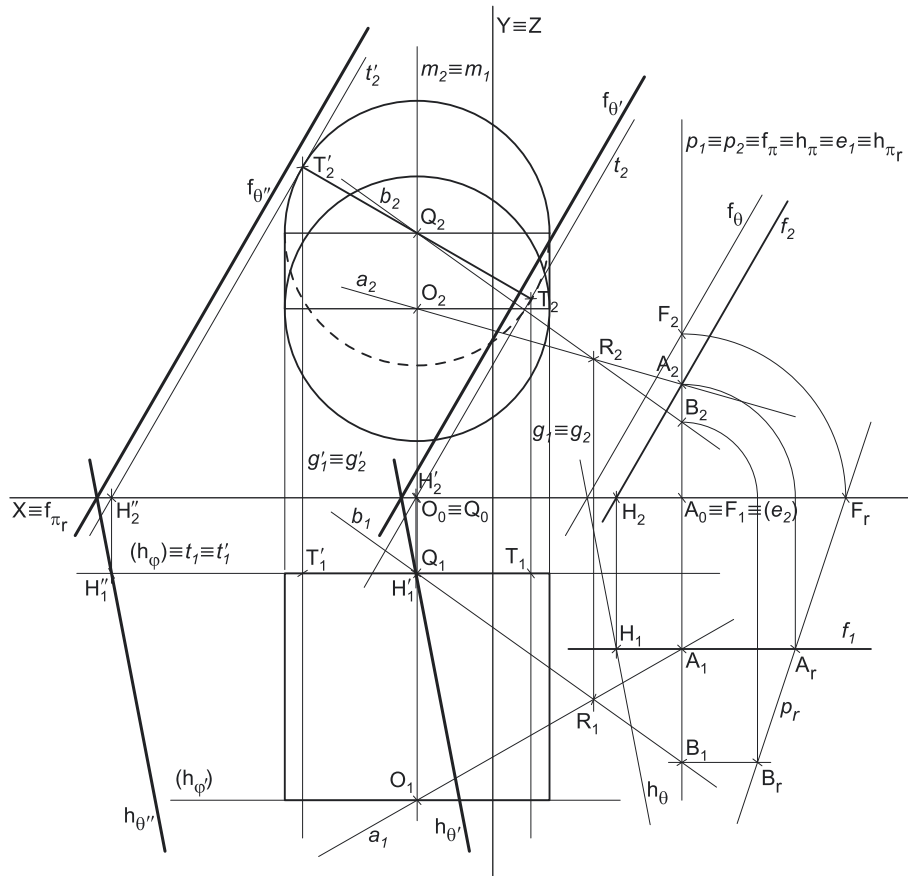
Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o cilindro, bem como a reta f , pelas respetivas projeções, em função dos dados. Representaram-se, também, os planos φ e φ' (os planos frontais que contêm as bases do sólido) pelos seus traços horizontais. Os planos φ e φ' (os planos que contêm as bases) não têm traço frontal, pelo que se representaram, apenas, pelos respetivos traços horizontais (que se identificaram com o recurso a parêntesis). Os planos φ e φ' distam 6 cm (a altura do cilindro) – o plano φ (o plano da base de maior afastamento) tem 8 cm de afastamento (o afastamento do ponto O) e o plano φ' tem 2 cm de afastamento ($8 - 6 = 2$). Desenharam-se ainda as projeções da reta m , que é a reta de perfil que contém o eixo do cilindro.

Resolução:

Pretende-se determinar os traços dos planos tangentes ao cilindro, que são paralelos à reta f . Para tal, é necessário proceder à execução sequencial das etapas que constituem o **método geral para a determinação dos planos tangentes a um cilindro, paralelos a uma reta dada**.

1. Conduzir, por um ponto exterior, duas retas concorrentes – uma reta paralela à reta dada e uma reta paralela às geratrizes do cilindro (essas duas retas definem um plano – o plano θ). Optou-se por considerar o ponto A como o ponto exterior, por uma questão de economia de traçados. A reta f é, assim, a reta paralela a ela si própria. Pelo ponto A conduziu-se, ainda a reta p , de perfil, paralela às geratrizes (e ao eixo) do cilindro.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Note que a reta m e a reta p são retas de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**, pelo que ainda não está garantido o paralelismo entre as duas retas. A reta m está definida por dois pontos – os pontos O e O' . A reta p está definida por um ponto (o ponto A) e uma direção (a direção da reta m). Para garantirmos o paralelismo entre as duas retas, recorreu-se a duas retas auxiliares do plano definido pelas retas m e p (por serem paralelas) – a reta a e a reta b . A reta a está definida por dois pontos – o ponto O (o seu ponto de concorrência com a reta m) e o ponto A (o seu ponto de concorrência com a reta p). A reta b está igualmente definida por dois pontos – o ponto Q (o seu ponto de concorrência com a reta m) e o ponto R (o seu ponto de concorrência com a reta a). As retas b e p , porque são complanares e não paralelas, são necessariamente concorrentes – o ponto B é o ponto de concorrência entre as duas retas e é o ponto que nos garante o paralelismo da reta p em relação à reta m .

A reta p , definida pelos pontos A e B , é a reta que passa pelo ponto A e é paralela à reta m . O plano definido pelas retas f e p (o plano θ) tem a **orientação** dos planos tangentes.

2. Determina-se a reta de interseção do plano θ (o plano definido pelas retas f e p) com o plano da base de referência do cilindro (reta i); Considerou-se, como base de referência do sólido, a sua base de menor afastamento – a base que está contida no plano φ' . No entanto, optou-se por se determinar o traço frontal do plano θ (f_θ), ao invés de determinar a reta de interseção do plano θ com o plano da base de referência (o plano φ'), pois um dado plano corta dois planos paralelos segundo duas retas paralelas. Assim, a reta de interseção do plano θ com o plano φ' (o plano da base de referência) é paralela à reta de interseção do plano θ com o Plano Frontal de Projeção.

Para determinar o traço frontal do plano θ são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O traço frontal do plano θ (f_θ) é paralelo à reta f (a reta f é uma reta frontal do plano θ e retas frontais de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço frontal do plano, que é uma reta frontal do plano com afastamento nulo). Já temos uma direção para definir f_θ . Falta-nos um ponto. Esse ponto poderá ser o traço frontal da reta p (o ponto F), que se determinou com o recurso ao rebatimento da reta p , pelo rebatimento do plano π (o plano de perfil que contém a reta p). Já temos o ponto que nos faltava para definir f_θ – f_θ está definido por um ponto (o ponto F , o traço frontal da reta p) e por uma direção (é paralelo à reta f).

Determinou-se, ainda, o traço horizontal do plano θ (h_θ), que está definido por dois pontos – o ponto H (o traço horizontal da reta f) e o ponto de concorrência dos dois traços do plano (que se situa no eixo X).

3. Conduzir as retas tangentes à base (de referência) do cilindro que são paralelas à reta i (que são as retas de interseção dos dois planos tangentes com o plano da base de referência). Neste caso, determinaram-se as retas tangentes à base de referência do cilindro que são paralelas a f_θ . Os pontos T e T' são os pontos em que as retas t e t' são tangentes à base (de referência), respetivamente (os pontos de tangência). As retas t e t' determinaram-se com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência que são paralelas a uma reta dada (que, neste caso, é f_θ – o traço frontal do plano θ). A reta t é uma reta frontal (de frente) que está definida por um ponto (o ponto T) e por uma direção (é paralela a f_θ). A reta t' é outra reta frontal (de frente) que está igualmente definida por um ponto (o ponto T') e por uma direção (é paralela a f_θ).

Já temos uma reta de cada um dos dois planos tangentes – o plano θ' está definido pela reta t e pela sua orientação (é paralelo ao plano θ) e o plano θ'' está definido pela reta t' e pela sua orientação (é paralelo ao plano θ).

4. Determinar as geratrizes de contacto ou de tangência (as geratrizes g e g'). Desenharam-se as projeções das duas geratrizes de contacto (ou de tangência). A geratriz g está definida por um ponto (o ponto T) e por uma direção (é uma reta de perfil paralela à reta m , a reta suporte do eixo). A geratriz g' está igualmente definida por um ponto (o ponto T') e por uma direção (é outra reta de perfil e também paralela à reta m , a reta suporte do eixo). Neste momento, já temos duas retas de cada um dos dois planos tangentes, se bem que a utilidade das geratrizes para o efeito é praticamente nula, por serem retas de perfil (cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**).

5. Cada um dos dois planos tangentes está definido pela sua orientação e por duas retas: o plano θ' está definido pelas retas t e g e é paralelo ao plano θ ; o plano θ'' está definido pelas retas t' e g' e é paralelo ao plano θ .

Analisemos a determinação dos traços de cada um dos dois planos tangentes. Cada um dos traços de um plano é uma reta e para definirmos uma reta (qualquer reta) são sempre necessários dois pontos ou um ponto e uma direção.

Começemos por determinar os traços do plano θ' . Para tal, determinou-se o traço horizontal da reta t – o ponto H' . O traço horizontal do plano θ' ($h_{\theta'}$) passa pelo ponto H' e é paralelo ao traço horizontal do plano θ (h_θ) – $h_{\theta'}$ está definido por um ponto (o ponto H') e por uma direção (a direção de h_θ , que é a direção das retas horizontais do plano θ). O traço frontal do plano θ' ($f_{\theta'}$) é concorrente com $h_{\theta'}$ no eixo X e é paralelo à reta t (que é uma reta frontal do plano θ') – $f_{\theta'}$ está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direção (a direção da reta t , que é a direção das retas frontais do plano θ').

Determinemos, em seguida, os traços do plano θ'' . Para tal, determinou-se o traço horizontal da reta t' – o ponto H'' . O traço horizontal do plano θ'' ($h_{\theta''}$) passa pelo ponto H'' e é paralelo ao traço horizontal do plano θ (h_θ) – $h_{\theta''}$ está definido por um ponto (o ponto H'') e por uma direção (a direção de h_θ , que é a direção das retas horizontais do plano θ). O traço frontal do plano θ'' ($f_{\theta''}$) é concorrente com $h_{\theta''}$ no eixo X e é paralelo à reta t' (que é uma reta frontal do plano θ'') – $f_{\theta''}$ está definido por um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e por uma direção (a direção da reta t' , que é a direção das retas frontais do plano θ'').

Traçado:

Os dados (as projeções do cilindro e da reta f) representaram-se a **médio**, bem como o eixo X (que é a linha estruturante do exercício). O pedido representou-se a **forte** – os traços dos planos tangentes ao cilindro (os traços dos planos θ' e θ'' , que são o objetivo final do exercício). As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são linhas auxiliares (caso da reta p , das retas a e b , dos traços do plano θ , dos traçados relativos ao rebatimento do plano π , das retas t e t' , das geratrizes g e g' , da construção necessária à determinação dos pontos T e T' ou, ainda, do eixo $Y \equiv Z$, que é uma linha de referência).

20 SECÇÕES PLANAS

153.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A**, **O** e **V**, pelas respectivas projeções, em função dos dados. Representou-se, ainda, o plano φ (o plano secante), pelo seu traço horizontal. O plano φ não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.

Resolução:

Determinação das projeções da pirâmide:

A base da pirâmide (o hexágono **[ABCDEF]**) está contida no Plano Frontal de Projeção, pelo que está em verdadeira grandeza em projeção frontal. Assim, com o compasso, fazendo centro em O_2 e com raio até A_2 , desenhou-se a projeção frontal da circunferência circunscrita ao polígono e procedeu-se à sua construção, em projeção frontal – a projeção horizontal do hexágono situa-se no eixo **X**, pois todos os seus vértices têm afastamento nulo. Em seguida, a partir das projeções de todos os sete vértices da pirâmide, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é a linha fechada **[ABCVEF]**, cuja projeção frontal é o polígono **[A₂B₂C₂V₂E₂F₂]**. Em projeção frontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **D**. Este vértice, por ser um dos vértices de **menor afastamento** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[CD]** e **[DE]**, da base, e a aresta lateral **[DV]**. As arestas laterais **[AV]**, **[BV]** e **[FV]** são visíveis, por se situarem na parte visível do sólido (separam faces do sólido que são visíveis em projeção frontal).

O contorno aparente horizontal é a linha fechada **[ABCDV]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[A₁B₁C₁D₁V₁]**. Em projeção horizontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices **E** e **F**. Estes vértices, por serem os vértices de **menor cota** da pirâmide, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[AF]**, **[EF]** e **[DE]**, da base, e as arestas laterais **[EV]** e **[FV]**. No entanto, todas estas arestas estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis em projeção horizontal. Nesse sentido, note que as arestas laterais **[BV]** e **[CV]** são visíveis, por se situarem na parte visível do sólido (separam faces do sólido que são visíveis em projeção horizontal).

Determinação das projeções da figura da secção:

O plano secante é paralelo ao plano da base, pelo que a figura da secção é um polígono semelhante ao hexágono da base (outro hexágono regular) e tem os seus lados paralelos aos lados correspondentes do hexágono da base. Por outro lado, o plano secante (o plano φ) é um plano projetante horizontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta todas as arestas laterais do sólido (as seis arestas laterais), não cortando a base em nenhuma das suas arestas – como atrás se referiu, a figura da secção é um **hexágono**.

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **seis vértices** da **figura da secção** – aqueles foram determinados a partir das suas projeções horizontais, pois tratou-se de determinar os pontos de interseção das arestas laterais da pirâmide (que estão contidas em retas não projetantes) com um plano projetante horizontal (o plano φ). A partir das projeções dos seis vértices da figura da secção (que não se identificaram, com vista a não sobrecarregar a resolução gráfica apresentada com excesso de notações), desenharam-se as projeções da figura (que é um hexágono regular, com lados fronto-horizontais, tal como a base da pirâmide).

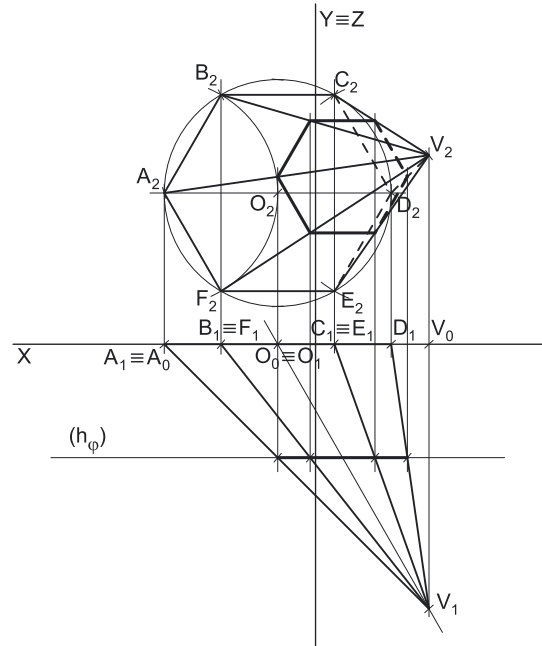
Em projeção horizontal, a **figura da secção** reduz-se a um segmento de reta, pois o plano secante (o plano φ) é um plano projetante horizontal. Já em projeção frontal, a **figura da secção** projeta-se em verdadeira grandeza, pois o plano que a contém (o plano φ) é paralelo ao Plano Frontal de Projeção. Por outro lado, atendendo a que não houve a desagregação do sólido (é pedida a **figura da secção** e não o **sólido resultante da secção**), há que representar as eventuais invisibilidades da figura.

Os lados invisíveis da **figura da secção** (em projeção frontal) são os lados da figura que estão contidos nas faces da pirâmide que são invisíveis em projeção frontal – as faces laterais **[CDV]** e **[DEV]**. Assim, os (dois) lados da figura da secção que se situam naquelas duas faces são **invisíveis**, em projeção frontal. Os outros quatro lados da **figura da secção** são **visíveis** em projeção frontal, por estarem contidos em faces da pirâmide que são em projeção frontal.

Uma vez que a **figura da secção**, em projeção horizontal, se reduz a um segmento de reta, não há quaisquer invisibilidades a registar em projeção horizontal.

Traçado:

As projeções da pirâmide e o traço horizontal do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. O eixo **X** representa-se igualmente a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y \equiv Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). As duas projeções da figura da secção (o objetivo do exercício), com as respectivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traçados referentes à construção do hexágono).



154.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **O**, **A** e **O'**, pelas respectivas projeções, em função dos dados. Em seguida representaram-se, pelos respectivos traços frontais, os planos v e v' , que são os planos horizontais (de nível) que contêm a base de menor cota (o plano v) e a base de maior cota (o plano v'). O plano v é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal (f_v) passa por **O**₂ (a projeção frontal do ponto **O**) e por **A**₂ (a projeção frontal do ponto **A**). O plano v' é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ($f_{v'}$) passa por **O'**₂ (a projeção frontal do ponto **O'**). Representou-se, ainda, o plano v'' , o plano secante, pelo seu traço frontal. Os planos v , v' e v'' não têm traço horizontal, pelo que os respetivos traços frontais se identificaram entre parêntesis.

Resolução:*Determinação das projeções do prisma:*

A base inferior do prisma (o quadrado **[ABCD]**) está contida num plano horizontal (de nível), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção. Assim, com o compasso, fazendo centro em **O**₁ e raio até **A**₁, desenhou-se a projeção horizontal da circunferência circunscrita ao polígono e procedeu-se à sua construção, em projeção horizontal. Uma vez que o enunciado é omissivo em relação à ordem dos vértices, estes foram nomeados de forma arbitrária, mas sequencial.

As arestas laterais do prisma estão contidas em retas paralelas à reta suporte do eixo. Assim, pelas projeções de cada um dos vértices do quadrado **[ABCD]** conduziram-se as projeções homónimas das retas suporte das respetivas arestas laterais, paralelas às projeções homónimas do segmento de reta **[OO']** (o eixo do sólido). Os vértices da base superior (os pontos **A'**, **B'**, **C'** e **D'**) são os pontos de interseção das retas suporte das arestas laterais do sólido com o plano v' (o plano da base superior) e foram determinados a partir das suas projeções frontais (pois o plano v' é um plano projetante frontal). Este procedimento permitiu-nos determinar as projeções do quadrado **[A'B'C'D']** (a base superior do prisma).

A partir dos oito vértices do sólido, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é a linha fechada **[BADD'A'B']**, cuja projeção frontal é o polígono **[B₂A₂D₂D'₂A'₂B'₂]**. Em projeção frontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices **C** e **C'**. Estes dois vértices, por serem os vértices de **menor afastamento** do prisma, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[BC]** e **[CD]** (da base inferior), as arestas **[B'C']** e **[C'D']** (da base superior), e a aresta lateral **[CC']**. A aresta lateral **[AA']** é visível, por se situar na parte visível do sólido (os pontos **A** e **A'** são os vértices da maior afastamento do prisma). Note que as arestas **[BC]**, **[CD]**, **[B'C']** e **[C'D']**, apesar de serem invisíveis, estão ocultas por arestas visíveis, pelo que não qualquer invisibilidade a registar nestas arestas (em projeção frontal).

O contorno aparente horizontal é a linha fechada **[ABCC'D'A']**, cuja projeção horizontal é o polígono **[A₁B₁C₁C'₁D'₁A'₁]**. Em projeção horizontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices **D** e **B'**. O vértice **D**, por ser um dos vértices de **menor cota** do prisma, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AD]** e **[CD]**, da base inferior, e a aresta lateral **[DD']**. O vértice **B'**, por ser um dos vértices de **maior cota** do prisma, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[A'B']** e **[B'C']**, da base superior, e a aresta lateral **[BB']**.

Determinação das projeções da figura da secção:

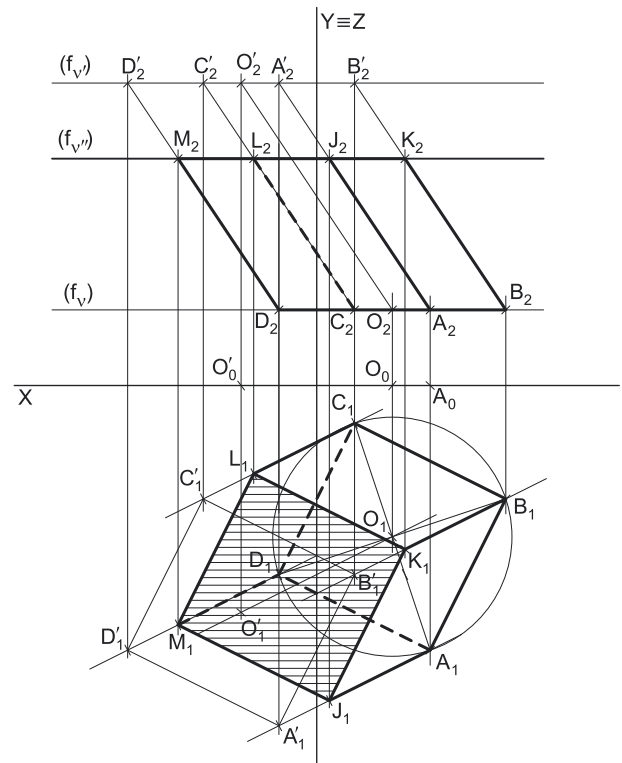
O plano secante é paralelo aos planos das bases, pelo que a figura da secção é um polígono geometricamente igual aos quadrados das bases (é um outro quadrado) e tem os seus lados paralelos aos lados correspondentes dos quadrados das bases. Por outro lado, o plano secante (o plano v'') é um plano projetante frontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta todas as arestas laterais do sólido (as quatro arestas laterais do prisma), não cortando qualquer das bases em nenhuma das respetivas arestas – como atrás se referiu, a figura da secção é um **quadrado**.

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **quatro vértices da figura da secção** (os pontos **J**, **K**, **L** e **M**), que foram determinados a partir das suas projeções frontais, pois tratou-se de determinar os pontos de interseção das arestas laterais do prisma (que estão contidas em retas não projetantes) com um plano projetante frontal (o plano v''). A partir das projeções dos quatro vértices da figura da secção, desenharam-se as projeções da figura (que é um quadrado).

Em projeção frontal, a **figura da secção** reduz-se a um segmento de reta, pois o plano secante (o plano v'') é um plano projetante frontal. Já em projeção horizontal, a **figura da secção** projeta-se em verdadeira grandeza, pois o plano que a contém (o plano v'') é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção.

Determinação das projeções do sólido resultante da secção:

A partir de todos os vértices do **sólido resultante da secção** (que é um outro sólido – uma parte do sólido inicial), determinaram-se os seus contornos aparentes. O **sólido resultante da secção** é, no presente caso, um outro prisma – um prisma quadrangular oblíquo, com bases horizontais (de nível), cuja base inferior é o quadrado **[ABCD]** e cuja base superior é o quadrado **[JKLM]** (que é, afinal, a parte do sólido compreendida entre o plano secante e a base inferior).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O contorno aparente frontal é a linha fechada **[BADMJK]**, cuja projeção frontal é o polígono **[B₂A₂D₂M₂J₂K₂]**. Em projeção frontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices **C** e **L**. Estes dois vértices, por serem os vértices de **menor afastamento** do sólido, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[BC]** e **[CD]** (da base inferior), as arestas **[KL]** e **[LM]** (da base superior do sólido), e a aresta lateral **[CL]**. A aresta lateral **[AJ]** é visível, por se situar na parte visível do sólido (os pontos **A** e **J** são os vértices da maior afastamento do sólido). Note que as arestas **[BC]**, **[CD]**, **[KL]** e **[LM]**, apesar de serem invisíveis em projeção frontal, estão ocultas por arestas visíveis, pelo que não qualquer invisibilidade a registar nestas arestas (em projeção frontal).

O contorno aparente horizontal é a linha fechada **[ABCLMJ]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[A₁B₁C₁L₁M₁J₁]**. Em projeção horizontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices **D** e **K**. O vértice **D**, por ser um dos vértices de **menor cota** do sólido, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AD]** e **[CD]**, da base inferior, e a aresta lateral **[DM]**. O vértice **K**, por ser um dos vértices de **maior cota** do sólido, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[JK]** e **[KL]**, da base superior do sólido, e a aresta lateral **[BK]**.

A **figura da secção**, porque é visível em projeção horizontal (a área do corte é visível em projeção horizontal), foi identificada com o recurso a tracejado, paralelamente ao eixo **X**.

Traçado:

O eixo **X** representa-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y ≡ Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O traço frontal do plano secante, porque integra os dados, representou-se a **médio**. As projeções do prisma, apesar de integrarem igualmente os dados, representaram-se a **leve** pois, nesta situação, são um traçado auxiliar para atingir o objetivo pretendido (o sólido resultante da secção). As duas projeções do **sólido resultante da secção** (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. Os traços frontais dos planos das bases, no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que se representaram igualmente a **leve**. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traçados referentes à construção dos quadrados). O tracejado que preenche a figura da secção executou-se a **leve**.

155.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida representou-se o plano **v**, o plano horizontal (de nível) que contém a base, pelo seu traço frontal. O plano **v** é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal (**f_v**) passa por **O₂** (a projeção frontal do ponto **O**). Representou-se, ainda, o plano **v'**, o plano secante, pelo seu traço frontal. Os planos **v** e **v'** não têm traço horizontal, pelo que os respetivos traços frontais se identificaram entre parêntesis.

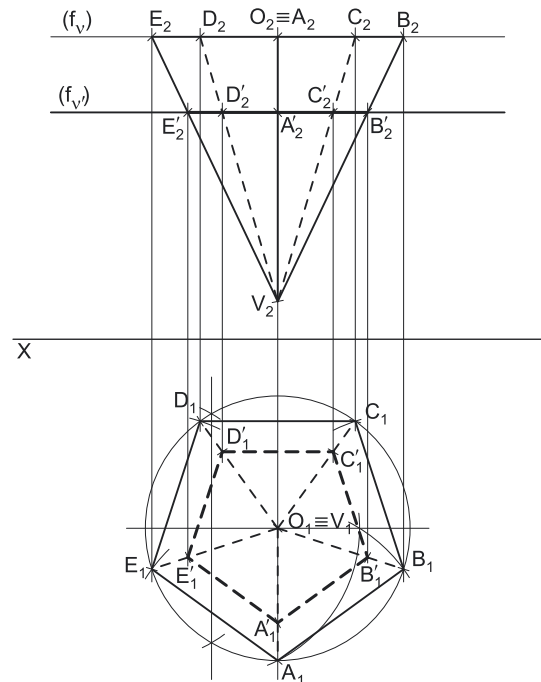
Resolução:

Determinação das projeções da pirâmide:

A base da pirâmide (o pentágono **[ABCDE]**) está contida num plano horizontal (de nível), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção. Assim, com o compasso, fazendo centro em **O₁** e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal da circunferência circunscrita ao polígono e procedeu-se à sua construção, em projeção horizontal, de acordo com os dados. Não sendo atribuídos, no enunciado, quaisquer letras aos vértices do polígono, as notações usadas são arbitrárias. A posição do pentágono teve em conta que a aresta lateral correspondente ao vértice de maior afastamento (o vértice **A**) é de perfil. Após a construção da projeção horizontal da figura, determinou-se a sua projeção frontal, que se reduz a um segmento de reta sobre **f_v** (o traço frontal do plano **v**), pois o plano **v** é um plano projetante frontal.

Trata-se de uma **pirâmide regular**, pelo que o seu eixo está contido numa reta ortogonal ao plano da base, que é uma reta vertical (projetante horizontal) – tem-se, imediatamente, **O₁ ≡ V₁**. Por outro lado, o vértice da pirâmide é invisível em projeção horizontal, o que significa que o vértice tem cota inferior ao plano da base. Por fim, uma vez que a pirâmide tem 7 cm de altura e que o plano da base tem 8 cm de cota, o vértice **V** tem 1 cm de cota ($8 - 7 = 1$), o que nos permitiu determinar **V₂** (a projeção frontal do vértice **V**). Em seguida, a partir das projeções de todos os seis vértices da pirâmide, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é a linha fechada **[BAEV]**, cuja projeção frontal é o polígono **[B₂A₂E₂V₂]**. Em projeção frontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices **C** e **D**. Estes dois vértices, por serem os vértices de **menor afastamento** da pirâmide, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[BC]**, **[CD]** e **[DE]**, da base (que estão ocultas por arestas visíveis), e as arestas laterais **[CV]** e **[DV]**. A aresta lateral **[AV]** é visível, por se situar na parte visível do sólido (o vértice **A** é o vértice de maior afastamento da pirâmide).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O contorno aparente horizontal é o pentágono $[ABCDE]$, cuja projeção horizontal é o pentágono $[A_1B_1C_1D_1E_1]$. Em projeção horizontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente horizontal – o vértice V . Este vértice, por ser o vértice de **menor cota** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que neles convergem, que são todas as arestas laterais do sólido – todas as arestas laterais do sólido são invisíveis, em projeção horizontal.

Determinação das projeções da figura da secção:

O plano secante é paralelo ao plano da base, pelo que a figura da secção é um polígono semelhante ao pentágono da base (outro pentágono regular) e tem os seus lados paralelos aos lados correspondentes do pentágono da base. Por outro lado, o plano secante (o plano v) é um plano projetante frontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta todas as arestas laterais do sólido (as cinco arestas laterais do sólido), não cortando a base em nenhuma das suas arestas – como atrás se referiu, a figura da secção é um **pentágono**.

Assim, determinaram-se as projeções dos vértices B' , C' , D' e E' da **figura da secção**, que foram determinados a partir das suas projeções frontais, pois tratou-se de determinar os pontos de interseção das arestas laterais da pirâmide (que estão contidas em retas não projetantes) com um plano projetante frontal (o plano v'). No entanto, o ponto A' (o ponto em que o plano v' corta a aresta lateral $[AV]$ – a aresta lateral de perfil), não tem determinação direta a partir da sua projeção frontal, ao contrário do exposto para os pontos B' , C' , D' e E' , pois não é possível determinar, de forma direta, as projeções de pontos pertencentes a retas de perfil. Recorde que as projeções de uma reta de perfil não verificam o **Critério de Reversibilidade**, pelo que a condição para que um ponto pertença a uma reta, no caso das retas de perfil, é uma condição necessária mas não suficiente para que o ponto pertença efetivamente à reta – a determinação das projeções de pontos pertencentes à reta de perfil carece do recurso a raciocínios ou procedimentos auxiliares.

No entanto, atendendo a que a figura da secção (o polígono $[A'B'C'D'E']$) é um **pentágono regular**, de lados paralelos aos lados correspondentes do pentágono da base (o pentágono $[ABCDE]$), sabe-se que o lado $[A'B']$ é paralelo ao lado $[AB]$, da base, tal como o lado $[A'E']$ é paralelo ao lado $[AE]$, da base. Este raciocínio permite-nos determinar A'_1 , a projeção horizontal do ponto A' . Para tal conduziu-se, por B'_1 (a projeção horizontal do ponto B'), uma paralela a $[A_1B_1]$ (a projeção horizontal do lado $[AB]$ do pentágono da base), determinando A'_1 (a projeção horizontal do ponto A') sobre $[A_1V_1]$ (a projeção horizontal da aresta lateral $[AV]$) – está garantido o paralelismo entre o lado $[A'B']$ da figura da secção e o lado $[AB]$ do pentágono da base. Tenha em conta que este procedimento garante-nos, também, que o lado $[A'E']$ da figura da secção é paralelo ao lado $[AE]$ do pentágono da base.

A partir das projeções dos cinco vértices da figura da secção, desenharam-se as projeções da figura (que é um pentágono regular, tal como a base da pirâmide).

Em projeção frontal, a **figura da secção** reduz-se a um segmento de reta, pois o plano secante (o plano v') é um plano projetante frontal. Já em projeção horizontal, a **figura da secção** projeta-se em verdadeira grandeza, pois o plano que a contém (o plano v) é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção. Por outro lado, atendendo a que não houve a desagregação do sólido (é pedida a **figura da secção** e não o **sólido resultante da secção**), há que representar as eventuais invisibilidades da figura.

A **figura da secção** é invisível (em projeção horizontal) na sua totalidade, pois todos os seus lados estão contidos nas faces laterais da pirâmide, que são todas invisíveis em projeção horizontal. Uma vez que a **figura da secção**, em projeção frontal, se reduz a um segmento de reta, não há quaisquer invisibilidades a registar em projeção frontal.

Traçado:

As projeções da pirâmide e o traço frontal do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. O eixo X representa-se igualmente a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O traço frontal do plano v (o plano que contém a base) representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. As duas projeções da figura da secção (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traçados referentes à construção do pentágono).

156.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A**, **Q** e **M**, pelas respectivas projeções, em função dos dados, bem como o plano φ (o plano que contém a base), pelo seu traço horizontal (h_φ), que passa por **A**₂ e por **Q**₂ (as projeções horizontais dos pontos **A** e **Q**), pois o plano φ é projetante horizontal. O plano φ não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis. Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano α (o plano secante), pelos seus traços.

Resolução:

Determinação das projeções da pirâmide:

A base da pirâmide (o pentágono **[ABCDE]**) está contida num plano frontal (de frente), pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção. Assim, com o compasso, fazendo centro em **O**₂ e com raio até **A**₂, desenhou-se a projeção frontal da circunferência circunscrita ao polígono e procedeu-se à sua construção. Após a construção da projeção frontal da figura, determinou-se a sua projeção horizontal, que se reduz a um segmento de reta sobre h_φ (o traço horizontal do plano φ), pois o plano φ é um plano projetante horizontal.

Em seguida, desenharam-se as projeções da reta **h**, a reta suporte da aresta **[AV]**. A reta **h** está definida por um ponto (o ponto **A**) e por uma direção (que é dada no enunciado). A aresta lateral **[AV]** mede 8 cm e tendo em conta que está contida numa reta horizontal (paralela ao Plano Horizontal de Projeção), sabe-se que a aresta **[AV]** se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção. Assim, com o compasso, fazendo centro em **A**₁ (a projeção horizontal do ponto **A**) e com 8 cm de raio (a medida da aresta), determinou-se **V**₁ (a projeção horizontal do ponto **V**) sobre h_1 (a projeção horizontal da reta **h**) – **V**₂ (a projeção frontal do ponto **V**) está sobre h_2 (a projeção frontal da reta **h**).

Por fim, a partir das projeções de todos os seis vértices da pirâmide, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é o pentágono **[ABCDE]**, cuja projeção frontal é o pentágono **[A₂B₂C₂D₂E₂]**. Em projeção frontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **V**. Este vértice, por ser o vértice de **menor afastamento** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – todas as arestas laterais da pirâmide são invisíveis, em projeção frontal.

O contorno aparente horizontal é a linha fechada **[ABC₁V₁]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[A₁B₁C₁V₁]**. Em projeção horizontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices **D** e **E**. Estes vértices, por serem os vértices de **menor cota** da pirâmide, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[AE]**, **[CD]** e **[DE]**, da base, e as arestas laterais **[DV]** e **[EV]**. No entanto, as arestas da base estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis em projeção horizontal, pelo que as únicas invisibilidades a assinalar são as relativas às arestas laterais **[DV]** e **[EV]**. A aresta lateral **[BV]** é visível, por se situar na parte visível do sólido (separa duas faces do sólido que são visíveis em projeção horizontal, além de que **B** é o vértice de maior cota da pirâmide).

Determinação das projeções da figura da secção:

O plano secante (o plano α) não é paralelo ao plano da base, pelo que a figura da secção **não é** um polígono semelhante ao hexágono da base. Por outro lado, o plano secante (o plano α) é um plano projetante horizontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta duas arestas laterais do sólido (as arestas **[AV]** e **[EV]**) e corta, ainda, duas arestas da base (as arestas **[AB]** e **[DE]**). Assim, a figura da secção tem **quatro vértices**, pelo que é um **quadrilátero**.

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **quatro vértices** da **figura da secção**, o que se processou a partir das suas projeções horizontais, pois tratou-se de determinar os pontos de interseção das arestas laterais da pirâmide (que estão contidas em retas não projetantes) com um plano projetante horizontal (o plano α). Os pontos **R** e **S** (os pontos em que o plano secante corta as arestas **[AB]** e **[DE]**, respetivamente) têm as suas projeções horizontais coincidentes, pois as projeções horizontais daquelas duas arestas também estão coincidentes. A partir das projeções dos quatro vértices da figura da secção, desenharam-se as projeções da figura (o quadrilátero **[RSTU]**).

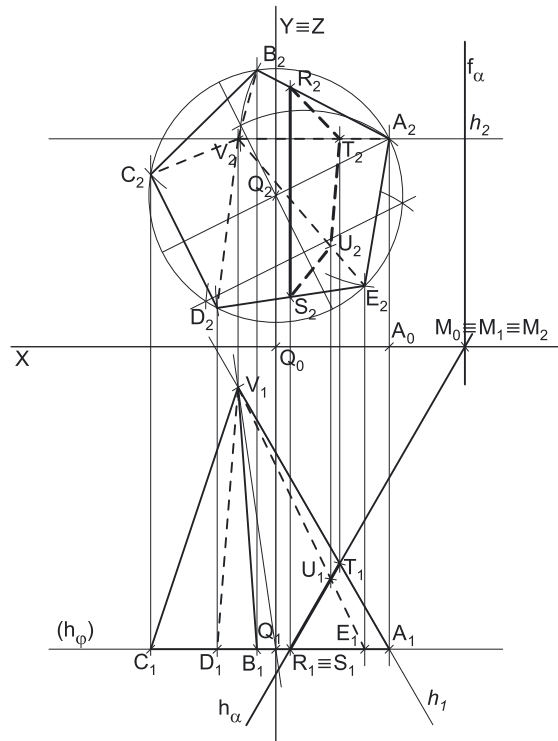
Em projeção horizontal, a **figura da secção** reduz-se a um segmento de reta, pois o plano secante (o plano α) é um plano projetante horizontal. Já em projeção frontal, a **figura da secção** projeta-se com deformação, pois o plano que a contém (o plano α) não é paralelo ao Plano Frontal de Projeção. Por outro lado, atendendo a que não houve a desagregação do sólido (é pedida a **figura da secção** e não o **sólido resultante da secção**), há que representar as eventuais invisibilidades da figura.

Os lados invisíveis da **figura da secção** (em projeção frontal) são os lados da figura que estão contidos nas faces da pirâmide que são invisíveis em projeção frontal – as faces laterais **[ABV]**, **[AEV]** e **[DEV]**. Assim, os três lados da figura da secção que se situam naquelas três faces são **invisíveis**, em projeção frontal – os lados **[ST]**, **[TU]** e **[RU]**. O lado **[RS]** da **figura da secção** é **visível** em projeção frontal, porque se situa na base e a base é visível em projeção frontal.

Uma vez que a **figura da secção**, em projeção horizontal, se reduz a um segmento de reta, não há quaisquer invisibilidades a registar em projeção horizontal.

Traçado:

As projeções da pirâmide e os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. O eixo **X** representa-se igualmente a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y = Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). As duas projeções da figura da secção (o objetivo do exercício), com as respectivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traçados referentes à construção do pentágono).



157.

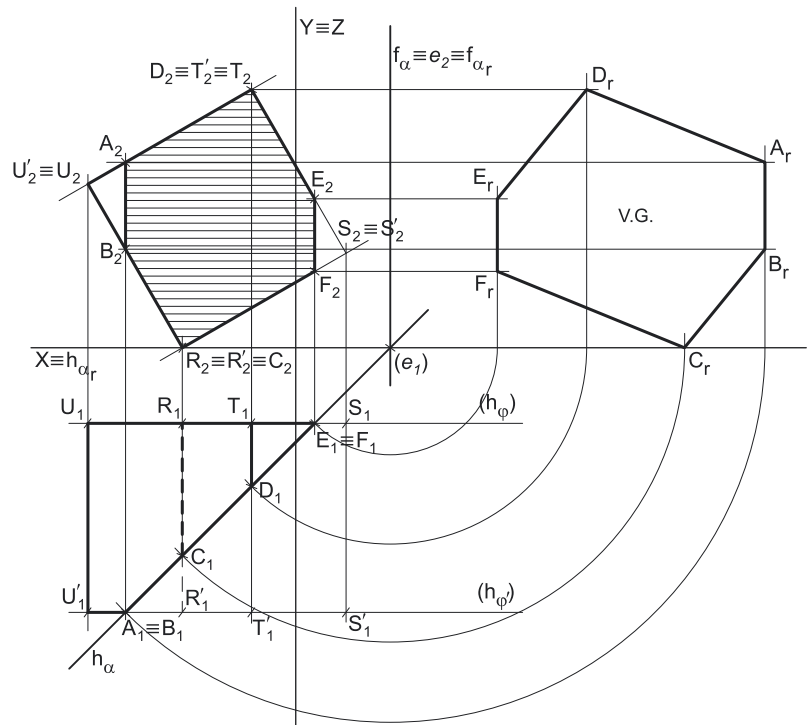
Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano ϕ , o plano frontal (de frente) que contém a face referida no enunciado (que se considerou ser a face [RSTU]). O plano ϕ não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.

Determinação das projeções do cubo:

Uma vez que o cubo se apoia, por uma única aresta no Plano Horizontal de Projeção, e tendo em conta que duas faces laterais estão contidas em planos projetantes frontais (cuja orientação é dada), sabe-se imediatamente que a única aresta do cubo que se situa no Plano Horizontal de Projeção é uma aresta projetante frontal (de topo). Assim, considerou-se que essa aresta é a aresta [RR'] (considerando-se que as faces frontais são as faces [RSTU] e [R'S'T'U']). Nesse sentido, determinaram-se as projeções do ponto R, pertencente ao plano ϕ (o ponto R é um vértice do quadrado [RSTU], que está contido no plano ϕ) com a abscissa dada e com cota nula (porque pertence ao Plano Horizontal de Projeção).

O cubo tem 5 cm de aresta e a aresta [RR'] está em verdadeira grandeza (pois está contida no Plano Horizontal de Projeção), o que nos permitiu determinar as projeções do ponto R', o outro extremo da aresta [RR'] – o ponto R' tem 7 cm de afastamento ($2 + 5 = 7$). Em seguida desenhou-se o traço horizontal do plano frontal (de frente) ϕ' , o plano que contém a face [R'S'T'U'] (a face paralela à face [RSTU]). O traço horizontal do plano ϕ' ($h_{\phi'}$) passa por R'_1 (a projeção horizontal do ponto R'), pois no plano ϕ' é projetante horizontal.



Atendendo a que duas faces do cubo fazem, com o Plano Horizontal de Projeção, ângulos de 30° (de abertura para a direita), foi possível construir a projeção frontal do quadrado [RSTU], em verdadeira grandeza, pois o plano que contém o quadrado é paralelo ao Plano Frontal de Projeção. Nesse sentido, o lado [RS] (por exemplo, pois não é dada a ordem dos vértices do quadrado) faz um ângulo de 30° (a.d.) com o Plano Horizontal de Projeção, ângulo esse que se projeta em verdadeira grandeza em projeção frontal, o que nos permitiu efetuar a construção da projeção frontal do quadrado – a sua projeção horizontal está sobre o traço horizontal do plano, pois o plano ϕ (o plano que contém o quadrado) é projetante horizontal. Em seguida, determinaram-se as projeções do quadrado [R'S'T'U'], sendo que a sua projeção frontal está coincidente com a projeção frontal do quadrado [RSTU] – a projeção horizontal do quadrado [R'S'T'U'] está sobre o traço horizontal do plano ϕ' , que também é um plano projetante horizontal.

A partir das projeções de todos os vértices do cubo, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é o quadrado [R'S'T'U'], cuja projeção frontal é o quadrado [R'_2S'_2T'_2U'_2]. Em projeção frontal existem quatro vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – todos os vértices da face [RSTU]. Estes, por serem os vértices de **menor afastamento** do cubo, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem. No entanto, todas as arestas que convergem naqueles vértices ou são projetantes frontais ou estão ocultas por arestas visíveis, pelo que não há quaisquer invisibilidades a assinalar em projeção frontal.

O contorno aparente horizontal é a linha fechada [STU'U'T'S'], cuja projeção horizontal é o polígono [S_1T_1U_1U'_1T'_1S'_1]. Em projeção horizontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices R e R', que são os vértices de **menor cota** do cubo. Por isso mesmo, os vértices R e R' são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas [RS] e [RU] (da face [RSTU]) as arestas [R'U'] e [R'T'] (da face [R'S'T'U']) e ainda a aresta [RR']. As arestas [RS], [RU], [R'S'] e [R'U'] estão ocultas por arestas visíveis, pelo que a aresta [RR'] é a única invisibilidade a assinalar, em projeção horizontal.

a) Determinação das projeções da figura da secção:

Os dados permitiram-nos, também, representar o plano α (o plano secante), pelos seus traços, em função dos dados. Analisando a posição do plano secante em relação ao sólido (uma vez que se trata de um plano projetante horizontal), é possível constatar que o plano α (o plano secante) corta duas arestas da face [RSTU] (as arestas [ST] e [RS], nos pontos E e F, respetivamente), a aresta de topo [TT'] (no ponto D), a aresta [RR'] (no ponto C) e ainda duas arestas da face [R'S'T'U'] (as arestas [T'U'] e [R'U'], nos pontos A e B, respetivamente). A **figura da secção** tem, assim, seis vértices – é um hexágono (irregular). As projeções dos seis vértices da secção foram determinados diretamente a partir das respetivas projeções horizontais, pois o plano secante (o plano α) é um plano projetante horizontal.

Os pontos A e B (os pontos em que o plano secante corta as arestas [T'U'] e [R'U'], respetivamente) têm as suas projeções horizontais coincidentes, pois as projeções horizontais daquelas duas arestas também estão coincidentes. De forma idêntica, os pontos E e F (os pontos em que o plano secante corta as arestas [ST] e [RS], respetivamente) também têm as suas projeções horizontais coincidentes, pois as projeções horizontais daquelas duas arestas estão igualmente coincidentes.

A figura da secção é, assim, o hexágono irregular [ABCDEF] que é uma das faces do sólido resultante da secção.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Determinação das projeções do sólido resultante da secção:

A partir de todos os vértices do **sólido resultante da secção** (que é um outro sólido – uma parte do sólido inicial), determinaram-se os seus contornos aparentes. O **sólido resultante da secção** é, no presente caso, um tronco do cubo – o tronco do cubo cuja face de menor afastamento é o polígono [RFETU] e cuja face de maior afastamento é o triângulo [U'AB] (que é, afnal, a parte do sólido compreendida entre o plano secante e o Plano Frontal de Projeção).

O contorno aparente frontal do sólido é a linha fechada [AUBCEFD], cuja projeção frontal é o polígono [A₂U₂B₂C₂E₂F₂D₂]. Em projeção frontal existem quatro vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices **R'**, **T'** e **U'**. Todos estes vértices, por serem três dos vértices de **menor afastamento** do sólido, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem. No entanto, todas as arestas que convergem naqueles vértices ou são projetantes frontais ou estão ocultas por arestas visíveis, pelo que não há quaisquer invisibilidades a assinalar em projeção frontal.

O contorno aparente horizontal é a linha fechada [ADETUU'], cuja projeção horizontal é o polígono [A₁D₁E₁T₁U₁U'₁]. Em projeção horizontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices **C** e **R**, que são os vértices de **menor cota** do sólido. Por isso mesmo, os vértices **C** e **R** são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas [BC] e [CF] (da face [ABCFED]) as arestas [RF] e [RU] (da face [REFTU]) e ainda a aresta [CR]. As arestas [BC], [CF], [RF] e [RU] estão ocultas por arestas visíveis, pelo que a aresta [CR] é a única invisibilidade do sólido a assinalar, em projeção horizontal.

Por outro lado, em projeção frontal, a **figura da secção** é visível (após a desagregação do sólido), pelo que se identificou a área da figura com tracejado. Em projeção horizontal, a **figura da secção** reduz-se a um segmento de reta, pois o plano secante (o plano α) é um plano projetante horizontal. Já em projeção frontal, a **figura da secção** projeta-se deformada, pois o plano que a contém (o plano α) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção.

- b) A **figura da secção** não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pois o plano que contém a figura (o plano secante – o plano α) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo recurso ao rebatimento do plano α (o plano secante) para o Plano Frontal de Projeção. A charneira foi **f_α**, que se identificou imediatamente (reta **e**) – trata-se de uma reta vertical (projetante horizontal). Os planos que contêm os arcos do rebatimento são planos horizontais (de nível) – são planos ortogonais à charneira.

Tendo em conta que os arcos do rebatimento de cada ponto se projetam em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção e que os pontos mantêm as suas cotas ao longo do rebatimento, efetuou-se o rebatimento de cada um dos seis vértices da figura da secção. Após o rebatimento dos seis vértices da figura da secção, desenhou-se o polígono da figura em verdadeira grandeza (em rebatimento), o que se assinalou no desenho.

Traçado:

O eixo **X** representa-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y = Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). Os traços do plano secante (o plano α), porque integram os dados, representaram-se a **médio**. As projeções do cubo, apesar de integrarem igualmente os dados, representaram-se a **leve** pois, nesta situação, são um traçado auxiliar para atingir o objetivo pretendido (que é o sólido resultante da secção). As duas projeções do **sólido resultante da secção** (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. Os traços horizontais dos planos que contêm as faces frontais (de frente), no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que se representaram igualmente a **leve**. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traçados referentes à construção do quadrado). O tracejado que preenche a figura da secção executou-se a **leve**.

158.

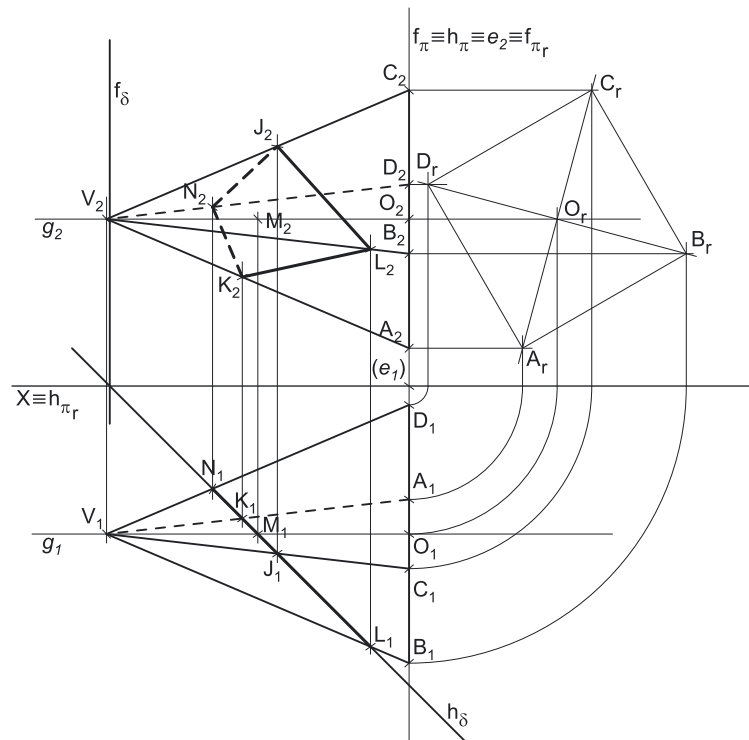
Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **A**, pelas suas projeções, bem como o plano π (o plano de perfil que contém o quadrado [ABCD]), pelos seus traços, em função dos dados. Os traços do plano π passam pelas projeções do ponto **A**, pois o plano π é um plano duplamente projetante.

Resolução:

Determinação das projeções do quadrado [ABCD]:

A base da pirâmide (o quadrado [ABCD]) está contida num plano de perfil, que não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o quadrado não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Por outro lado, o ângulo dado não é um ângulo em projeções – é um **ângulo real** (é o ângulo que o lado [AB] faz com **h_π**), que está contido no plano π e que, por isso, também não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo recurso ao rebatimento do plano π para o Plano Frontal de Projeção. A charneira foi **f_π**, que se identificou imediatamente (reta **e**) – trata-se de uma reta vertical (projetante horizontal). Os planos que contêm os arcos do rebatimento são planos horizontais (de nível) – são planos ortogonais à charneira.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Tendo em conta que os arcos do rebatimento de cada ponto se projetam em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção e que os pontos mantêm as suas cotas ao longo do rebatimento, efetuou-se o rebatimento do ponto **A**, o que nos permitiu determinar **A_r**. Em rebatimento, já é possível medir o ângulo que o lado **[AB]** faz com o Plano Horizontal de Projeção. Assim, a partir de **A_r**, desenhou-se o outro lado do ângulo (a reta suporte do lado **[AB]**, em rebatimento), fazendo um ângulo de 30° com o **h_{πr}**, sendo que, das duas hipóteses, a que o desenho apresenta é a única que nos garante que o ponto **B** tenha cota superior a **A** e o quadrado se situe no espaço do 1.^a Diedro. Sobre a reta suporte do lado **[AB]**, em rebatimento, e a partir de **A_r**, mediram-se os 5 cm e determinou-se **B_r**. A partir de **A_r** e **B_r**, construiu-se o quadrado **[ABCD]** em verdadeira grandeza, em rebatimento (o quadrado **[A_rB_rC_rD_r]**), tendo-se determinado, igualmente, o ponto **O_r** (o centro do quadrado em rebatimento). A importância do ponto **O** tem a ver com o facto de serem pedidas as projeções de uma pirâmide, pois o ponto **O** é desnecessário para o quadrado.

Em seguida, inverteu-se o rebatimento do plano π , o que nos permitiu determinar as projeções dos restantes vértices do quadrado e do ponto **O**. As duas projeções do quadrado reduzem-se a segmentos de reta, pois o plano π é um plano duplamente projetante.

Determinação das projeções da pirâmide:

Trata-se de uma **pirâmide regular**, pelo que o seu eixo é ortogonal ao plano da base, ou seja, está contido numa reta fronto-horizontal. Assim, pelas projeções do ponto **O** conduziram-se as projeções da reta **g**, a reta suporte do eixo da pirâmide. Uma vez que a altura da pirâmide é a distância do vértice ao plano da base, medida ortogonalmente a este, o vértice **V** dista 8 cm (a altura da pirâmide) do plano π . Assim, a altura da pirâmide pode medir-se na reta **g**, que é paralela aos dois planos de projeção – o segmento **[OV]** (o eixo do sólido) projeta-se em verdadeira grandeza em ambas as projeções. Assim, a partir de **O₂** (por exemplo), mediram-se os 8 cm sobre **g₂** (a projeção frontal da reta **g**) e determinou-se **V₂** (a projeção frontal do ponto **V**), sobre **g₂**, o que nos permitiu determinar **V₁** (a projeção horizontal do ponto **V**) sobre **g₁** (a projeção horizontal da reta **g**). Note que se garantiu que o vértice **V** se situa à esquerda do plano da base, como o enunciado pede expressamente.

A partir das projeções de todos os cinco vértices da pirâmide, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é a linha fechada **[ABCV]**, cuja projeção frontal é o polígono **[A₂B₂C₂V₂]**. Em projeção frontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **D**. Este vértice, por ser o vértice de **menor afastamento** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[CD]** e **[AD]**, da base, e a aresta lateral **[DV]**. As arestas **[CD]** e **[AD]** da base estão ocultas por arestas visíveis, pelo que a única invisibilidade a assinalar, em projeção frontal, é a da aresta lateral **[DV]**. Já a aresta lateral **[BV]** é visível em projeção frontal, pois separa duas faces visíveis em projeção frontal (note que **B** é o vértice de maior afastamento da pirâmide).

O contorno aparente horizontal é a linha fechada **[BCDV]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[B₁C₁D₁V₁]**. Em projeção horizontal, existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **A**. Este vértice, por ser o vértice de **menor cota** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AB]** e **[AD]**, da base, e a aresta lateral **[AV]**. As arestas **[AB]** e **[AD]** da base estão ocultas por arestas visíveis, pelo que a única invisibilidade a assinalar, em projeção horizontal, é a da aresta lateral **[AV]**. Já a aresta lateral **[CV]** é visível em projeção horizontal, pois separa duas faces visíveis em projeção horizontal (note que **C** é o vértice de maior cota da pirâmide).

Determinação das projeções da figura da secção:

Em primeiro lugar, determinou-se o ponto **M**, o ponto médio do eixo da pirâmide (o segmento **[OV]**). Em seguida representou-se o plano δ (o plano secante) pelos seus traços, atendendo aos dados e contendo o ponto **M** – o plano δ é um plano projetante horizontal, pelo que **h_δ** (o traço horizontal do plano) tem de passar por **M₁** (a projeção horizontal do ponto **M**).

O plano secante (o plano δ) não é paralelo ao plano da base, pelo que a figura da secção **não** é um polígono semelhante ao quadrado da base. Por outro lado, o plano secante (o plano δ) é um plano projetante horizontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta as quatro arestas laterais do sólido, não cortando nenhuma das arestas da base. Assim, a figura da secção tem **quatro vértices**, pelo que é um **quadrilátero**.

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **quatro vértices da figura da secção**, o que se processou a partir das suas projeções horizontais, pois tratou-se de determinar os pontos de interseção das arestas laterais da pirâmide (que estão contidas em retas não projetantes) com um plano projetante horizontal (o plano δ). A partir das projeções dos quatro vértices da figura da secção, desenharam-se as projeções da figura (o quadrilátero **[JLKN]**).

Em projeção horizontal, a **figura da secção** reduz-se a um segmento de reta, pois o plano secante (o plano δ) é um plano projetante horizontal. Já em projeção frontal, a **figura da secção** projeta-se com deformação, pois o plano que a contém (o plano δ) não é paralelo ao Plano Frontal de Projeção. Por outro lado, atendendo a que não houve a desagregação do sólido (é pedida a **figura da secção** e não o **sólido resultante da secção**), há que representar as eventuais invisibilidades da figura.

Os lados invisíveis da **figura da secção** (em projeção frontal) são os lados da figura que estão contidos nas faces da pirâmide que são invisíveis em projeção frontal – as faces laterais **[ADV]** e **[CDV]**. Assim, os lados **[JN]** e **[KN]** da figura da secção, porque se situam naquelas duas faces (respetivamente), são **invisíveis**, em projeção frontal. Os lados **[JL]** e **[KL]** da **figura da secção** são **visíveis** em projeção frontal, porque se situam em faces visíveis em projeção frontal – as faces **[ABV]** e **[BCV]**, respetivamente.

Uma vez que a **figura da secção**, em projeção horizontal, se reduz a um segmento de reta, não há quaisquer invisibilidades a registar em projeção horizontal.

Traçado:

As projeções da pirâmide e os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. O eixo **X** representou-se igualmente a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. As duas projeções da figura da secção (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são o pedido. Os traços do plano π (o plano que contém a base) representaram-se a **leve** pois, no contexto do exercício, são meramente auxiliares. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traçados necessários à construção do quadrado, nomeadamente os referentes ao rebatimento do plano π).

159.

Dados:

Em primeiro lugar representaram-se os pontos **A** e **C**, pelas respectivas projeções, em função dos dados. Representou-se, ainda, o plano ρ (o plano secante), pelos seus traços.

Resolução:

Determinação das projeções da pirâmide:

A base da pirâmide (o quadrado **[ABCD]**) está contida no Plano Horizontal de Projeção, pelo que está em verdadeira grandeza em projeção horizontal. Assim, a partir de **A**₁ e de **C**₁ efetuou-se a sua construção, em projeção horizontal – a projeção frontal do quadrado situa-se no eixo **X**, pois todos os seus vértices têm cota nula. O ponto **O** é o centro da circunferência circunscrita ao quadrado.

Atendendo a que a aresta lateral **[BV]** é frontal (os seus pontos têm todos o mesmo afastamento) e que a aresta lateral **[AV]** é de perfil (os seus pontos têm todos a mesma abscissa), foi possível determinar a projeção horizontal do ponto **V** (**V**₁). Por outro lado, a pirâmide tem 8 cm de altura (que é a distância do vértice ao plano da base) e a base tem cota nula, pelo que o vértice **V** tem 8 cm de cota (8 + 0 = 8), o que nos permitiu determinar a projeções frontal do vértice **V** (**V**₂). Em seguida, a partir das projeções de todos os cinco vértices da pirâmide, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é a linha fechada **[BADV]**, cuja projeção frontal é o polígono **[B₂A₂D₂V₂]**. Em projeção frontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **C**. Este vértice, por ser o vértice de **menor afastamento** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[BC]** e **[CD]**, da base, e a aresta lateral **[CV]**. No entanto, as arestas **[BC]** e **[CD]** estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis em projeção frontal, pelo que a única invisibilidade a assinalar em projeção frontal é a da aresta lateral **[CV]**. A aresta lateral **[AV]** é visível, por se situar na parte visível do sólido (separa duas faces do sólido que são visíveis em projeção frontal).

O contorno aparente horizontal é o quadrado **[ABCD]**, cuja projeção horizontal é o quadrado **[A₁B₁C₁D₁]**. Em projeção horizontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente horizontal – o vértice **V**. Este, por ser o vértice de **maior cota** da pirâmide, é **visível**, bem como todas as arestas que neles convergem – todas as arestas laterais da pirâmide.

Determinação das projeções da figura da secção:

O plano secante (o plano ρ) é um plano não projetante, pelo que a determinação dos pontos em que o plano secante corta as arestas do sólido não é direta. Nesse sentido, optou-se por recorrer a uma mudança do diedro de projeção de forma a transformar o plano secante num plano projetante. Há que tentar, na mudança do diedro de projeção a efetuar, que se mantenha o plano no qual a base da pirâmide se projeta em verdadeira grandeza, por uma questão de economia de traçados.

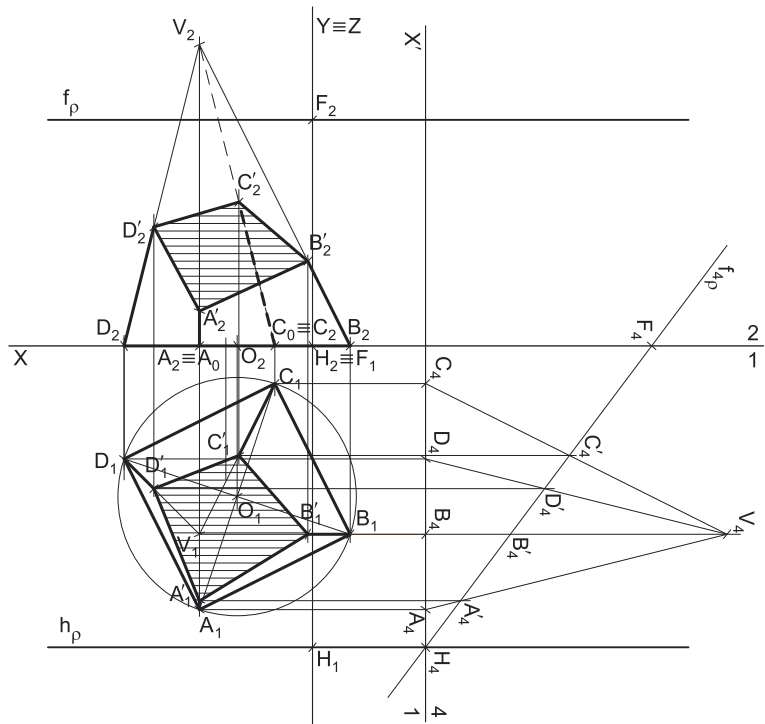
Nesse sentido, é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção por um outro plano (o **plano 4**), que seja ortogonal ao plano ρ , de forma a transformar o plano ρ num plano projetante. Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é ortogonal ao plano ρ , o eixo **X'** é perpendicular ao traço horizontal do plano (**h_p**). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**). **A₄**, **B₄**, **C₄** e **D₄** são as projeções dos pontos **A**, **B**, **C** e **D** no **plano 4** e determinaram-se em função das suas cotas, que se mantiveram – como os pontos têm cota nula, as suas projeções no **plano 4** situam-se no eixo **X'**. **V₄** é a projeção do ponto **V** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de **V₄** ao eixo **X'** é igual à distância de **V₂** ao eixo **X** (que é 8 cm – a cota de **V**). A partir das projeções dos cinco vértices da pirâmide no **plano 4**, desenhou-se a projeção da pirâmide no **plano 4**, atendendo às invisibilidades que se verificam no novo diedro de projeção (a aresta lateral **[BV]** é a única invisibilidade a assinalar).

Em seguida, foi necessário determinar o traço do plano ρ no **plano 4** – **f_{4p}**. Para tal recorreu-se a um ponto qualquer de **f_p** – o ponto **F**. **F₄** é a projeção do ponto **F** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de **F₄** ao eixo **X'** é igual à distância de **F₂** ao eixo **X** (que é 6 cm – a cota de **F**). Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano ρ é um plano projetante frontal, o traço do plano ρ no **plano 4** (**f_{4p}**) está definido por dois pontos – o seu ponto de concorrência com **h_p** (que se situa no eixo **X'**) e **F₄** (a nova projeção frontal do ponto **F**).

No novo diedro de projeção, o plano secante (o plano ρ) é um plano projetante frontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta as quatro arestas laterais do sólido, não cortando a base da pirâmide, pelo que a figura da secção tem **quatro vértices** – é um **quadrilátero**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **quatro vértices** da **figura da secção** no **plano 4**, o que se processou de forma direta pois, no diedro de projeção formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**, o plano ρ (o plano secante) é um plano projetante frontal. Em seguida, determinaram-se as projeções horizontais (no **plano 1**) dos pontos **A', B', C'** e **D'** (os quatro vértices da figura da secção), de forma direta, a partir das suas projeções no **plano 4**.

Por fim, a partir das projeções horizontais daqueles pontos (no **plano 1**), foi possível determinar as suas projeções frontais (no **plano 2**), no diedro de projeção inicial, de forma direta. O ponto **A'** é o ponto em que o plano ρ corta a aresta **[AV]**, pelo que a sua projeção frontal (**A'₂**) se situa sobre a projeção frontal da aresta **[AV]** (**[A₂V₂]**). O ponto **B'** é o ponto em que o plano ρ corta a aresta **[BV]**, pelo que a sua projeção frontal (**B'₂**) se situa sobre a projeção frontal da aresta **[BV]** (**[B₂V₂]**). O ponto **C'** é o ponto em que o plano ρ corta a aresta **[CV]**, pelo que a sua projeção frontal (**C'₂**) se situa sobre a projeção frontal da aresta **[CV]** (**[C₂V₂]**). O ponto **D'** é o ponto em que o plano ρ corta a aresta **[DV]**, pelo que a sua projeção frontal (**D'₂**) se situa sobre a projeção frontal da aresta **[DV]** (**[D₂V₂]**).

A partir das projeções de todos os vértices da figura da secção, foi possível desenhar as suas duas projeções, bem como as projeções do sólido resultante da secção.

Determinação das projeções do sólido resultante da secção:

A partir de todos os vértices do **sólido resultante da secção** (que é um outro sólido – uma parte do sólido inicial), determinaram-se os seus contornos aparentes. O **sólido resultante da secção** é, no presente caso, um tronco de pirâmide – o tronco da pirâmide cuja base é o quadrado **[ABCD]** e cuja face superior é o quadrilátero **[A'B'C'D']** (que é, afinal, a parte do sólido compreendida entre o plano secante e a base).

O contorno aparente frontal é a linha fechada **[BADD'C'B']**, cuja projeção frontal é o polígono **[B₂A₂D₂D'₂C'₂B'₂]**. Em projeção frontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices **C** e **A'**. O vértice **C**, por ser o vértice de **menor afastamento** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[BC]** e **[CD]**, da base, e a aresta **[CC']**. No entanto, as arestas **[BC]** e **[CD]** estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis em projeção frontal, pelo que a única invisibilidade a assinalar em projeção frontal é a da aresta **[CC']**. O vértice **A'**, por ser um dos vértices de **maior afastamento** da pirâmide, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[A'B']**, **[A'D']** e **[AA']**.

O contorno aparente horizontal é o quadrado **[ABCD]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[A₁B₁C₁D₁]**. Em projeção horizontal existem quatro vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices **A', B', C'** e **D'**. Estes vértices, por serem os vértices de **maior cota** do sólido, são **visíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[A'B']**, **[B'C']**, **[C'D']** e **[A'D']**, da face **[A'B'C'D']**, bem como todas as arestas laterais (as arestas **[AA']**, **[BB']**, **[CC']** e **[DD']**).

A **figura da secção**, porque é **visível em ambas as projeções** (a área do corte é visível em ambas as projeções), foi identificada com o recurso a tracejado, paralelamente ao eixo **X** (em ambas as projeções).

Traçado:

O eixo **X** representa-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y = Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). Os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. As projeções da pirâmide, apesar de integrarem igualmente os dados, representaram-se a **leve** pois, nesta situação, são um traçado auxiliar para atingir o objetivo pretendido (o sólido resultante da secção). As duas projeções do **sólido resultante da secção** (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traçados referentes à construção do quadrado ou os traçados relativos à mudança do diedro de projeção). O tracejado que preenche a figura da secção (em ambas as projeções) executou-se a **leve**.

160.

Dados:

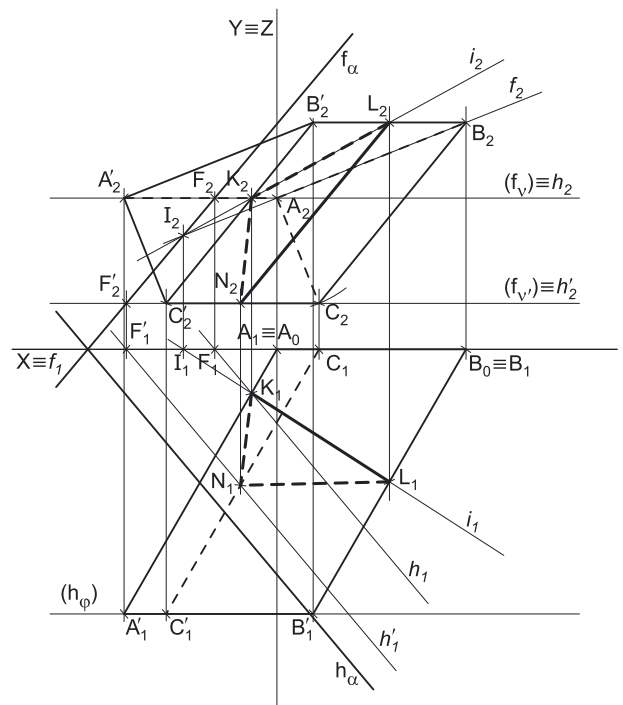
Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Representou-se, ainda, o plano α (o plano secante), pelos seus traços. O plano α tem os seus traços simétricos em relação ao eixo **X**, pois é um plano ortogonal ao $\beta_{1/3}$ (planos ortogonais ao $\beta_{1/3}$ têm os seus traços simétricos em relação ao eixo **X**).

Resolução:

Determinação das projeções do prisma:

A base de menor afastamento do prisma (o triângulo **[ABC]**) está contida no Plano Frontal de Projeção, pelo que está em verdadeira grandeza em projeção frontal. Assim, a partir de **A₂** e de **B₂** efetuou-se a sua construção, em projeção frontal, e atendendo aos dados – o vértice **C**, do triângulo, determinou-se em função do comprimento do lado **[AC]** (que é 3 cm e que está em verdadeira grandeza em projeção frontal). A projeção horizontal do triângulo situa-se no eixo **X**, pois todos os seus vértices têm afastamento nulo.

A altura de um prisma é a distância entre os planos das duas bases. Tendo em conta que a base **[ABC]** está contida no Plano Frontal de Projeção (tem afastamento nulo) e que o prisma tem 7 cm de altura, o plano que contém a base de maior afastamento do sólido e um plano frontal (de frente) com 7 cm de afastamento ($0 + 7 = 7$). Nesse sentido, desenhou-se o traço horizontal do plano φ , o plano frontal (de frente) que contém a outra base do prisma. O plano φ não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, pelas projeções dos três vértices do triângulo conduziram-se as projeções homónimas das retas suporte das respetivas arestas laterais (retas essas que não se identificaram) – os vértices da base de maior afastamento (os pontos **A'**, **B'** e **C'** são os pontos de interseção das retas suporte das respetivas arestas laterais com o plano φ). Os pontos **A**, **B'** e **C'** foram determinados diretamente a partir das respetivas projeções horizontais, pois o plano φ é um plano projetante horizontal. Em seguida, a partir das projeções de todos os seis vértices do prisma, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é a linha fechada **[BCC'A'B']**, cuja projeção frontal é o polígono **[B₂C₂C'₂A'₂B'₂]**. Em projeção frontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **A**. Este vértice, por ser um dos vértices de **menor afastamento** do prisma, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AB]** e **[AC]**, da base de menor afastamento, e a aresta lateral **[AA']**. Por outro lado, a aresta **[B'C']** da base de maior afastamento é **visível** (em projeção frontal), pois separa duas faces visíveis em projeção frontal (os pontos **B'** e **C'** são dois dos vértices de maior afastamento do prisma).

O contorno aparente horizontal é o paralelogramo **[AA'B'B]** (que corresponde à face lateral de maior cota do sólido), cuja projeção horizontal é o paralelogramo **[A₁A'₁B'₁B₁]**. Em projeção horizontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices **C** e **C'**. Estes, por serem os vértices de **menor cota** do prisma, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[AC]** e **[BC]** (da base de menor afastamento), as arestas **[A'C']** e **[B'C']** (da base de maior afastamento) e a aresta lateral **[CC']**. No entanto, as arestas **[AC]**, **[BC]**, **[A'C']** e **[B'C']** estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis em projeção horizontal, pelo que a única invisibilidade a assinalar em projeção horizontal é a da aresta lateral **[CC']**.

Determinação das projeções da figura da secção:

O plano secante (o plano α) é um plano não projetante, pelo que a determinação dos pontos em que o plano secante corta as arestas do sólido não é direta. À semelhança da resolução do exercício anterior, poder-se-ia ter optado por recorrer a uma mudança do diedro de projeção de forma a transformar o plano secante num plano projetante. No entanto, optou-se por resolver o exercício com o recurso ao **método misto**.

Assim, em primeiro lugar averiguou-se se o plano secante (o plano α) corta as bases do prisma. A reta de interseção do plano α (o plano secante) com o plano da base de menor afastamento é $f_\alpha - f'_\alpha$ exterior à base **[ABC]** (não corta a base), pelo que o plano α não corta a base **[ABC]** do prisma. Note que não se determinou a reta de interseção do plano α (o plano secante) com o plano φ (o plano da base de maior afastamento do prisma), com vista a não tornar ainda mais densa a resolução gráfica apresentada. No entanto, caso se tivesse determinado a reta de interseção dos dois planos, constatar-se-ia que essa reta seria exterior à base **[A'B'C']**, pelo que o plano α também não corta a base de maior afastamento do sólido. Assim, o plano cortará, apenas, as arestas laterais do prisma, pelo que a figura da secção terá três vértices – será um triângulo.

Começou-se por determinar o ponto de interseção da aresta lateral **[AA']** com o plano α . Tendo em conta que se trata da interseção entre uma reta não projetante (a reta suporte da aresta **[AA']**) com um plano não projetante (o plano α), é necessário o recurso ao **método geral da interseção de retas com planos**, que se executa em três etapas, a saber: **A**. conduz-se, pela reta, um plano auxiliar que a contenha; **B**. determina-se a reta de interseção do plano auxiliar com o plano dado; **C**. o ponto de concorrência das duas retas é o ponto de interseção da reta dada com o plano dado.

- A**. Assim, conduziu-se, pela aresta lateral **[AA']**, o plano ν , que é o plano projetante frontal da aresta **[AA']**.
- B**. Em seguida, determinou-se a reta de interseção do plano ν (o plano auxiliar) com o plano α – a reta **h**. A reta **h** é a reta de interseção entre os dois planos e está definida por um ponto (o ponto **F**, o seu traço frontal) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano α).
- C**. O ponto em que a reta **h** intersesta a aresta lateral **[AA']** é o ponto em que o plano α corta a aresta lateral **[AA']** – o ponto **K**.

Já temos um ponto da figura da secção – o ponto **K**.

Em seguida, determinou-se o ponto de interseção da aresta lateral **[CC']** com o plano α . Tendo em conta que se trata, mais uma vez, da interseção entre uma reta não projetante (a reta suporte da aresta **[CC']**) com um plano não projetante (o plano α), é necessário, outra vez, o recurso ao **método geral da interseção de retas com planos**, que acima se expôs.

- A**. Assim, conduziu-se, pela aresta lateral **[CC']**, o plano ν' , que é o plano projetante frontal da aresta **[CC']**.
- B**. Em seguida, determinou-se a reta de interseção do plano ν' (o plano auxiliar) com o plano α – a reta **h'**. A reta **h'** é a reta de interseção entre os dois planos e está definida por um ponto (o ponto **F'**, o seu traço frontal) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano α).
- C**. O ponto em que a reta **h'** intersesta a aresta lateral **[CC']** é o ponto em que o plano α corta a aresta lateral **[CC']** – o ponto **N**.

Já temos outro ponto da figura da secção – o ponto **N**.

Em seguida, determinou-se a reta de interseção do plano que contém a face lateral **[AA'B'B]** com o plano secante (o plano α) – a reta **i**. Para definir a reta **i** são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto **K** é um ponto que pertence simultaneamente aos dois planos. O ponto **K** pertence ao plano que contém a face **[AA'B'B]**, pois pertence a uma reta do plano – a reta suporte da aresta **[AA']**. O ponto **K** pertence ao plano α , pois pertence a uma reta do plano – a reta **h**. O ponto **K** é, assim, um ponto que pertence simultaneamente aos dois planos, pelo que já é um ponto da reta de interseção entre os dois planos. Já temos um ponto para definir a reta **i** – o ponto **K**. Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta **i**.

Os dados do exercício são insuficientes para definir a reta **i**, pelo que é necessário o recurso a um plano auxiliar. Recorreu-se ao Plano Frontal de Projeção, como plano auxiliar. Em seguida, determinaram-se as retas de interseção do plano auxiliar (o Plano Frontal de Projeção) com os dois planos. A reta **f** (definida pelos pontos **A** e **B**) é a reta de interseção do Plano Frontal de Projeção com o plano que contém a face lateral **[AA'B'B]**. A reta f_α (o traço frontal do plano α) é a reta de interseção do plano auxiliar (o Plano Frontal de Projeção) com o plano α . As retas **f** e f_α são coplanares (estão, ambas, contidas no Plano Frontal de Projeção) e não são paralelas, pelo que são concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência – o ponto **I**. O ponto **I** é, assim, outro ponto comum aos dois planos (o plano α e o plano que contém a face lateral **[AA'B'B]**) – já temos o ponto que nos faltava. A reta **i** está definida por dois pontos – os pontos **K** e **I**. A reta **i** intersesta a aresta **[BB']** no ponto **L** – o ponto **L** é, assim, outro ponto da figura da secção.

A partir das projeções dos três vértices da figura da secção, desenharam-se as projeções da figura (o triângulo **[KLN]**). Atendendo a que não houve a desagregação do sólido (é pedida a **figura da secção** e não o **sólido resultante da secção**), há que representar as eventuais invisibilidades da figura.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Os lados invisíveis da **figura da secção** (em projeção frontal) são os lados da figura que estão contidos nas faces do prisma que são invisíveis em projeção frontal – as faces laterais [AA'B'B] e [AA'C'C]. Assim, os lados [KN] e [KL] da figura da secção, porque se situam naquelas duas faces (respetivamente), são **invisíveis**, em projeção frontal. O lado [LN] da **figura da secção** é **visível** em projeção frontal, porque se situa numa face visível em projeção frontal – a face [BB'C'C].

Os lados invisíveis da **figura da secção** (em projeção horizontal) são os lados da figura que estão contidos nas faces do prisma que são invisíveis em projeção horizontal – as faces laterais [AA'C'C] e [BB'C'C]. Assim, os lados [KN] e [LN] da figura da secção, porque se situam naquelas duas faces (respetivamente), são **invisíveis**, em projeção horizontal. O lado [KL] da **figura da secção** é **visível** em projeção horizontal, porque se situa numa face visível em projeção horizontal – a face [AA'B'B].

Traçado:

As projeções do prisma e os traços do plano secante (o plano α), porque integram os dados, representaram-se a **médio**. O eixo X representa-se igualmente a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo Y \equiv Z representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O traço horizontal do plano φ (o plano que contém a base de maior afastamento do sólido) representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. As duas projeções da figura da secção (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos planos horizontais e das retas h, h' e i).

161.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos A e B, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Representou-se, ainda, o plano γ (o plano secante), pelos seus traços. O plano γ tem os seus traços coincidentes, pois é um plano ortogonal ao $\beta_{2/4}$ (planos ortogonais ao $\beta_{2/4}$ têm os seus traços coincidentes).

Resolução:

Determinação das projeções do cubo:

A face [ABCD] do cubo está contida no Plano Horizontal de Projeção, pelo que está em verdadeira grandeza em projeção horizontal. Assim, a partir de A_1 e de B_1 efetuou-se a sua construção, em projeção horizontal, e atendendo aos dados – o quadrado tem de se situar no espaço do 1. Diedro). A projeção frontal do quadrado situa-se no eixo X, pois todos os seus vértices têm cota nula.

Uma vez que o cubo tem duas faces horizontais (de nível), as arestas que não pertencem a essas faces são ortogonais a essas faces – são projetantes horizontais. Assim, foi possível de forma imediata, determinar as projeções horizontais dos vértices da face [A'B'C'D'] (a face superior do cubo), que estão coincidentes com as projeções horizontais dos vértices correspondentes da face [ABCD].

Um cubo é um poliedro regular, pelo que todas as suas arestas têm o mesmo comprimento. Nesse sentido, as arestas verticais do cubo têm o mesmo comprimento dos lados do quadrado [ABCD], o que nos permitiu representar o plano v (o plano horizontal que contém a face superior do sólido) pelo seu traço frontal – f_v . O plano v tem traço horizontal, pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis. As projeções frontais dos vértices do quadrado [A'B'C'D'] situam-se sobre o traço frontal do plano v (f_v), pois o plano v é um plano projetante frontal. Em seguida, a partir das projeções dos oito vértices do cubo, desenharam-se os seus contornos aparentes.

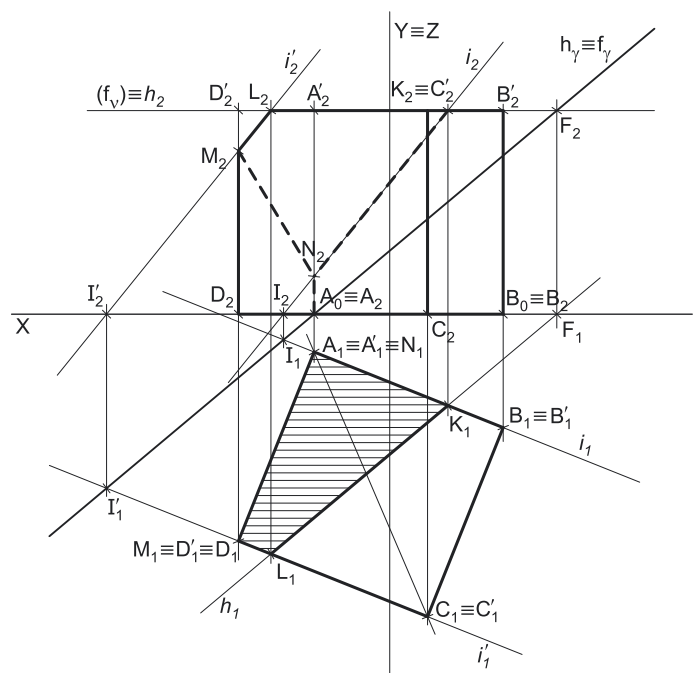
O contorno aparente frontal é a linha fechada [BCDD'C'B'], cuja projeção frontal é o polígono [B₂C₂D₂D'₂C'₂B'₂]. Em projeção frontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices A e A'. Estes vértices, por serem os vértices de **menor afastamento** do cubo, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas [AB] e [AD] (da face inferior), as arestas [A'B'] e [A'D'] (da face superior), e a aresta [AA']. No entanto, as arestas [AB], [AD], [A'B'] e [A'D'] estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis em projeção frontal, pelo que a única invisibilidade a assinalar em projeção frontal é a da aresta [AA']. Por outro lado, a aresta [CC'] é **visível** (em projeção frontal), pois separa duas faces visíveis em projeção frontal (os pontos C e C' são dois dos vértices de maior afastamento do cubo).

O contorno aparente horizontal é o quadrado [A'B'C'D'] (que corresponde à face superior do sólido), cuja projeção horizontal é o quadrado [A'₁B'₁C'₁D'₁]. Em projeção horizontal existem quatro vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices A, B, C e D. Estes, por serem os vértices de **menor cota** do cubo, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que convergem naqueles vértices estão ocultas por arestas visíveis (em projeção horizontal), pelo que, em projeção horizontal, não há quaisquer invisibilidades a assinalar.

Determinação das projeções da figura da secção:

O plano secante (o plano γ) é um plano não projetante, pelo que a determinação dos pontos em que o plano secante corta as arestas do sólido não é direta. Poder-se-ia ter optado por recorrer a uma mudança do diedro de projeção de forma a transformar o plano secante num plano projetante. No entanto, optou-se por resolver o exercício com o recurso ao **método misto**.

Assim, em primeiro lugar averiguou-se se o plano secante (o plano γ) corta as faces horizontais do cubo. A reta de interseção do plano γ com o plano que contém a face inferior do cubo (o Plano Horizontal de Projeção) é $h_\gamma - h_\gamma$, é exterior à face [ABCD] (não corta a face inferior do sólido), pelo que o plano γ não corta a face [ABCD] do cubo.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A reta de interseção do plano γ (o plano secante) com o plano da face superior (o plano v) é a reta i , que está definida por um ponto (o ponto F , o seu traço frontal) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano γ). A reta i corta a face $[A'B'C'D']$, pelo que o plano γ corta a face superior do cubo. O ponto K é o ponto de interseção da reta i com a aresta $[A'B']$ do cubo – o ponto K é, assim, o ponto m que o plano γ corta a aresta $[A'B']$ do cubo. Já temos um ponto da figura da secção – o ponto K . O ponto L é o ponto de interseção da reta i com a aresta $[C'D']$ do cubo – o ponto L é, assim, o ponto m que o plano γ corta a aresta $[C'D']$ do cubo. Já temos outro ponto da figura da secção – o ponto L .

Em seguida, determinou-se a reta de interseção do plano que contém a face lateral $[AA'B'B]$ com o plano secante (o plano γ) – a reta i . Para definir a reta i são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto K é um ponto que pertence simultaneamente aos dois planos. O ponto K pertence ao plano que contém a face $[AA'B'B]$, pois pertence a uma reta do plano – a reta suporte da aresta $[A'B']$. O ponto K pertence ao plano γ , pois pertence a uma reta do plano – a reta h . O ponto K é, assim, um ponto que pertence simultaneamente os dois planos, pelo que já é um ponto da reta de interseção entre os dois planos. Já temos um ponto para definir a reta i – o ponto K . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta i .

Os dados do exercício são insuficientes para definir a reta i , pelo que é necessário o recurso a um plano auxiliar. Recorreu-se ao Plano Horizontal de Projeção, como plano auxiliar. Em seguida, determinaram-se as retas de interseção do plano auxiliar (o Plano Horizontal de Projeção) com os dois planos. A reta AB é a reta de interseção do Plano Horizontal de Projeção com o plano que contém a face lateral $[AA'B'B]$. A reta h_γ (o traço horizontal do plano γ) é a reta de interseção do plano auxiliar (o Plano Horizontal de Projeção) com o plano γ . A reta AB e a reta h_γ são coplanares (estão, ambas, contidas no Plano Horizontal de Projeção) e não são paralelas, pelo que são concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência – o ponto I . O ponto I é, assim, outro ponto comum aos dois planos (o plano γ e o plano que contém a face lateral $[AA'B'B]$) – já temos o ponto que nos faltava. A reta i está definida por dois pontos – os pontos K e I . A reta i interseca a aresta $[AA']$ no ponto N – o ponto N é, assim, outro ponto da figura da secção.

Em seguida, determinou-se a reta de interseção do plano que contém a face lateral $[CC'D'D]$ com o plano secante (o plano γ) – a reta i' . Para definir a reta i' são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O ponto L é um ponto que pertence simultaneamente aos dois planos. O ponto L pertence ao plano que contém a face $[CC'D'D]$, pois pertence a uma reta do plano – a reta suporte da aresta $[C'D']$. O ponto L pertence ao plano γ , pois pertence a uma reta do plano – a reta h . O ponto L é, assim, um ponto que pertence simultaneamente os dois planos, pelo que já é um ponto da reta de interseção entre os dois planos. Já temos um ponto para definir a reta i' – o ponto L . Falta-nos outro ponto ou uma direção para definir a reta i' .

Os dados do exercício são insuficientes para definir a reta i' , pelo que é necessário o recurso a um plano auxiliar. Recorreu-se mais uma vez ao Plano Horizontal de Projeção, como plano auxiliar. Em seguida, determinaram-se as retas de interseção do plano auxiliar (o Plano Horizontal de Projeção) com os dois planos. A reta CD é a reta de interseção do Plano Horizontal de Projeção com o plano que contém a face lateral $[CC'D'D]$. A reta h_γ (o traço horizontal do plano γ) é a reta de interseção do plano auxiliar (o Plano Horizontal de Projeção) com o plano γ . A reta CD e a reta h_γ são coplanares (estão, ambas, contidas no Plano Horizontal de Projeção) e não são paralelas, pelo que são concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência – o ponto I' . O ponto I' é, assim, outro ponto comum aos dois planos (o plano γ e o plano que contém a face lateral $[CC'D'D]$) – já temos o ponto que nos faltava. A reta i' está definida por dois pontos – os pontos L e I' . A reta i' interseca a aresta $[DD']$ no ponto M – o ponto M é, assim, outro ponto da figura da secção.

Já temos quatro pontos da figura da secção – os pontos K , L , M e N . O plano γ não corta nenhuma outra aresta o cubo, pelo que a figura da secção tem apenas quatro vértices – é um quadrilátero. A partir das projeções dos quatro vértices da figura da secção, desenharam-se as projeções da figura (o quadrilátero $[KLMN]$).

Determinação das projeções do sólido resultante da secção:

A partir de todos os vértices do **sólido resultante da secção** (que é um outro sólido – uma parte do sólido inicial), determinaram-se os seus contornos aparentes. O **sólido resultante da secção** é, no presente caso, a parte do cubo cuja face inferior é o quadrado $[ABCD]$ e cuja face superior é o quadrilátero $[KB'C'L]$ (que é, afinal, a parte do sólido compreendida entre o plano secante e o Plano Horizontal de Projeção).

O contorno aparente frontal é a linha fechada $[BCDMLC'B']$, cuja projeção frontal é o polígono $[B_2C_2D_2M_2L_2C'_2B'_2]$. Em projeção frontal existem três vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices A , N e K . Estes vértices, por serem os vértices de **menor afastamento** do cubo, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas $[AB]$ e $[AD]$ (da face inferior), as arestas $[KB]$ e $[KL]$ (da face superior) e as arestas $[AN]$, $[MN]$ e $[NK]$. No entanto, as arestas $[AB]$, $[AD]$, $[KB]$ e $[KL]$ estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis em projeção frontal, pelo que as invisibilidades a assinalar em projeção frontal são as das arestas $[AN]$, $[MN]$ e $[NK]$. Por outro lado, a aresta $[CC']$ é **visível** (em projeção frontal), pois separa duas faces visíveis em projeção frontal (os pontos C e C' são dois dos vértices de maior afastamento do sólido resultante da secção).

O contorno aparente horizontal é a linha fechada $[B'C'LMNK]$, cuja projeção horizontal é o polígono $[B'_1C'_1L_1M_1N_1K_1]$. Em projeção horizontal existem quatro vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices A , B , C e D . Estes vértices, por serem os vértices de **menor cota** do sólido, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem. No entanto, todas as arestas que convergem naqueles vértices estão ocultas por arestas visíveis (em projeção horizontal), pelo que, em projeção horizontal, não há quaisquer invisibilidades a assinalar.

A **figura da secção**, porque é **visível em projeção horizontal** (a área do corte é visível em projeção horizontal), foi identificada com o recurso a tracejado, paralelamente ao eixo X (em projeção horizontal).

Traçado:

O eixo X representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo $Y \equiv Z$ representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). Os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. As projeções do cubo, apesar de integrarem igualmente os dados, representaram-se a **leve** pois, nesta situação, são um traçado auxiliar para atingir o objetivo pretendido (o sólido resultante da secção). O traço frontal do plano v (o plano que contém a face superior do cubo) representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. As duas projeções do **sólido resultante da secção** (o objetivo do exercício) representaram-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso das retas h , i e i'). O tracejado que preenche a figura da secção (em projeção horizontal) executou-se a **leve**.

162.

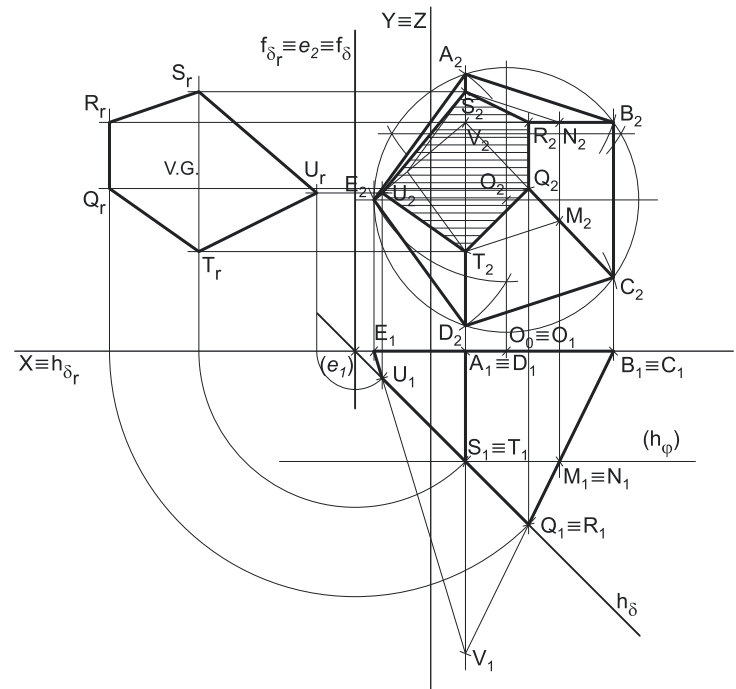
Dados:

Em primeiro lugar representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. Os dados permitiram-nos representar, ainda, o plano δ (o plano secante), pelos seus traços.

Resolução:*Determinação das projeções da pirâmide:*

A base da pirâmide (o pentágono **[ABCDE]**) está contida no Plano Frontal de Projeção, pelo que está em verdadeira grandeza em projeção frontal. Assim, com o compasso, fazendo centro em O_2 e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a projeção frontal da circunferência circunscrita ao pentágono. Em seguida efetuaram-se os traçados necessários à construção da figura, em projeção frontal, atendendo aos dados. O lado **[BC]** é vertical e os pontos **B** e **C** são os vértices mais à direita do polígono, o que nos permitiu determinar a posição da figura. O ponto **A** é o vértice de maior cota do polígono, o que nos permitiu identificar a sequência dos vértices do pentágono. A projeção horizontal do pentágono situa-se no eixo **X**, pois a figura está contida no Plano Frontal de Projeção.

Atendendo a que a aresta lateral **[BV]** é horizontal (os seus pontos têm todos a mesma cota) e que as arestas laterais **[AV]** e **[DV]** são de perfil (os seus pontos têm todos a mesma abscissa), foi possível determinar a projeção frontal do ponto **V** (V_2). Por outro lado, a pirâmide tem 8 cm de altura (que é a distância do vértice ao plano da base) e a base tem afastamento nulo, pelo que o vértice **V** tem 8 cm de afastamento ($8 + 0 = 8$), o que nos permitiu determinar a projeções horizontal do vértice **V** (V_1). Em seguida, a partir das projeções de todos os seis vértices da pirâmide, desenharam-se os seus contornos aparentes.



O contorno aparente frontal é o pentágono **[ABCDE]**, cuja projeção frontal é o pentágono **[A₂B₂C₂D₂E₂]**. Em projeção frontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **V**. Este, por ser o vértice de **maior afastamento** da pirâmide, é **visível**, bem como todas as arestas que neles convergem – todas as arestas laterais da pirâmide.

O contorno aparente horizontal é a linha fechada **[BAEV]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[B₁A₁E₁V₁]**. Em projeção horizontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices **C** e **D**. Estes dois vértices, por serem os vértices de **menor cota** da pirâmide, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[BC]**, **[CD]** e **[DE]**, da base, e as arestas laterais **[CV]** e **[DV]**. No entanto, as arestas **[BC]**, **[CD]** e **[DE]** estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis em projeção horizontal, pelo que as invisibilidades a assinalar em projeção horizontal são as das arestas laterais **[CV]** e **[DV]**. A aresta lateral **[AV]** é visível, por se situar na parte visível do sólido (separa duas faces do sólido que são visíveis em projeção horizontal, além de que **A** é o vértice de maior cota da pirâmide).

a) Determinação das projeções da figura da secção:

O plano secante (o plano δ) não é paralelo ao plano da base, pelo que a figura da secção **não é** um polígono semelhante ao hexágono da base. Por outro lado, o plano secante (o plano δ) é um plano projetante horizontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta as cinco arestas laterais do sólido, não cortando a base. Assim, a figura da secção tem **cinco vértices**, pelo que é um **pentágono** (irregular, pois o plano secante **não é paralelo** ao plano da base).

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **cinco vértices da figura da secção**, o que se processou a partir das suas projeções horizontais, pois tratou-se de determinar os pontos de interseção das arestas laterais da pirâmide (que estão contidas em retas não projetantes) com um plano projetante horizontal (o plano δ). O plano δ corta a aresta lateral **[EV]** no ponto **U**, cujas projeções se determinam imediatamente, a partir da sua projeção horizontal. O plano δ corta as arestas laterais **[BV]** e **[CV]** nos pontos **R** e **Q**, respetivamente – os pontos **R** e **Q** (determinados diretamente a partir das suas projeções horizontais) têm as suas projeções horizontais coincidentes, pois as projeções horizontais das duas arestas a que pertencem (as arestas laterais **[BV]** e **[CV]**) também estão coincidentes.

O plano δ corta as arestas laterais **[AV]** e **[DV]** nos pontos **S** e **T**, respetivamente – os pontos **S** e **T** têm as suas projeções horizontais coincidentes, pois as projeções horizontais das duas arestas a que pertencem (as arestas laterais **[AV]** e **[DV]**) também estão coincidentes. No entanto, as arestas laterais **[AV]** e **[DV]** são arestas de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade** pelo que não é possível determinar, de forma direta, as projeções frontais dos pontos **S** e **T** – os pontos **S** e **T** são, assim, os **pontos «problemáticos»** da secção que o plano δ produz na pirâmide. Nesse sentido, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar (o **rebatimento do plano de perfil** que contém as duas arestas, por exemplo) ou um raciocínio auxiliar (o recurso ao **método dos planos paralelos à base**).

Optou-se pelo recurso ao **método dos planos paralelos à base**. Nesse sentido conduziu-se, pelos pontos **S** e **T**, um plano φ , paralelo ao plano da base (o Plano Frontal de Projeção) – o plano φ é o plano frontal (de frente) que contém os pontos **S** e **T**. A secção produzida pelo plano φ na pirâmide é necessariamente um polígono semelhante ao polígono da base, e com os seus lados paralelos aos lados correspondentes do polígono da base. Assim, desenhou-se parte da secção que o plano φ produz na pirâmide.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O plano φ corta a aresta [BV] no ponto M e corta a aresta [CV] no ponto N. Estes dois pontos foram determinados de forma direta, a partir das suas projeções horizontais. Em seguida, desenhou-se a projeção horizontal de três lados da secção produzida pelo plano φ na pirâmide – os lados dessa secção que têm extremos nos pontos M e N, precisamente. Esses lados são paralelos aos lados correspondentes do pentágono [ABCDE] – os lados [AB], [BC] (o lado vertical do pentágono) e [CD]. O desenho parcial da projeção frontal da figura da secção produzida pelo plano φ na pirâmide (respeitando as situações de paralelismo acima referidas) permitiu-nos determinar as projeções frontais dos pontos S (S_2) e T (T_2), sobre as projeções frontais das arestas a que pertencem.

A partir das projeções dos cinco vértices da figura da secção, desenharam-se as projeções da figura (o pentágono [SUTQR]).

Em projeção horizontal, a **figura da secção** reduz-se a um segmento de reta, pois o plano secante (o plano δ) é um plano projetante horizontal. Já em projeção frontal, a **figura da secção** projeta-se com deformação, pois o plano que a contém (o plano δ) não é paralelo ao Plano Frontal de Projeção.

Determinação das projeções do sólido resultante da secção:

A partir de todos os vértices do **sólido resultante da secção** (que é um outro sólido – uma parte do sólido inicial), determinaram-se os seus contornos aparentes. O **sólido resultante da secção** é, no presente caso, um tronco de pirâmide – o tronco da pirâmide cuja base é o pentágono [ABCDE] e em que uma face é o pentágono (irregular) [SUTQR] (que é, afinal, a parte do sólido compreendida entre o plano secante e o Plano Frontal de Projeção).

O contorno aparente frontal é o pentágono [ABCDE], cuja projeção frontal é o pentágono [A₂B₂C₂D₂E₂]. Em projeção frontal existem cinco vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices S, U, T, Q e R. Estes vértices, por serem os vértices de **maior afastamento** do sólido, são **visíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas [SU], [UT], [TQ], [QR] e [SR], da face [SUTQR], bem como todas as arestas laterais (as arestas [AS], [EU], [DT], [CQ] e [BR]).

O contorno aparente horizontal é a linha fechada [BAEUSR], cuja projeção horizontal é o polígono [B₁A₁E₁U₁S₁R₁]. Em projeção horizontal existem quatro vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices C, D, Q e T. Estes vértices, por serem os vértices de **menor cota** do sólido, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas [TU], [QT] e [RT] (da face [RSUTQ]), as arestas [DE], [CD] e [BC] (da base), e as arestas laterais [DT] e [CQ]. No entanto, todas estas arestas estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis em projeção horizontal, pelo que, em projeção horizontal, não há quaisquer invisibilidades a assinalar.

A **figura da secção**, porque **é visível em projeção frontal** (a área do corte é visível em projeção frontal), foi identificada com o recurso a tracejado, paralelamente ao eixo X (em projeção frontal).

- b) O plano que contém a figura da secção (o plano secante – o plano δ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que a figura da secção não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções. Assim, para determinar a verdadeira grandeza da figura da secção é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano secante (o plano que contém a figura da secção) para o Plano Frontal de Projeção. A charneira foi f_8 , que se identificou imediatamente (reta e) – trata-se de uma reta vertical (projetante horizontal). Os planos que contêm os arcos do rebatimento são planos horizontais (de nível) – são planos ortogonais à charneira. Tendo em conta que os arcos do rebatimento de cada ponto se projetam em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção e que os pontos mantêm as suas cotas ao longo do rebatimento, efetuou-se o rebatimento de cada um dos vértices da figura da secção, o que nos permitiu desenhar o pentágono [Q₁R₁S₁U₁T₁], que é a figura da secção em verdadeira grandeza (em rebatimento), o que se assinalou convenientemente no desenho.

Traçado:

O eixo X representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo Y = Z representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). Os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. As projeções da pirâmide, apesar de integrarem igualmente os dados, representaram-se a **leve** pois, nesta situação, são um traçado auxiliar para atingir o objetivo pretendido (o sólido resultante da secção). As duas projeções do **sólido resultante da secção** (um dos objetivos do exercício) representaram-se a **forte**, pois são parte do pedido. A verdadeira grandeza da figura da secção, que é a outra parte do pedido (outro dos objetivos do exercício) representou-se igualmente a **forte**. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traçados referentes à construção do pentágono, os traçados relativos à determinação dos pontos «problemáticos» da secção ou, ainda, os referentes à determinação da verdadeira grandeza da figura da secção). O tracejado que preenche a figura da secção (em projeção frontal) executou-se a **leve**.

163.

Dados:

Em primeiro, lugar representaram-se os pontos **O** e **A**, pelas respectivas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano v , o plano horizontal (de nível) que contém a base da pirâmide, pelo seu traço frontal. O plano v não tem traço horizontal, pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis. Os dados permitiram-nos representar, ainda, o plano δ (o plano secante), pelos seus traços.

Resolução:*Determinação das projeções da pirâmide:*

A base da pirâmide (o hexágono **[ABCDEF]**) está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que se projeta em verdadeira grandeza em projeção horizontal. Assim, com o compasso, fazendo centro em O_1 e raio até A_1 , desenhou-se a projeção horizontal da circunferência circunscrita ao hexágono. Em seguida, efetuaram-se os traçados necessários à construção da figura, em projeção horizontal. A projeção frontal do hexágono situa-se no traço frontal do plano v (f_v), pois o plano v é um plano projetante frontal.

Trata-se de uma **pirâmide regular**, pelo que o seu eixo está contido numa reta ortogonal ao plano da base, que é uma reta vertical (projetante horizontal) – tem-se, imediatamente, $O_1 \equiv V_1$. Por outro lado, o vértice da pirâmide tem cota nula, pelo que se situa no Plano Horizontal de Projeção – a sua projeção frontal (V_2) situa-se no eixo **X**. Em seguida, a partir das projeções de todos os sete vértices da pirâmide, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é a linha fechada **[CDEV]**, cuja projeção frontal é o polígono **[C₂D₂E₂V₂]**. Em projeção frontal existem três vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices **B**, **A** e **F**. Estes três vértices, por serem os vértices de **menor afastamento** da pirâmide, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[BC]**, **[AB]**, **[AF]** e **[EF]**, da base, e as arestas laterais **[BV]**, **[AV]** e **[FV]**. No entanto, todas estas arestas estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis em projeção frontal, pelo que, em projeção frontal, não há quaisquer invisibilidades a assinalar.

O contorno aparente horizontal é o hexágono **[ABCDEF]**, cuja projeção horizontal é o hexágono **[A₁B₁C₁D₁E₁F₁]**. Em projeção horizontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **V**. Este, por ser o vértice de **menor cota** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que neles convergem – todas as arestas laterais da pirâmide são invisíveis, em projeção horizontal.

Determinação das projeções da figura da secção:

O plano secante (o plano δ) não é paralelo ao plano da base, pelo que a figura da secção **não** é um polígono semelhante ao hexágono da base. Por outro lado, o plano secante (o plano δ) é um plano projetante horizontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta três arestas laterais do sólido, cortando a base em outras duas arestas. Assim, a figura da secção tem **cinco vértices**, pelo que é um **pentágono** (irregular, pois o plano secante **não** é paralelo ao plano da base).

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **cinco vértices** da **figura da secção**, o que se processou a partir das suas projeções horizontais, pois tratou-se de determinar os pontos de interseção das arestas laterais da pirâmide (que estão contidas em retas não projetantes) com um plano projetante horizontal (o plano δ). O plano δ corta a aresta **[AB]**, da base, no ponto **U**, cujas projeções se determinam imediatamente, a partir da sua projeção horizontal. O plano δ corta a aresta **[DE]** da base no ponto **Q**, cujas projeções se determinam imediatamente, a partir da sua projeção horizontal. O plano δ corta a aresta lateral **[BV]** no ponto **T**, cujas projeções se determinam imediatamente, a partir da sua projeção horizontal. O plano δ corta a aresta lateral **[CV]** no ponto **S**, cujas projeções se determinam imediatamente, a partir da sua projeção horizontal.

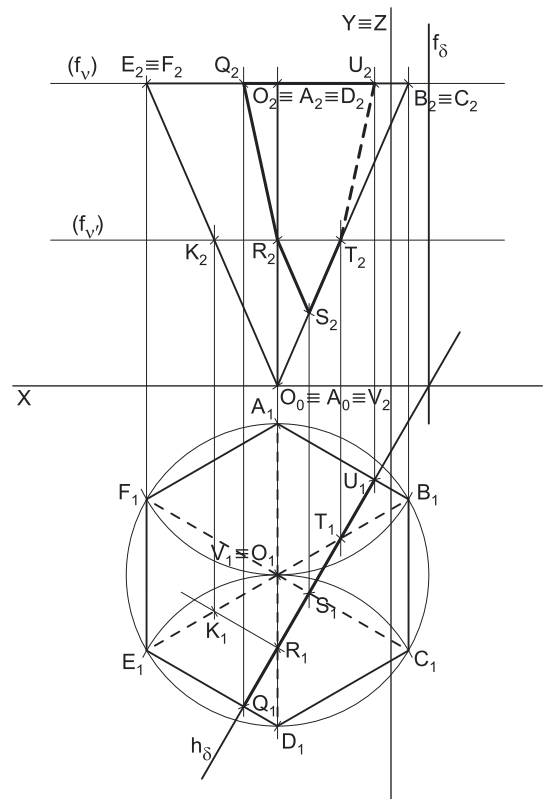
O plano δ corta a aresta lateral **[DV]** no ponto **R** – no entanto, a aresta lateral **[DV]** é uma aresta de perfil, cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade** pelo que não é possível determinar, de forma direta, a projeção frontal do ponto **R**. O ponto **R** é, assim, um **ponto «problemático»** da secção que o plano δ produz na pirâmide. Nesse sentido, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar (o **rebatimento do plano de perfil** que contém a aresta **[DV]**, por exemplo) ou um raciocínio auxiliar (o recurso ao **método dos planos paralelos à base**).

Optou-se pelo recurso ao **método dos planos paralelos à base**. Acontece que a base está contida num plano horizontal (de nível) e um plano paralelo ao plano da base que contenha o ponto **R** é, também ele, um plano horizontal (de nível), que é um plano projetante frontal. No entanto, o problema reside, precisamente, na determinação da projeção frontal do ponto **R**, ou seja, na determinação da cota do ponto **R**. Ainda assim, é possível recorrer ao **método dos planos paralelos à base**, mas por ordem inversa. Consideremos o plano v' , o plano horizontal (de nível) paralelo ao plano v e que contém o ponto **R**. Sabe-se que a secção produzida por esse plano será necessariamente um polígono semelhante ao polígono da base, e com os seus lados paralelos aos lados correspondentes do polígono da base. Assim, desenhou-se parte da secção que o plano v' produz na pirâmide (apesar de não se saber a sua cota).

O plano v' corta a aresta **[DV]** no ponto **R** e corta a face **[DEV]** segundo um segmento de reta paralelo ao lado **[DE]** da base. Assim, é possível conduzir, por R_1 (a projeção horizontal do ponto **R**), uma paralela a **[D₁E₁]**, que é a projeção horizontal de um dos lados da figura da secção que o plano v' produz na pirâmide. Esse lado apoia-se na aresta lateral **[EV]** no ponto **K** – o ponto **K** é, assim, o ponto em que o plano v' corta a aresta lateral **[EV]**. O ponto **K** foi determinado a partir da sua projeção horizontal (K_1) e a sua projeção frontal (K_2) situa-se na projeção frontal da aresta lateral **[EV]**. O ponto **K** é um outro ponto da secção que o plano v' produz na pirâmide, pelo que já é possível desenhar o traço frontal do plano v' (já se sabe a cota do plano v') – assim, por K_2 conduziu-se $f_{v'}$ (o traço frontal do plano v'), pois o plano v' é um plano projetante frontal.

Em seguida, foi possível determinar a projeção frontal do ponto **R** (R_2), sobre o traço frontal do plano v' ($f_{v'}$) e sobre a projeção frontal da aresta **[DV]** (de perfil). A partir das projeções dos cinco vértices da figura da secção, desenharam-se as projeções da figura (o pentágono **[QRSTU]**).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Em projeção horizontal, a **figura da secção** reduz-se a um segmento de reta, pois o plano secante (o plano δ) é um plano projetante horizontal. Já em projeção frontal, a **figura da secção** projeta-se com deformação, pois o plano que a contém (o plano δ) não é paralelo ao Plano Frontal de Projeção. Por outro lado, atendendo a que não houve a desagregação do sólido (é pedida a **figura da secção** e não o **sólido resultante da secção**), há que representar as eventuais invisibilidades da figura.

Os lados invisíveis da **figura da secção** (em projeção frontal) são os lados da figura que estão contidos nas faces da pirâmide que são invisíveis em projeção frontal – a face lateral [ABV]. Assim, o lado [TU] da figura da secção, porque se situa naquela face, é **invisível**, em projeção frontal. Os lados [QR] e [RS] da **figura da secção** são **visíveis** em projeção frontal, porque se situam em faces visíveis em projeção frontal – as faces [DEV] e [CDV], respetivamente. Por fim, os lados [ST] e [QU] da figura da secção, apesar de se situarem em faces invisíveis em projeção frontal (a face [BCV] e a base [ABCDEF], respetivamente), não são propriamente invisíveis, pois aquelas faces são projetantes frontais – dessa forma, as invisibilidades existentes da figura da secção estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis.

Uma vez que a **figura da secção**, em projeção horizontal, se reduz a um segmento de reta, não há quaisquer invisibilidades a registar em projeção horizontal.

Traçado:

As projeções da pirâmide e os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. O eixo **X** representou-se igualmente a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y = Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). As duas projeções da figura da secção (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são o pedido. O traço frontal do plano v (o plano que contém a base) representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traçados necessários à construção do hexágono da base ou, ainda, o traçados necessários à determinação do **ponto «problemático»** da secção – o traço frontal do plano v' e o lado [KR] da figura da secção por ele produzida na pirâmide).

164.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **O** e **V**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Representou-se, também, o plano α , o plano secante, pelos seus traços (em função dos dados).

Resolução:

Determinação das projeções do cone:

A base do cone está contida no Plano Horizontal de Projeção, pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção. Assim, com o compasso, fazendo centro em **O₁** (a projeção horizontal do ponto **O**) e com 3 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal da base. A projeção frontal da circunferência é um segmento de reta sobre o eixo **X** (a base tem afastamento nulo).

Em seguida, desenharam-se a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido (que é um triângulo com um vértice em **V₂** e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor abscissa da projeção frontal da base) e a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do cone. O desenho da **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido processou-se com o recurso à construção necessária para determinar as retas tangentes à circunferência (a projeção horizontal da base) que passam por um ponto exterior (**V₁**). O arco menor da circunferência que delimita a base (e que está compreendido entre as duas geratrizes do contorno aparente horizontal) é **invisível** em projeção horizontal, o que se assinalou devidamente no desenho.

Identificação do tipo de secção produzida:

Pretende-se identificar a curva (a **cónica**) resultante da secção produzida pelo plano α no cone. Para tal há que recorrer ao **método geral para a identificação da figura da secção**, que se executa em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice do cone, um plano paralelo ao plano secante; **2.** determina-se a reta de interseção desse plano auxiliar (paralelo ao plano secante) com o plano da base; **3.** analisa-se a posição da reta secante e relação à base do cone.

1. Conduziu-se, pelo vértice do cone (o ponto **V**) um plano paralelo ao plano secante (o plano α). O plano δ é o plano paralelo ao plano α que se conduziu pelo vértice **V** do cone. O plano δ é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal (**h_δ**) passa por **V₁** (a projeção horizontal do ponto **V**). Por outro lado, os traços do plano δ (que são duas retas concorrentes do plano δ) são paralelos aos traços homónimos do plano α (que são duas retas concorrentes do plano α), para que se verifique o **Critério de paralelismo entre planos**.

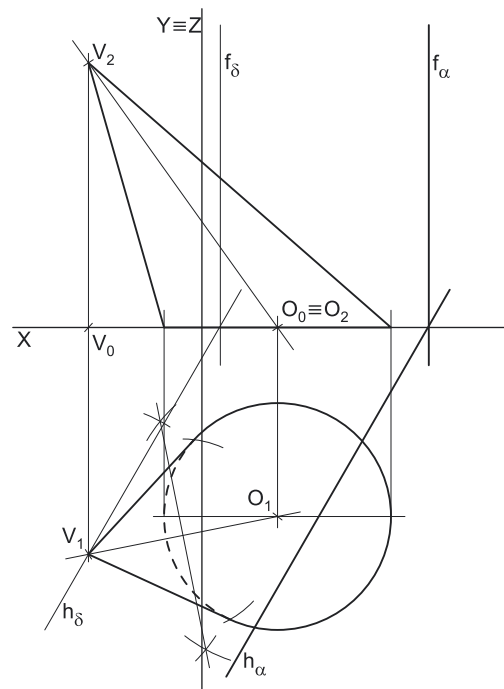
2. Determinou-se a reta de interseção do plano δ com o plano da base do cone. A base do cone está contida no Plano Horizontal de Projeção, pelo que a reta de interseção do plano δ com o plano da base do cone e o próprio traço horizontal do plano δ (**h_δ**).

3. Analisa-se a posição da reta de interseção em relação à base do cone. A reta de interseção (**h_δ**) é exterior à base do cone, pelo que a secção produzida no cone pelo plano α é uma **elipse** (ou um **segmento de elipse**).

Tendo em conta que o plano α corta a base do cone, a secção produzida pelo plano α no cone é efetivamente um **segmento de elipse**.

Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y = Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). As projeções do cone e os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se igualmente a **médio**. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traçados necessários à determinação do contorno aparente horizontal do cone e dos traços do plano δ , o plano paralelo ao plano α que passa pelo vértice do sólido).



165.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto **O** e a reta **h** (a reta suporte do eixo do cone) pelas respectivas projeções, em função dos dados. Os dados permitiram-nos representar, ainda, o plano φ , o plano frontal (de frente) que contém a base do cone. O plano φ é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal (h_φ) passa pela projeção horizontal do ponto **O** (O_1). Por outro lado, o plano φ não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal se identificou com o recurso a parêntesis. Por fim, representou-se, também, o plano α , o plano secante, pelos seus traços

Resolução:*Determinação das projeções do cone:*

A base do cone está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pelo que se projeta em verdadeira grandeza em projeção frontal. Assim, com o compasso, fazendo centro em O_2 (a projeção frontal do ponto **O**) e com 3 cm de raio, desenhou-se a projeção frontal da base do sólido. A projeção horizontal da circunferência é um segmento de reta sobre h_φ .

A altura de um cone é a distância do vértice ao plano da base, medida ortogonalmente a este. Assim, tendo em conta que a base do cone tem 2 cm de afastamento (o afastamento do ponto **O**) e que o cone tem 6 cm de altura, constata-se que o ponto **V** (o vértice do cone) tem 8 cm de afastamento ($2 + 6 = 8$). Nesse sentido, o ponto **V** é o ponto da reta **h** que tem 8 cm de afastamento, o que nos permitiu determinar as projeções do ponto **V**, sobre as projeções homónimas da reta **h**.

Em seguida, desenharam-se a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido (que é um triângulo com um vértice em V_1 e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor abscissa da projeção horizontal da base) e a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do cone. O desenho da **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido processou-se com o recurso à construção necessária para determinar as retas tangentes à circunferência (a projeção frontal da base) que passam por um ponto exterior (V_2). O arco menor da circunferência que delimita a base (e que está compreendido entre as duas geratrizes do contorno aparente frontal) é **invisível** em projeção frontal, o que se assinalou devidamente no desenho.

Identificação do tipo de secção produzida:

Pretende-se identificar a curva (a **cónica**) resultante da secção produzida pelo plano α no cone. Para tal há que recorrer ao **método geral para a identificação da figura da secção**, que se executa em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice do cone, um plano paralelo ao plano secante; **2.** determina-se a reta de interseção desse plano auxiliar (paralelo ao plano secante) com o plano da base; **3.** analisa-se a posição da reta secante e relação à base do cone.

1. Conduziu-se, pelo vértice do cone (o ponto **V**) um plano paralelo ao plano secante (o plano α). O plano θ é o plano paralelo ao plano α que se conduziu pelo vértice **V** do cone. O plano θ é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal (h_θ) passa por V_1 (a projeção horizontal do ponto **V**). Por outro lado, os traços do plano θ (que são duas retas concorrentes do plano θ) são paralelos aos traços homónimos do plano α (que são duas retas concorrentes do plano α), para que se verifique o **Critério de paralelismo entre planos**.

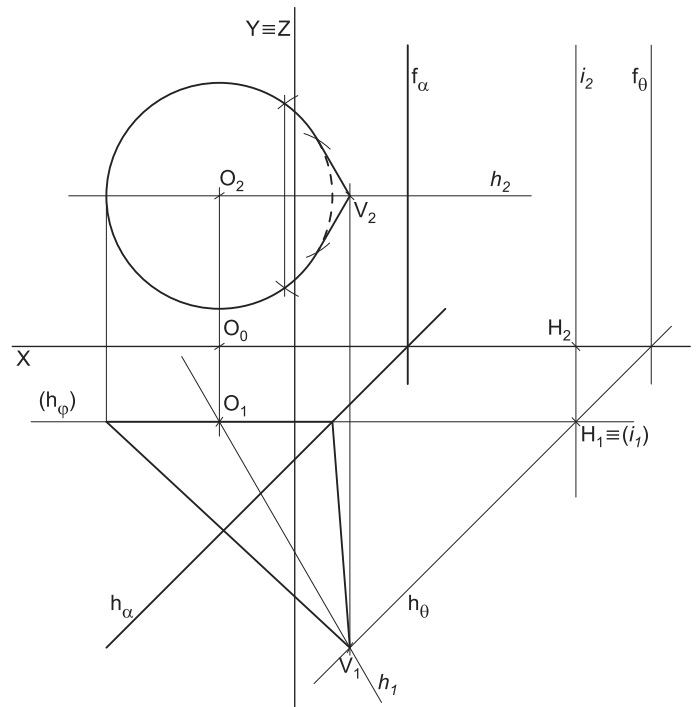
2. Determinou-se a reta de interseção do plano θ com o plano da base do cone (o plano φ) – a reta **i**. Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta **i** é a reta de interseção entre dois planos projetantes horizontais (o plano θ e o plano φ), pelo que a reta **i** é necessariamente uma reta projetante horizontal (uma reta vertical) – já temos uma direção para definir a reta **i**. Falta-nos um ponto para definir a reta **i**. A reta **i** pertence aos dois planos, pelo que o seu traço horizontal tem de pertencer simultaneamente aos traços horizontais dos dois planos – o ponto **H** (o traço horizontal da reta **i**) é, assim, o ponto de interseção entre os traços horizontais dos dois planos. Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta **i**. A reta **i** está, assim, definida por um ponto (o ponto **H**) e por uma direção (é uma reta projetante horizontal).

3. Analisa-se a posição da reta de interseção em relação à base do cone. A reta **i** é exterior à base do cone, pelo que a secção produzida no cone pelo plano α é uma **elipse** (ou um **segmento de elipse**).

Tendo em conta que o plano α corta a base do cone num único ponto, a secção produzida pelo plano α no cone é efetivamente uma **elipse**.

Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y \equiv Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). As projeções do cone e os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se igualmente a **médio**. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso da reta **h**, dos traçados necessários à determinação do contorno aparente frontal do cone e dos traços do plano θ , o plano paralelo ao plano α que passa pelo vértice do sólido).



166.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **O** e **V**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Os dados permitiram-nos representar, ainda, o plano v , o plano horizontal (de nível) que contém a base do cone. O plano v é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal (f_v) passa pela projeção frontal do ponto **O** (O_2). Por outro lado, o plano v não tem traço horizontal, pelo que o seu traço frontal se identificou com o recurso a parêntesis. Por fim representou-se, também, o plano θ , o plano secante, pelos seus traços (em função dos dados).

Resolução:

Determinação das projeções do cone:

A base do cone está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que se projeta em verdadeira grandeza em projeção horizontal. Assim, com o compasso, fazendo centro em O_1 (a projeção horizontal do ponto **O**) e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal da base do sólido. A projeção frontal da circunferência é um segmento de reta sobre f_v .

Em seguida, desenharam-se a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido (que é um triângulo com um vértice em V_2 e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor abcissa da projeção frontal da base) e a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do cone (que é a circunferência que delimita a base).

A **determinação da figura da secção produzida no cone** pelo plano θ , deve processar-se seguindo uma sequência de etapas, que em seguida se apresentam:

1. Identificar o tipo de secção (ou cônica) produzida pelo plano secante no sólido.
2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes do sólido.
3. Determinar o **espaço útil** para o recurso aos planos paralelos à base.
4. Recorrer a planos paralelos ao plano da base, de forma a obter o número necessário de pontos para um desenho relativamente preciso da curva.

1. Identificação do tipo de secção (ou cônica) produzida pelo plano secante no sólido.

Para identificar a curva (a **cônica**) resultante da secção produzida pelo plano θ no cone há que recorrer ao **método geral para a identificação da figura da secção**, que se executa em três etapas, a saber: **A.** conduz-se, pelo vértice do cone, um plano paralelo ao plano secante; **B.** determina-se a reta de interseção desse plano auxiliar (paralelo ao plano secante) com o plano da base; **C.** analisa-se a posição da reta secante e relação à base do cone.

A. Conduziu-se, pelo vértice do cone (o ponto **V**) um plano paralelo ao plano secante (o plano θ). O plano θ' é o plano paralelo ao plano θ que se conduziu pelo vértice **V** do cone. O plano θ' é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ($f_{\theta'}$) passa por V_2 (a projeção frontal do ponto **V**). Por outro lado, os traços do plano θ' (que são duas retas concorrentes do plano θ') são paralelos aos traços homónimos do plano θ (que são duas retas concorrentes do plano θ), para que se verifique o **CrITÉrio de paralelismo entre planos**.

B. Determinou-se a reta de interseção do plano θ' com o plano da base do cone (o plano v) – a reta i . Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta i é a reta de interseção entre dois planos projetantes frontais (o plano θ' e o plano v) – já temos uma direção para definir a reta i . Falta-nos um ponto para definir a reta i . A reta i pertence aos dois planos, pelo que o seu traço frontal tem de pertencer simultaneamente aos traços frontais dos dois planos – o ponto **F** (o traço frontal da reta i) é, assim, o ponto de interseção entre os traços frontais dos dois planos. Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta i . A reta i está, assim, definida por um ponto (o ponto **F**) e por uma direção (é uma reta projetante frontal).

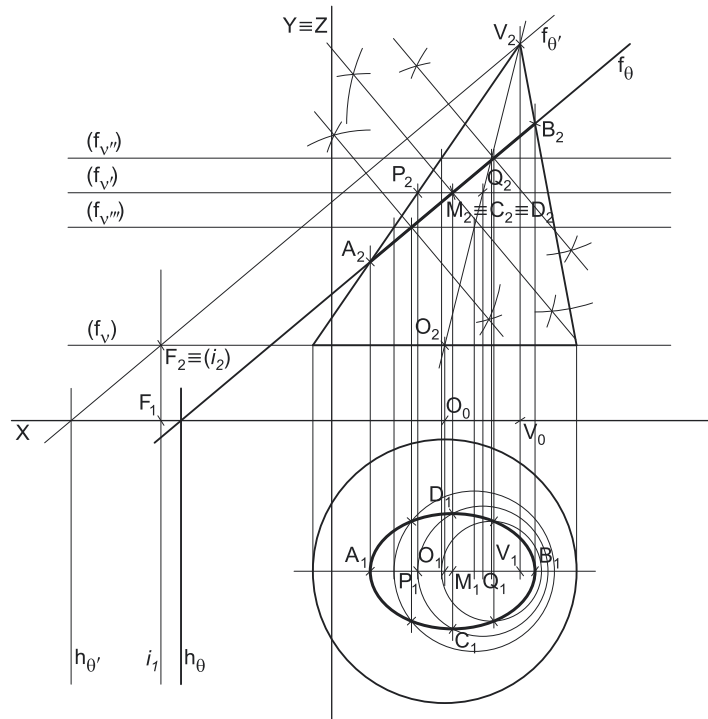
C. Analisa-se a posição da reta de interseção em relação à base do cone. A reta i é exterior à base do cone, pelo que a secção produzida no cone pelo plano θ é uma **elipse** (ou um **segmento de elipse**). Tendo em conta que o plano θ não corta a base do cone, a secção produzida pelo plano θ no cone é efetivamente uma **elipse**, cujo desenho à mão livre requer, no mínimo, **oito pontos**.

Tendo em conta que uma **elipse** é considerada uma **curva de erro** (uma curva não rigorosa, por oposição à circunferência), o seu desenho (à mão livre) de uma forma relativamente precisa requer um mínimo de **oito pontos**.

2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes do sólido.

Tendo em conta que o plano θ é um plano projetante frontal, a determinação dos pontos em que o plano corta os contornos aparentes é direta.

O plano θ corta o **contorno aparente frontal** nas suas duas geratrizes.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O plano θ corta a geratriz mais à esquerda do contorno aparente frontal no ponto **A** – as projeções do ponto **A** situam-se sobre as projeções homónimas dessa geratriz. As projeções da geratriz mais à esquerda da geratriz do contorno aparente frontal estão definidas pelas projeções do vértice **V**, do cone, e pelas projeções do ponto mais à esquerda da circunferência que delimita a base (e que não se identificou). Note que a projeção horizontal desta geratriz coincide com o diâmetro fronto-horizontal da circunferência.

O plano θ corta a geratriz mais à direita do contorno aparente frontal no ponto **B** – as projeções do ponto **B** situam-se sobre as projeções homónimas dessa geratriz. As projeções da geratriz mais à direita do contorno aparente frontal estão definidas pelas projeções do vértice **V**, do cone, e pelas projeções do ponto mais à direita da circunferência que delimita a base (e que não se identificou). Note que a projeção horizontal desta geratriz coincide com o diâmetro fronto-horizontal da circunferência.

O plano θ não corta o **contorno aparente horizontal**, o que é possível constatar a partir da projeção frontal da circunferência.

Conclui-se que o plano θ corta os contornos aparentes do cone em dois pontos apenas – os pontos **A** e **B**. Já temos **dois pontos** da figura da secção (da elipse).

3. Determinar o **espaço útil** para o recurso aos planos paralelos à base.

Tendo em conta que a base do cone está contida num plano horizontal (de nível), o recurso a planos paralelos à base refere-se ao recurso a planos horizontais (de nível). Estes têm de ser introduzidos no **espaço útil** da secção que é, precisamente, o espaço entre os **pontos de maior e de menor cota da secção** (porque os planos paralelos à base são planos horizontais). Tenha em conta que qualquer plano horizontal (de nível) introduzido fora deste **espaço útil** não nos permitirá determinar qualquer ponto da secção, precisamente porque não existe secção fora desse **espaço útil**.

Tendo em conta que o plano θ (o plano secante) é um plano projetante frontal, é possível constatar, de forma imediata, que o ponto **A** é o **ponto de menor cota** da secção e que **B** é o **ponto de maior cota** da secção (o que não seria possível garantir, caso o plano não fosse projetante frontal). Assim, o **espaço útil** é o espaço compreendido entre os pontos **A** e **B**.

Por outro lado, **nesta situação**, o segmento **[AB]** é, imediatamente, o **eixo maior** da elipse.

4. Recorrer a planos paralelos ao plano da base, de forma a obter o número necessário de pontos para um desenho relativamente preciso da curva.

Tendo em conta que o segmento **[AB]** é o eixo maior da elipse, o primeiro plano auxiliar (paralelo ao plano da base) a que se deverá recorrer deve ser um plano que passe pelo ponto médio do segmento **[AB]** – o ponto **M**. Note que o ponto **M** se determinou com o recurso à mediatriz do segmento **[A₂B₂]** (a projeção frontal do segmento **[AB]**).

Assim, pelo ponto **M** conduziu-se o primeiro plano horizontal (de nível) – o plano v' . Este plano, porque é paralelo ao plano da base, produz, no cone, uma secção circular. O centro desse círculo é o ponto **Q**, que é o ponto em que o plano v' interseca o eixo do cone. O raio desse círculo é a distância do ponto **Q** ao ponto de interseção de uma qualquer geratriz do cone com o plano v' . Assim, determinou-se o ponto **P**, que é o ponto em que o plano v' corta a geratriz mais à esquerda do contorno aparente frontal do cone. Os pontos **Q** e **P** foram determinados diretamente, a partir das suas projeções frontais, pois o plano v' é um plano projetante frontal. O círculo com centro no ponto **Q** raio **QP** é a secção que o plano v' produz no cone (que se projeta em verdadeira grandeza em projeção horizontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em **Q₁** (a projeção horizontal do ponto **Q**) e com raio **Q₁P₁**, desenhou-se a circunferência que delimita a projeção horizontal do círculo.

Em seguida, determinou-se a reta de interseção do plano v' (o plano auxiliar) com o plano θ (o plano secante), que é uma reta de topo (uma reta projetante frontal), cujas projeções não se identificaram. Os pontos em que esta reta corta a circunferência são mais dois pontos da secção – os pontos **C** e **D**. Estes pontos foram determinados a partir das suas projeções horizontais – as suas projeções frontais (**C₂** e **D₂**) situam-se sobre o traço frontal do plano v' , pois o plano v' é um plano projetante frontal. O segmento **[CD]** é, **nesta situação**, o eixo menor da elipse. Já temos mais dois pontos da secção, o que perfaz um total de **quatro pontos**.

O processo atrás exposto para a determinação dos pontos **C** e **D** repetiu-se mais duas vezes.

Determinou-se o ponto médio do segmento **[MB]** (com o recurso à sua mediatriz), pelo qual se conduziu o segundo plano auxiliar – o plano v'' . Em seguida, determinou-se a secção que esse plano produz no cone, de forma semelhante à exposta anteriormente. Por fim, determinou-se a reta de interseção do plano v'' com o plano θ e a interseção entre as duas figuras (a reta e a circunferência) permitiu-nos determinar mais dois pontos da secção. Já temos **seis pontos** da secção. Note que se omitiram todas as notações referentes aos pontos sucessivamente determinados, de forma a não sobrecarregar em demasia a resolução gráfica apresentada.

Por fim, determinou-se o ponto médio do segmento **[AM]** (com o recurso à sua mediatriz), pelo qual se conduziu o terceiro plano auxiliar – o plano v''' . Em seguida, determinou-se a secção que esse plano produz no cone, bem como a reta de interseção do plano v''' com o plano θ – a interseção entre as duas figuras (a reta e a circunferência) permitiu-nos determinar mais dois pontos da secção. Já temos os **oito pontos** necessários ao desenho relativamente preciso da curva da secção. Note que, mais uma vez, se omitiram todas as notações referentes aos pontos sucessivamente determinados, de forma a não sobrecarregar em demasia a resolução gráfica apresentada.

A partir dos **oito pontos** já determinados, desenharam-se as duas projeções da **figura da secção**. A projeção horizontal da elipse é uma outra elipse, que passa pelas projeções horizontais dos dois pontos determinados, e cujo eixo maior é o segmento **[A₁B₁]** e cujo eixo menor é o segmento **[C₁D₁]** – o desenho da curva é relativamente preciso, a partir dos oito pontos determinados. A projeção frontal da elipse reduz-se a um segmento de reta sobre **f₀** (o traço frontal do plano θ), pois o plano θ (o plano secante) é um plano projetante frontal. A figura da secção é **visível** em projeção horizontal, na sua totalidade.

Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y** \equiv **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). As projeções do cone e os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se igualmente a **médio**. As duas projeções da figura da secção (o objetivo do exercício) representaram-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traços do plano θ' , dos planos horizontais auxiliares, ou, ainda, das secções circulares produzidas por aqueles no cone).

167.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. Os dados permitiram-nos representar, ainda, o plano α (o plano secante) pelos seus traços.

Resolução:

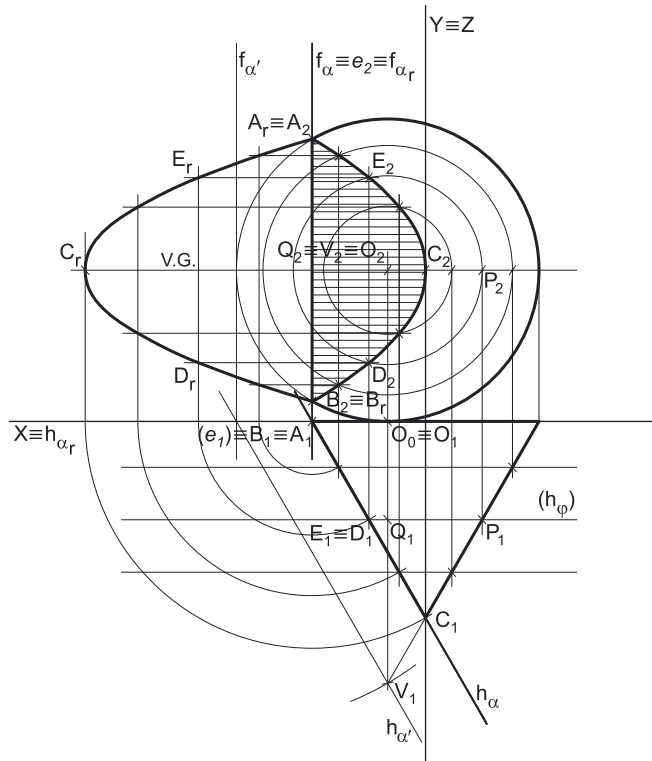
Determinação das projeções do cone:

A base do cone está contida no Plano Frontal de Projeção, pelo que está em verdadeira grandeza em projeção frontal. Assim, com o compasso, fazendo centro em O_2 (a projeção frontal do ponto **O**), desenhou-se a projeção frontal da base do sólido, tangente ao eixo **X** (o que significa que tem 4 cm de raio). A projeção horizontal da base situa-se no eixo **X** (é um segmento de reta sobre o eixo **X**).

Trata-se de um **cone de revolução**, pelo que o eixo do cone está contido numa reta ortogonal ao plano da base, ou seja, numa reta de topo (uma reta projetante frontal) – assim, tem-se imediatamente $V_2 \equiv O_2$ (os dois pontos situam-se na mesma projetante frontal).

Tendo em conta que as geratrizes do cone medem 8 cm, e que todas as geratrizes têm o mesmo comprimento (por se tratar de um cone de revolução), as geratrizes que se projetam em verdadeira grandeza em projeção horizontal são as geratrizes horizontais (de nível), ou seja, as geratrizes do contorno aparente horizontal (as geratrizes que contêm pelos pontos de maior e de menor abcissa da base). Assim, com o compasso, fazendo centro na projeção horizontal do ponto de maior abcissa da circunferência (que não se identificou) e com 8 cm de raio (o comprimento das geratrizes), desenhou-se um arco de circunferência, que nos permitiu determinar V_1 (a projeção horizontal do ponto **V**), na linha de chamada de V_2 .

Em seguida, desenharam-se a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido (que é um triângulo com um vértice em V_1 e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor abcissa da projeção horizontal da base) e a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do cone (que é a própria circunferência que delimita a base).



A **determinação da figura da secção produzida no cone** pelo plano α , deve processar-se seguindo uma sequência de etapas, que em seguida se apresentam:

1. Identificar o tipo de secção (ou cónica) produzida pelo plano α .
2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes do sólido.
3. Determinar o **espaço útil** para o recurso aos planos paralelos à base.
4. Recorrer a planos paralelos ao plano da base, de forma a obter o número necessário de pontos para um desenho relativamente preciso da curva.

1. Identificação do tipo de secção (ou cónica) produzida pelo plano secante no sólido.

Para identificar a curva (a **cónica**) resultante da secção produzida pelo plano α no cone há que recorrer ao **método geral para a identificação da figura da secção**, que se executa em três etapas, a saber: **A.** conduz-se, pelo vértice do cone, um plano paralelo ao plano secante; **B.** determina-se a reta de interseção desse plano auxiliar (paralelo ao plano secante) com o plano da base; **C.** analisa-se a posição da reta secante e relação à base do cone.

A. Conduziu-se, pelo vértice do cone (o ponto **V**) um plano paralelo ao plano secante (o plano α). O plano α' é o plano paralelo ao plano α que se conduziu pelo vértice **V** do cone. O plano α' é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ($h_{\alpha'}$) passa por V_1 (a projeção horizontal do ponto **V**). Por outro lado, os traços do plano α' (que são duas retas concorrentes do plano α') são paralelos aos traços homónimos do plano α (que são duas retas concorrentes do plano α), para que se verifique o **critério de paralelismo entre planos**.

B. Determinou-se a reta de interseção do plano α' com o plano da base do cone (o Plano Frontal de Projeção), que é o próprio traço frontal do plano α' – $f_{\alpha'}$.

C. Analisa-se a posição da reta de interseção em relação à base do cone. A reta $f_{\alpha'}$ é tangente à base do cone, pelo que a secção produzida no cone pelo plano α é uma **parábola**.

Tendo em conta que uma **parábola** é considerada uma **curva de erro** (uma curva não rigorosa, por oposição à circunferência), o seu desenho (à mão livre) de uma forma relativamente precisa requer um mínimo de **oito pontos**.

2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes do sólido.

Tendo em conta que o plano α é um plano projetante horizontal, a determinação dos pontos em que o plano corta os contornos aparentes é direta.

O plano α corta o **contorno aparente frontal** (a circunferência que delimita a base) em dois pontos – os pontos **A** e **B**.

O plano α corta o **contorno aparente horizontal** em três pontos – os pontos **A** e **B** (os pontos em que o plano α corta a base do cone) e o ponto **C** (o ponto em que o plano α corta a geratriz mais à direita do contorno aparente horizontal).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O plano α corta a geratriz mais à direita do contorno aparente horizontal no ponto **C** – as projeções do ponto **C** situam-se sobre as projeções homónimas dessa geratriz. As projeções da geratriz mais à direita do contorno aparente horizontal estão definidas pelas projeções do vértice **V**, do cone, e pelas projeções do ponto mais à direita da circunferência que delimita a base (e que não se identificou). Note que a projeção frontal desta geratriz coincide com o diâmetro fronto-horizontal da circunferência.

Conclui-se que o plano α corta os contornos aparentes do cone em três pontos – os pontos **A**, **B** e **C**. Já temos **três pontos** da figura da secção (da parábola).

3. Determinar o **espaço útil** para o recurso aos planos paralelos à base.

Tendo em conta que a base do cone está contida no Plano Frontal de Projeção, o recurso a planos paralelos à base refere-se ao recurso a planos frontais (de frente). Estes têm de ser introduzidos no **espaço útil** da secção que é, precisamente, o espaço entre os **pontos de maior e de menor afastamento da secção** (porque os planos paralelos à base são planos frontais). Tenha em conta que qualquer plano frontal (de frente) introduzido fora deste **espaço útil** não nos permitirá determinar qualquer ponto da secção, precisamente porque não existe secção fora desse **espaço útil**.

Tendo em conta que o plano α (o plano secante) é um plano projetante horizontal, é possível constatar, de forma imediata, que os pontos **A** e **B** (que se situam na base do cone) são os **pontos de menor afastamento** da secção e que **C** é o **ponto de maior afastamento** da secção (o que não seria possível garantir, caso o plano não fosse projetante horizontal). Assim, o **espaço útil** é o espaço compreendido entre a base (onde se situam os pontos **A** e **B**) e o ponto **C**.

4. Recorrer a planos paralelos ao plano da base, de forma a obter o número necessário de pontos para um desenho relativamente preciso da curva.

O recurso a planos paralelos ao plano da base deve garantir que os pontos que eles nos permitem determinar estão distribuídos uniformemente pelo **espaço útil**, precisamente para garantir que o desenho da curva (à mão livre) se processe de uma forma o mais precisa possível. Assim, localizou-se o primeiro plano frontal (de frente) a que se recorreu (o plano φ) de forma a estar equidistante da base e do ponto **C** (o que se garantiu em projeção horizontal).

O plano φ , porque é paralelo ao plano da base, produz, no cone, uma secção circular. O centro desse círculo é o ponto **Q**, que é o ponto em que o plano φ intersesta o eixo do cone. O raio desse círculo é a distância do ponto **Q** ao ponto de interseção de uma qualquer geratriz do cone com o plano φ . Assim, determinou-se o ponto **P**, que é o ponto em que o plano φ corta a geratriz mais à direita do contorno aparente horizontal do cone. Os pontos **Q** e **P** foram determinados diretamente, a partir das suas projeções horizontais, pois o plano φ é um plano projetante horizontal. O círculo com centro no ponto **Q** raio \overline{QP} é a secção que o plano φ produz no cone (que se projeta em verdadeira grandeza em projeção frontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em **Q₂** (a projeção frontal do ponto **Q**) e com raio $\overline{Q_2P_2}$, desenhou-se a circunferência que delimita a projeção frontal do círculo.

Em seguida, determinou-se a reta de interseção do plano φ (o plano auxiliar) com o plano α (o plano secante), que é uma reta vertical (uma reta projetante horizontal), cujas projeções não se identificaram. Os pontos em que esta reta corta a circunferência são mais dois pontos da secção – os pontos **D** e **E**. Estes pontos foram determinados a partir das suas projeções frontais – as suas projeções horizontais (**D₁** e **E₁**) situam-se sobre o traço horizontal do plano φ , pois o plano φ é um plano projetante horizontal. Já temos mais dois pontos da secção, o que perfaz um total de **cinco pontos**.

O processo atrás exposto para a determinação dos pontos **D** e **E** repetiu-se mais duas vezes.

Recorreu-se a um outro plano frontal (de frente) equidistante da base e do plano φ . Em seguida, determinou-se a secção que esse plano produz no cone, de forma semelhante à exposta anteriormente. Por fim, determinou-se a reta de interseção desse plano com o plano α e a interseção entre as duas figuras (a reta e a circunferência) permitiu-nos determinar mais dois pontos da secção. Já temos **sete pontos** da secção. Note que se omitiram todas as notações referentes aos pontos sucessivamente determinados, de forma a não sobrecarregar em demasia a resolução gráfica apresentada.

Por fim, recorreu-se a um outro plano frontal (de frente) equidistante do plano φ e do ponto **C**. Em seguida, determinou-se a secção que esse plano produz no cone, bem como a reta de interseção desse plano com o plano α – a interseção entre as duas figuras (a reta e a circunferência) permitiu-nos determinar mais dois pontos da secção. Já temos **nove pontos** para um desenho relativamente preciso da curva da secção. Note que, mais uma vez, se omitiram todas as notações referentes aos pontos sucessivamente determinados, de forma a não sobrecarregar em demasia a resolução gráfica apresentada.

A partir dos **nove pontos** já determinados, desenharam-se as duas projeções da **figura da secção**. A projeção frontal da parábola é uma outra parábola, cujo desenho é relativamente preciso, a partir dos nove pontos determinados. A projeção horizontal da parábola reduz-se a um segmento de reta sobre h_x (o traço horizontal do plano α), pois o plano α (o plano secante) é um plano projetante horizontal. A figura da secção é **visível** em projeção frontal, na sua totalidade.

Determinação das projeções do sólido resultante da secção.

Em seguida, desenharam-se as projeções do **sólido resultante da secção** (que é um outro sólido – uma parte do sólido inicial), começando pelos seus contornos aparentes. O **sólido resultante da secção** é, no presente caso, a parte do cone compreendida entre o plano secante e o Plano Frontal de Projeção (o plano da base).

A **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** é um triângulo com um vértice em **C₁**, o outro vértice em **A₁** e o outro vértice na projeção horizontal do ponto mais à direita da base. A **projeção frontal do contorno aparente frontal** é uma linha mista fechada limitada, à esquerda, pelo segmento **[A₂B₂]** e pelo arco maior **A₂B₂** da projeção frontal da base.

A **figura da secção**, porque é visível em projeção frontal (a área do corte é visível em projeção frontal), foi identificada com o recurso a tracejado, paralelamente ao eixo **X** (em projeção frontal).

Determinação da verdadeira grandeza da figura da secção.

O plano que contém a figura da secção (o plano secante – o plano α) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que a figura da secção não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções (a parábola está deformada tanto em projeção frontal como em projeção horizontal). Assim, para determinar a verdadeira grandeza da figura da secção é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Optou-se pelo rebatimento do plano secante (o plano que contém a figura da secção) para o Plano Frontal de Projeção. A charneira foi f_{α} , que se identificou imediatamente (reta e) – trata-se de uma reta vertical (projetante horizontal). Os pontos A e B são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se imediatamente $A_r \equiv A_2$ e $B_r \equiv B_2$. Os planos que contêm os arcos do rebatimento são planos horizontais (de nível) – são planos ortogonais à charneira. Tendo em conta que os arcos do rebatimento de cada ponto se projetam em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção e que os pontos mantêm as suas cotas ao longo do rebatimento, efetuou-se o rebatimento de cada um dos pontos da figura da secção, o que nos permitiu desenhar a curva (com extremos em A_r e B_r) em verdadeira grandeza (em rebatimento).

Traçado:

O eixo X representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo $Y \equiv Z$ representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). Os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. As projeções do cone, apesar de integrarem igualmente os dados, representaram-se a **leve** pois, nesta situação, são um traçado auxiliar para atingir o objetivo pretendido (o sólido resultante da secção). As duas projeções do **sólido resultante da secção** (um dos objetivos do exercício) representaram-se a **forte**, pois são parte do pedido. A verdadeira grandeza da figura da secção, que é a outra parte do pedido (outro dos objetivos do exercício) representou-se igualmente a **forte**. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traços do plano α' , dos planos frontais auxiliares, ou, ainda, das projeções frontais das secções circulares produzidas por aqueles no cone).

168.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos O e V , pelas respetivas projeções, em função dos dados. Em seguida representou-se o plano φ , o plano frontal (de frente) que contém a base do cone, pelo seu traço horizontal. O traço horizontal do plano φ (h_{φ}) passa pela projeção horizontal do ponto O (O_1), pois o plano φ é um plano projetante horizontal. O plano φ não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis. Os dados permitiram-nos representar, ainda, o plano π (o plano secante) pelos seus traços.

Resolução:

Determinação das projeções do cone:

A base do cone está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pelo que se projeta em verdadeira grandeza em projeção frontal. Assim, com o compasso, fazendo centro em O_2 (a projeção frontal do ponto O) e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a projeção frontal da base do sólido. A projeção horizontal da circunferência é um segmento de reta sobre h_{φ} .

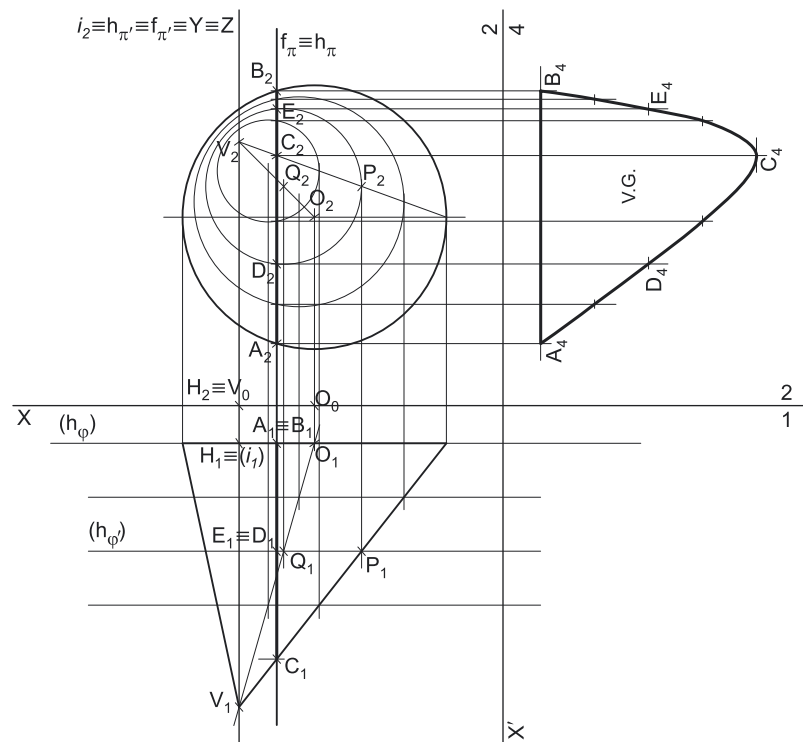
Em seguida, desenharam-se a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido (que é um triângulo com um vértice em V_1 e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor abscissa da projeção horizontal da base) e a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do cone (que é a projeção frontal da circunferência que delimita a base).

A **determinação da figura da secção produzida no cone** pelo plano π , deve processar-se seguindo uma sequência de etapas, que em seguida se apresentam:

1. Identificar o tipo de secção (ou cónica) produzida pelo plano secante no sólido.
2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes do sólido.
3. Determinar o **espaço útil** para o recurso aos planos paralelos à base.
4. Recorrer a planos paralelos ao plano da base, de forma a obter o número necessário de pontos para um desenho relativamente preciso da curva.

1. Identificação do tipo de secção (ou cónica) produzida pelo plano secante no sólido.

Para identificar a curva (a **cónica**) resultante da secção produzida pelo plano π no cone há que recorrer ao **método geral para a identificação da figura da secção**, que se executa em três etapas, a saber: **A.** conduz-se, pelo vértice do cone, um plano paralelo ao plano secante; **B.** determina-se a reta de interseção desse plano auxiliar (paralelo ao plano secante) com o plano da base; **C.** analisa-se a posição da reta secante e relação à base do cone.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A. Conduziu-se, pelo vértice do cone (o ponto **V**) um plano paralelo ao plano secante (o plano π). O plano π' é o plano paralelo ao plano π que se conduziu pelo vértice **V** do cone. O plano π' é um plano duplamente projetante, pelo que os seus traços passam pelas projeções homónimas do ponto **V**. O plano π' é um outro plano de perfil.

B. Determinou-se a reta de interseção do plano π' com o plano da base do cone (o plano φ) – a reta **i**. Para definir uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta **i** é a reta de interseção entre dois planos projetantes horizontais (o plano π' e o plano φ), pelo que a reta **i** é necessariamente uma reta projetante horizontal (uma reta vertical) – já temos uma direção para definir a reta **i**. Falta-nos um ponto para definir a reta **i**. A reta **i** pertence aos dois planos, pelo que o seu traço horizontal tem de pertencer simultaneamente aos traços horizontais dos dois planos – o ponto **H** (o traço horizontal da reta **i**) é, assim, o ponto de interseção entre os traços horizontais dos dois planos. Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta **i**. A reta **i** está, assim, definida por um ponto (o ponto **H**) e por uma direção (é uma reta projetante horizontal).

C. Analisa-se a posição da reta de interseção em relação à base do cone. A reta **i** é secante à base do cone, pelo que a secção produzida no cone pelo plano π é uma **hipérbole** (ou, mais concretamente, **um ramo da hipérbole**, pois o sólido é limitado por uma única folha da superfície cónica).

Tendo em conta que o plano π (o plano secante) é um plano duplamente projetante, sabe-se imediatamente que as duas projeções da figura de secção se reduzem a segmentos de reta, sobre os traços correspondentes do plano π (que é um plano duplamente projetante). No entanto, e porque é pedida a **verdadeira grandeza da figura da secção**, será necessário desenhar a curva (em verdadeira grandeza) o que se processa com um mínimo de **oito dos seus pontos**, por se tratar de uma **curva de erro** (uma curva não rigorosa, por oposição à circunferência).

2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes do sólido.

Tendo em conta que o plano π é um plano duplamente projetante, a determinação dos pontos em que o plano corta os contornos aparentes é direta.

O plano π corta o **contorno aparente frontal** (a circunferência que delimita a base) em dois pontos – os pontos **A** e **B**.

O plano π corta o **contorno aparente horizontal** em três pontos – os pontos **A** e **B** (os pontos em que o plano π corta a base do cone) e o ponto **C** (o ponto em que o plano π corta a geratriz mais à direita do contorno aparente horizontal).

O plano π corta a geratriz mais à direita do contorno aparente horizontal no ponto **C** – as projeções do ponto **C** situam-se sobre as projeções homónimas dessa geratriz. As projeções da geratriz mais à direita do contorno aparente horizontal estão definidas pelas projeções do vértice **V**, do cone, e pelas projeções do ponto mais à direita da circunferência que delimita a base (e que não se identificou). Ao contrário das situações anteriores (em que uma projeção da geratriz coincidia com um diâmetro da base previamente desenhado), nesta situação foi necessário desenhar efetivamente a projeção frontal da geratriz mais à direita do contorno aparente horizontal, para se determinar a projeção frontal do ponto **C** (**C₂**).

Conclui-se que o plano π corta os contornos aparentes do cone em três pontos – os pontos **A**, **B** e **C**. Já temos **três pontos** da figura da secção (da hipérbole).

3. Determinar o espaço útil para o recurso aos planos paralelos à base.

Tendo em conta que a base do cone está contida num plano frontal (de frente), o recurso a planos paralelos à base refere-se ao recurso a planos frontais (de frente). Estes têm de ser introduzidos no **espaço útil** da secção que é, precisamente, o espaço entre os **pontos de maior e de menor afastamento da secção** (porque os planos paralelos à base são planos frontais). Tenha em conta que qualquer plano frontal (de frente) introduzido fora deste **espaço útil** não nos permitirá determinar qualquer ponto da secção, precisamente porque não existe secção fora desse **espaço útil**.

Tendo em conta que o plano π (o plano secante) é um plano projetante horizontal (por ser duplamente projetante), é possível constatar, de forma imediata, que os pontos **A** e **B** (que se situam na base do cone) são os **pontos de menor afastamento** da secção e que **C** é o **ponto de maior afastamento** da secção (o que não seria possível garantir, caso o plano não fosse projetante horizontal). Assim, o **espaço útil** é o espaço compreendido entre a base (onde se situam os pontos **A** e **B**) e o ponto **C**.

4. Recorrer a planos paralelos ao plano da base, de forma a obter o número necessário de pontos para um desenho relativamente preciso da curva.

O recurso a planos paralelos ao plano da base deve garantir que os pontos que eles nos permitem determinar estão distribuídos uniformemente pelo **espaço útil**, precisamente para garantir que o desenho da curva (à mão livre) se processe de uma forma o mais precisa possível. Assim, localizou-se o primeiro plano frontal (de frente) a que se recorreu (o plano φ') de forma a estar equidistante da base (do plano φ) e do ponto **C** (o que se garantiu em projeção horizontal).

O plano φ' , porque é paralelo ao plano da base, produz, no cone, uma secção circular. O centro desse círculo é o ponto **Q**, que é o ponto em que o plano φ' intersecta o eixo do cone. O raio desse círculo é a distância do ponto **Q** ao ponto de interseção de uma qualquer geratriz do cone com o plano φ' . Assim, determinou-se o ponto **P**, que é o ponto em que o plano φ' corta a geratriz mais à direita do contorno aparente horizontal do cone. Os pontos **Q** e **P** foram determinados diretamente, a partir das suas projeções horizontais, pois o plano φ' é um plano projetante horizontal. O círculo com centro no ponto **Q** raio **QP** é a secção que o plano φ' produz no cone (que se projeta em verdadeira grandeza em projeção frontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em **Q₂** (a projeção frontal do ponto **Q**) e com raio **Q₂P₂**, desenhou-se a circunferência que delimita a projeção frontal do círculo.

Em seguida, determinou-se a reta de interseção do plano φ' (o plano auxiliar) com o plano π (o plano secante), que é uma reta vertical (uma reta projetante horizontal), cujas projeções não se identificaram. Os pontos em que esta reta corta a circunferência são mais dois pontos da secção – os pontos **D** e **E**. Estes pontos foram determinados a partir das suas projeções frontais – as suas projeções horizontais (**D₁** e **E₁**) situam-se sobre o traço horizontal do plano φ' , pois o plano φ' é um plano projetante horizontal. Já temos mais dois pontos da secção, o que perfaz um total de **cinco pontos**.

O processo atrás exposto para a determinação dos pontos **D** e **E** repetiu-se mais duas vezes.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Recorreu-se a um outro plano frontal (de frente) equidistante da base (do plano φ) e do plano φ' . Em seguida, determinou-se a secção que esse plano produz no cone, de forma semelhante à exposta anteriormente. Por fim, determinou-se a reta de interseção desse plano com o plano π e a interseção entre as duas figuras (a reta e a circunferência) permitiu-nos determinar mais dois pontos da secção. Já temos **sete pontos** da secção. Note que se omitiram todas as notações referentes aos pontos sucessivamente determinados, de forma a não sobrecarregar em demasia a resolução gráfica apresentada.

Por fim, recorreu-se a um outro plano frontal (de frente) equidistante do plano φ' e do ponto **C**. Em seguida, determinou-se a secção que esse plano produz no cone, bem como a reta de interseção desse plano com o plano π – a interseção entre as duas figuras (a reta e a circunferência) permitiu-nos determinar mais dois pontos da secção. Já temos **nove pontos** para um desenho relativamente preciso da curva da secção. Note que, mais uma vez, se omitiram todas as notações referentes aos pontos sucessivamente determinados, de forma a não sobrecarregar em demasia a resolução gráfica apresentada.

Sublinha-se que a importância dos **nove pontos** determinados não tem a ver com a determinação das **projeções da figura da secção** (que são dois segmentos de reta, pois o plano secante é um plano duplamente projetante) mas, sim, a com a determinação da **verdadeira grandeza da figura da secção**.

Determinação da verdadeira grandeza da figura da secção.

O plano que contém a figura da secção (o plano secante – o plano π) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que a figura da secção não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções (a hipérbole apresenta a deformação máxima tanto em projeção frontal como em projeção horizontal). Assim, para determinar a verdadeira grandeza da figura da secção é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo recurso a uma mudança do diedro de projeção.

Nesse sentido, substituiu-se o Plano Horizontal de Projeção por um outro plano (o **plano 4**), paralelo ao plano π , de forma a transformar o plano π num plano horizontal (de nível). Nesse sentido, foi criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Frontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções frontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções horizontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se os afastamentos** (que estão referenciados ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se as cotas** (que estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 2** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **4/2**. Como o **plano 4** é paralelo ao plano π , o eixo **X'** é paralelo ao traço frontal do plano (f_π). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**).

A₄ é a projeção do ponto **A** no **plano 4** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de **A₄** ao eixo **X'** é igual à distância de **A₁** ao eixo **X** (que é 1 cm – o afastamento de **A**). **B₄** é a projeção do ponto **B** no **plano 4** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de **B₄** ao eixo **X'** é igual à distância de **B₁** ao eixo **X** (que é 1 cm – o afastamento de **B**). **C₄** é a projeção do ponto **C** no **plano 4** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de **C₄** ao eixo **X'** é igual à distância de **C₁** ao eixo **X**. O procedimento exposto para os pontos **A**, **B** e **C** repetiu-se para os restantes seis pontos da secção (os pontos não identificados), o que nos permitiu um desenho relativamente preciso da parábola (à mão livre).

Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y** \equiv **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). As projeções do cone e os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se igualmente a **médio**. As duas projeções da figura da secção (um dos objetivos do exercício) representaram-se a **forte**, pois são parte do pedido. A verdadeira grandeza da figura da secção, que é a outra parte do pedido (outro dos objetivos do exercício) representou-se igualmente a **forte**. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traços do plano π' , dos planos frontais auxiliares, das secções circulares produzidas por aqueles no cone ou, ainda, dos traçados necessários à mudança do diedro de projeção efetuada).

169.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto V , pelas suas projeções, em função dos dados. Os dados permitiram-nos representar, ainda, o plano φ (o plano frontal que contém a base de maior afastamento) pelo seu traço horizontal. O plano φ não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.

Resolução:*Determinação das projeções do sólido:*

Tendo em conta que a superfície (que é uma superfície de revolução) intersesta o Plano Frontal de Projeção segundo uma circunferência, o eixo da superfície é necessariamente uma reta de topo (uma reta projetante frontal). Assim, o centro da circunferência que se situa no Plano Frontal de Projeção (o ponto O) situa-se na mesma reta projetante frontal do ponto V , pelo que se tem imediatamente $O_2 \equiv V_2$. A circunferência está contida no Plano Frontal de Projeção, pelo que está em verdadeira grandeza em projeção frontal. Assim, com o compasso, fazendo centro em O_2 (a projeção frontal do ponto O) e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a projeção frontal da circunferência situa-se no eixo X (é um segmento de reta sobre o eixo X).

Em seguida, determinou-se o centro da base do sólido que se situa no plano φ – o ponto O' . O ponto O' situa-se o eixo do sólido, que é uma reta projetante frontal, pelo que se tem imediatamente $O'_2 \equiv V_2 \equiv O_2$. A projeção horizontal do ponto O' (O'_1) situa-se sobre o traço horizontal do plano φ , porque o plano φ é um plano projetante horizontal. Não nos é dada qualquer informação sobre o raio da base do sólido que se situa no plano φ . No entanto, é possível desenhar as projeções horizontais das geratrizes do contorno aparente horizontal, que são as geratrizes horizontais (de nível) da superfície – essas geratrizes estão definidas pelo ponto V e pelos pontos de maior e de menor abscissa da circunferência que se situa no Plano Frontal de Projeção.

Os pontos de interseção das geratrizes do contorno aparente horizontal com o plano φ permitem-nos determinar o raio da base do sólido que se situa no plano φ . Esta base está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção. Assim, com o compasso, fazendo centro em O'_2 e com o raio determinado, desenhou-se a projeção frontal da base de maior afastamento do sólido – a projeção horizontal desta base é um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano φ (h_φ), pois o plano φ é um plano projetante horizontal.

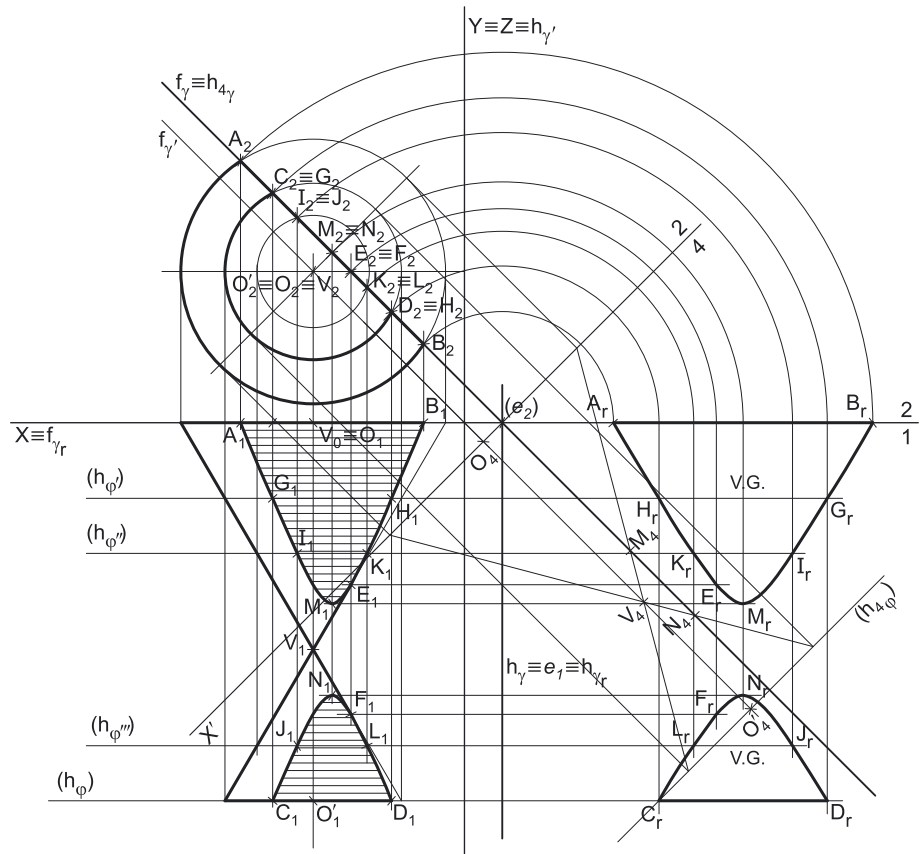
Em seguida, desenharam-se a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido (que é constituída por dois triângulos com um vértice em comum em V_1 e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor abscissa das projeções horizontais das respetivas bases) e a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido (que é a própria circunferência que delimita a base que se situa no Plano Frontal de Projeção).

a) Em primeiro lugar, representou-se o plano γ (o plano secante) pelos seus traços, em função dos dados. A **determinação da figura da secção produzida no sólido** pelo plano γ , deve processar-se seguindo uma sequência de etapas, que em seguida se apresentam:

1. Identificar o tipo de secção (ou cónica) produzida pelo plano secante no sólido.
2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes do sólido.
3. Determinar o **espaço útil** para o recurso aos planos paralelos à base.
4. Recorrer a planos paralelos ao plano da base, de forma a obter o número necessário de pontos para um desenho relativamente preciso da curva.

1. Identificação do tipo de secção (ou cónica) produzida pelo plano secante no sólido.

Para identificar a curva (a **cónica**) resultante da secção produzida pelo plano γ no sólido há que recorrer ao **método geral para a identificação da figura da secção**, que se executa em três etapas, a saber: **A.** conduz-se, pelo vértice do sólido, um plano paralelo ao plano secante; **B.** determina-se a reta de interseção desse plano auxiliar (paralelo ao plano secante) com o plano da base (qualquer das bases); **C.** analisa-se a posição da reta secante e relação à base do sólido.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

- A.** Conduziu-se, pelo vértice do sólido (o ponto **V**) um plano paralelo ao plano secante (o plano γ). O plano γ' é o plano paralelo ao plano γ que se conduziu pelo vértice **V** do sólido. O plano γ' é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal ($f_{\gamma'}$) passa por V_2 (a projeção frontal do ponto **V**). Por outro lado, os traços do plano γ' (que são duas retas concorrentes do plano γ') são paralelos aos traços homónimos do plano γ (que são duas retas concorrentes do plano γ), para que se verifique o **Critério de paralelismo entre planos**.
- B.** Determinou-se a reta de interseção do plano γ' com o plano da base de menor afastamento do sólido (o Plano Frontal de Projeção), que é o próprio traço frontal do plano γ' – $f_{\gamma'}$.
- C.** Analisa-se a posição da reta de interseção em relação à base do sólido. A reta $f_{\gamma'}$ é secante à base do sólido, pelo que a secção produzida no sólido pelo plano γ é uma **hipérbole**. Tendo em conta que o sólido é limitado pelas duas folhas da superfície cónica, a secção produzida é efetivamente uma **hipérbole** e não apenas um **ramo da hipérbole**.

Tendo em conta que uma **hipérbola** é considerada uma **curva de erro** (uma curva não rigorosa, por oposição à circunferência), o seu desenho (à mão livre) de uma forma relativamente precisa requer um mínimo de **oito pontos** (para cada ramo da hipérbola, dependendo, ainda das dimensões de cada ramo da curva)

2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes do sólido.

Tendo em conta que o plano γ é um plano projetante frontal, a determinação dos pontos em que o plano corta os contornos aparentes é direta.

O plano γ corta o **contorno aparente frontal** (a circunferência que delimita a base de menor afastamento do sólido) em dois pontos – os pontos **A** e **B**.

O plano γ corta o **contorno aparente horizontal** em seis pontos. O plano γ corta a base de menor afastamento do sólido nos pontos **A** e **B**. O plano γ corta a base de maior afastamento do sólido em outros dois pontos – os pontos **C** e **D**. Por fim, o plano γ corta as duas geratrizes do contorno aparente horizontal do sólido em outros dois pontos – os pontos **E** e **F**. Note que as projeções frontais das geratrizes do contorno aparente horizontal coincidem com o diâmetro fronto-horizontal da circunferência que delimita a base de menor afastamento do sólido.

Conclui-se que o plano γ corta os contornos aparentes do cone em seis pontos – os pontos **A, B, C, D, E** e **F**. Já temos **seis pontos** da figura da secção (três pontos para cada ramo da hipérbola).

3. Determinar o espaço útil para o recurso aos planos paralelos à base.

Tendo em conta que as bases do sólido estão contidas em planos frontais (de frente), o recurso a planos paralelos à base refere-se ao recurso a planos frontais (de frente). Estes têm de ser introduzidos no **espaço útil** da secção que é, precisamente, o espaço entre os **pontos de maior e de menor afastamento da secção** (porque os planos paralelos à base são planos frontais). Tenha em conta que qualquer plano frontal (de frente) introduzido fora deste **espaço útil** não nos permitirá determinar qualquer ponto da secção, precisamente porque não existe secção fora desse **espaço útil**.

Tendo em conta que o plano γ (o plano secante) **não é** um plano projetante horizontal, **não é possível** determinar, de forma imediata, os pontos de **maior e de menor afastamento** da curva da secção. No entanto, sabe-se que os pontos **A** e **B** (que se situam na base de menor afastamento do sólido) são os **pontos de menor afastamento** de um dos ramos da hipérbola. Por outro lado, os pontos **C** e **D** (que se situam na base de maior afastamento do sólido) são os **pontos de maior afastamento** do outro ramo da hipérbola. Mas ainda assim, não temos o **espaço útil** para cada um dos ramos da secção.

Para determinarmos o **espaço útil** da secção, é necessário transformar o plano γ (que é um plano projetante frontal) num **plano projetante horizontal**, o que se processa com o recurso a uma mudança do diedro de projeção. Nesse sentido, substituiu-se o Plano Horizontal de Projeção por um outro plano (o **plano 4**), ortogonal ao plano γ , de forma a transformar o plano γ num plano projetante horizontal. Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Frontal de Projeção (o **plano 2**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Frontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções frontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções horizontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se os afastamentos** (que estão referenciados ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se as cotas** (que estavam referenciadas ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciadas ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 2** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **4/2**. Como o **plano 4** é ortogonal ao plano γ , o eixo **X'** é perpendicular ao traço frontal do plano (f_{γ}) – o plano γ foi transformado num plano de perfil (um plano duplamente projetante). Nesse sentido, $h_{4\gamma}$ (o traço do plano γ no **plano 4**) fica coincidente com o seu traço frontal – $f_{\gamma} \equiv h_{4\gamma}$. Em seguida, determinou-se a projeção do sólido no **plano 4** (o novo plano de projeção). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**). O_4 , V_4 , e O'_4 são as projeções dos pontos **O, V** e **O'** no **plano 4** e determinaram-se em função dos seus afastamentos, que se mantiveram.

A partir das projeções dos pontos **O, V** e **O'** no **plano 4**, desenhou-se a projeção do sólido no **plano 4** e determinaram-se os pontos em que o plano γ (que é um plano de perfil, no novo diedro de projeção) corta as novas geratrizes do contorno aparente horizontal – os pontos **M** e **N**. O ponto **M** é o ponto de maior afastamento de um dos ramos da hipérbola e o ponto **N** é o ponto de menor afastamento do outro ramo da hipérbola.

Em seguida, inverteu-se a mudança do diedro de projeção efetuada, o que nos permitiu determinar as projeções horizontais dos pontos **M** e **N**. Um dos ramos da hipérbola está compreendido entre os pontos **A** e **B** (os seus **pontos de menor afastamento**) e o ponto **M** (o seu **ponto de maior afastamento**) – o **espaço útil** para este ramo da hipérbola é o espaço entre a base de menor afastamento do sólido e o ponto **M**. O outro ramo da hipérbola está compreendido entre os pontos **C** e **D** (os seus **pontos de maior afastamento**) e o ponto **N** (o seu **ponto de menor afastamento**) – o **espaço útil** para este ramo da hipérbola é o espaço entre o ponto **N** e a base de maior afastamento do sólido.

Já está identificado o **espaço útil** para cada um dos dois ramos da hipérbola.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

4. Recorrer a planos paralelos ao plano da base, de forma a obter o número necessário de pontos para um desenho relativamente preciso da curva.

O recurso a planos paralelos ao plano da base deve garantir que os pontos que eles nos permitem determinar estão distribuídos uniformemente pelo **espaço útil** (de cada ramo da hipérbole), precisamente para garantir que o desenho da(s) curva(s) se processe de uma forma o mais precisa possível. Por outro lado, tendo em conta que, na presente situação, há que recorrer a planos paralelos ao plano da base para os dois ramos da hipérbole (o que resulta numa resolução gráfica de grande densidade), a localização dos planos frontais (paralelos ao plano da base) a que se recorreu foi particularmente criteriosa.

Em função das dimensões de cada ramo da hipérbole (existe um ramo maior e um outro menor), optou-se por se recorrer a um **plano auxiliar** para o **ramo menor** (o plano φ''') e a **dois planos auxiliares** para o **ramo maior** (os planos φ' e φ''). Por outro lado, de forma a diminuir a densidade gráfica da resolução apresentada, localizaram-se os planos φ''' e φ' de forma que as secções circulares que eles produzem no sólido tenham a mesma projeção frontal. O plano φ' , por sua vez, foi localizado de forma a colmatar o espaço compreendido entre o plano φ'' e o Plano Frontal de Projeção.

O plano φ' porque é paralelo ao plano da base, produz, no sólido, uma secção circular. O centro desse círculo é o ponto em que o plano φ' intersesta o eixo do sólido (e que não se identificou). O raio desse círculo é a distância desse ponto ao ponto de interseção do plano φ' com uma qualquer geratriz do sólido (que também não se identificou, com vista a não sobrecarregar a resolução apresentada com excesso de notações). Assim, desenhou-se a projeção frontal da secção que o plano φ' produz no sólido. Em seguida, determinou-se a reta de interseção do plano φ' (o plano auxiliar) com o plano γ (o plano secante), que é uma reta de topo (uma reta projetante frontal), cujas projeções também não se identificaram. Os pontos em que esta reta corta a circunferência são mais dois pontos da secção – os pontos **G** e **H**. Estes pontos foram determinados a partir das suas projeções frontais – as suas projeções horizontais (**G**₁ e **H**₁) situam-se sobre o traço horizontal do plano φ' , pois o plano φ' é um plano projetante horizontal. Já temos mais dois pontos para o desenho deste ramo da hipérbole, o que perfaz um total de **seis pontos** (os pontos **A, B, E, M, G** e **H**).

Repetiu-se o processo acima exposto para a determinação dos pontos **G** e **H** em relação ao plano φ'' , o que nos permitiu determinar mais dois pontos deste ramo da hipérbole – os pontos **K** e **I**. Já temos um total de **oito pontos** para o desenho deste ramo da hipérbole, o que se considera suficiente.

Por fim, repetiu-se mais uma vez o processo exposto para a determinação dos pontos **G** e **H** em relação ao plano φ''' , o que nos permitiu determinar dois pontos do outro ramo da hipérbole – os pontos **J** e **L**. Já temos um total de **seis pontos** para o desenho deste ramo da hipérbole (os pontos **C, D, F, N, J** e **L**), o que se considera suficiente, dada a dimensão da curva a desenhar.

A partir dos **catorze pontos** já determinados, desenharam-se as duas projeções da **figura da secção**. A projeção horizontal da hipérbole é uma outra hipérbole, cujo desenho é relativamente preciso, a partir dos catorze pontos determinados. Salienta-se que as curvas desenhadas (os dois ramos da projeção horizontal da hipérbole) **são tangentes ao contorno aparente horizontal** do sólido nos pontos **E**₁ e **F**₁ (as projeções horizontais dos pontos em que o plano secante corta as geratrizes do contorno aparente horizontal – os pontos **E** e **F**). A projeção frontal da hipérbole reduz-se a um segmento de reta sobre f_γ (o traço frontal do plano γ), pois o plano γ (o plano secante) é um plano projetante frontal.

Determinação das projeções do sólido resultante da secção.

Em seguida, desenharam-se as projeções do **sólido resultante da secção** (que é um outro sólido – uma parte do sólido inicial), começando pelos seus contornos aparentes. O **sólido resultante da secção** é, no presente caso, a parte do sólido compreendida entre o plano secante e o Plano Horizontal de Projeção.

A **projeção frontal do contorno aparente frontal** é uma linha mista fechada limitada, à direita e superiormente, pelo segmento **[A₂B₂]** e, à esquerda e inferiormente, pelo arco maior **A₂B₂** da projeção frontal da base que se situa no Plano Frontal de Projeção. No entanto, em projeção frontal, há ainda que representar a parte restante da projeção frontal da base de maior afastamento – o arco maior **C₂D₂** dessa projeção. A **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** é outra linha mista fechada, sendo que as partes curvas são os arcos **F₁L₁D₁** e **E₁H₁B₁**. Tenha em conta que **E**₁ (a projeção horizontal do ponto **E**) é um dos pontos em que a figura da secção é tangente a uma geratriz do contorno aparente horizontal do sólido e, por isso, é o ponto em que a projeção horizontal do contorno aparente horizontal deixa de ser uma linha reta para passar a ser uma curva, até **B**₁ (a projeção horizontal do ponto **B**). De forma semelhante, **F**₁ (a projeção horizontal do ponto **F**) é o outro ponto em que a figura da secção é tangente a uma geratriz do contorno aparente horizontal do sólido e, por isso, é outro ponto em que a projeção horizontal do contorno aparente horizontal deixa de ser uma linha reta para passar a ser uma curva, até **D**₁ (a projeção horizontal do ponto **D**).

A **figura da secção**, porque é visível em projeção horizontal (a área do corte é visível em projeção horizontal), foi identificada com o recurso a tracejado, paralelamente ao eixo **X** (em projeção horizontal).

- b) O plano que contém a figura da secção (o plano secante – o plano γ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que a figura da secção não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções (a hipérbole está deformada tanto em projeção frontal como em projeção horizontal). Assim, para determinar a verdadeira grandeza da figura da secção é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano secante (o plano que contém a figura da secção) para o Plano Horizontal de Projeção. A charneira foi **h_γ**, que se identificou imediatamente (reta **e**) – trata-se de uma reta de topo (projetante frontal). Os planos que contêm os arcos do rebatimento são planos frontais (de frente) – são planos ortogonais à charneira. Tendo em conta que os arcos do rebatimento de cada ponto se projetam em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção e que os pontos mantêm os seus afastamentos ao longo do rebatimento, efetuou-se o rebatimento de cada um dos catorze pontos da figura da secção, o que nos permitiu desenhar a curva em verdadeira grandeza (em rebatimento).

Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y** \equiv **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). Os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. As projeções do sólido dado, apesar de integrarem igualmente os dados, representaram-se a **leve** pois, nesta situação, são um traçado auxiliar para atingir o objetivo pretendido (o sólido resultante da secção). As duas projeções do **sólido resultante da secção** (um dos objetivos do exercício) representaram-se a **forte**, pois são parte do pedido. A verdadeira grandeza da figura da secção, que é a outra parte do pedido (outro dos objetivos do exercício) representou-se igualmente a **forte**. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traços do plano γ' , dos planos frontais auxiliares, ou, ainda, das secções circulares produzidas por aqueles no sólido).

170.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos O e O' , pelas respectivas projeções, em função dos dados. Em seguida, representaram-se, também, os planos v e v' , pelos respectivos traços frontais. O plano v é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal (f_v) passa pela projeção frontal do ponto O (O_2). O plano v' é outro plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal $(f_{v'})$ passa pela projeção frontal do ponto O' (O'_2). Os planos v e v' não têm traço horizontal, pelo que os respetivos traços frontais se identificaram entre parêntesis. Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano α , o plano secante, pelos seus traços.

Resolução:

Determinação das projeções do cilindro:

As bases do cilindro estão contidas em planos horizontais (de nível), que são paralelos ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que se projetam em verdadeira grandeza em projeção horizontal. Assim, com o compasso, fazendo centro em O_1 (a projeção horizontal do ponto O) e com 3 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal da base inferior do cilindro. A projeção frontal da base inferior é um segmento de reta sobre o traço frontal do plano v (f_v), pois o plano v é um plano projetante frontal.

Em seguida, com o compasso, fazendo centro em O'_1 (a projeção horizontal do ponto O') e também com 3 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal da base superior do cilindro. A projeção frontal da base superior é um segmento de reta sobre o traço frontal do plano v' ($f_{v'}$), pois o plano v' é outro plano projetante frontal.

Em seguida, desenharam-se a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido (que é um paralelogramo cujos vértices são os pontos de maior e de menor abcissa das projeções frontais das duas bases) e a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do cilindro. O desenho da **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido processou-se com o recurso à construção necessária para determinar as retas tangentes a uma circunferência (as projeções horizontais das duas bases) que são paralelas a uma reta (a projeção horizontal do eixo do cilindro – o segmento $[O_1O'_1]$). O arco mais à esquerda da circunferência que delimita a base inferior (e que está compreendido entre as duas geratrizes do contorno aparente horizontal) é **invisível** em projeção horizontal, o que se assinalou devidamente no desenho.

Identificação do tipo de secção produzida:

Pretende-se identificar a curva (a **cônica**) resultante da secção produzida pelo plano α no cilindro. Para tal há que recorrer ao **método geral para a identificação da figura da secção**, que se executa em uma ou duas etapas, a saber: **1.** analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante em relação aos planos das bases do cilindro – no caso de não ser paralelo àqueles, passa-se para a análise seguinte; **2.** analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante em relação ao eixo do cilindro.

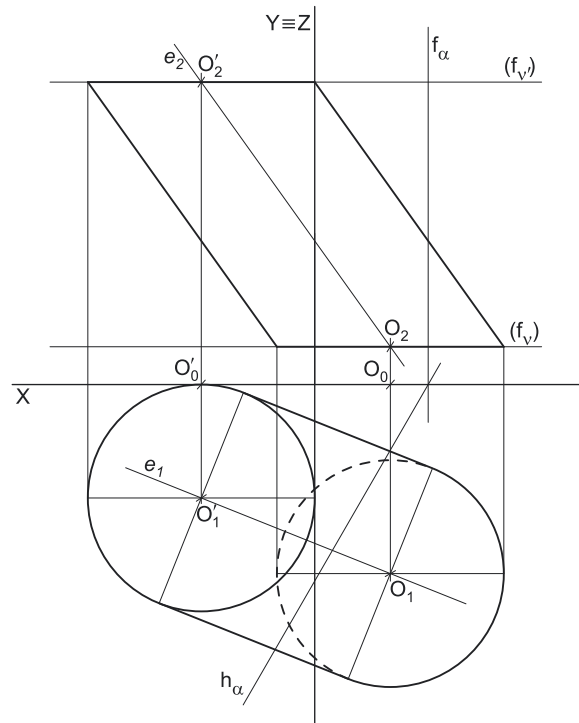
1. Analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante (o plano α) em relação aos planos das bases. O plano α (um plano vertical) não é paralelo aos planos das bases (que são planos horizontais), pelo que a figura da secção **não é um círculo**.

2. Analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante em relação ao eixo do cilindro. O plano α não é paralelo ao eixo do cilindro, pois não pode conter nenhuma reta cuja projeção horizontal seja paralela a $[O_1O'_1]$ (a projeção horizontal do eixo do sólido). Assim, a figura da secção **não é um paralelogramo** – a figura da secção é, assim, uma **elipse** (ou um **segmento de elipse**, caso o plano secante corte qualquer das duas bases do sólido).

Tendo em conta que o plano α corta a base inferior do cilindro (o que se observa em projeção horizontal, pois o plano α é projetante horizontal), a secção produzida pelo plano α no cilindro é efetivamente um **segmento de elipse**.

Traçado:

O eixo X representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo $Y \equiv Z$ representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). As projeções do cilindro e os traços do plano secante (o plano α), porque integram os dados, representaram-se igualmente a **médio**. Os traços frontais dos planos que contêm as bases, no contexto do exercício, são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traçados necessários à determinação do contorno aparente horizontal do cilindro).



171.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto O e a reta e (a reta suporte do eixo do sólido) pelas respetivas projeções, em função dos dados. As projeções da reta e passam pelas projeções homónimas do ponto O . Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano γ , o plano secante, pelos seus traços.

Resolução:*Determinação das projeções do cilindro:*

A altura de um cilindro é a distância entre os planos que contêm as bases. Uma vez que a base de menor afastamento está contida no Plano Frontal de Projeção (tem afastamento nulo) e que a altura do sólido é 7 cm, o plano frontal (de frente) que contém a base de maior afastamento do sólido (o plano φ) tem 7 cm de afastamento ($0 + 7 = 7$). Assim, representou-se o plano φ pelo seu traço horizontal. O plano φ não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.

Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto O' , o centro da base de maior afastamento do sólido. O ponto O' é o ponto de interseção da reta e (a reta suporte do eixo do cilindro) com o plano φ (o plano que contém a base de maior afastamento do sólido). O ponto O' determinou-se de forma direta, a partir da sua projeção horizontal (pois o plano φ é um plano projetante horizontal).

A base de menor afastamento do cilindro está contida no Plano Frontal de Projeção, pelo que está em verdadeira grandeza em projeção frontal. A base de maior afastamento está contida num plano frontal (de frente), que é paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pelo que se projeta em verdadeira grandeza em projeção frontal. Assim, com o compasso, fazendo centro em O_2 (a projeção frontal do ponto O) e com 3 cm de raio, desenhou-se a projeção frontal da base de menor afastamento do cilindro. A projeção horizontal desta base é um segmento de reta sobre o eixo X (pois a base tem afastamento nulo).

Em seguida, com o compasso, fazendo centro em O'_2 (a projeção frontal do ponto O') e também com 3 cm de raio, desenhou-se a projeção frontal da base de maior afastamento do cilindro (que também se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção). A projeção horizontal desta base é um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano φ (h_φ), pois o plano φ é um plano projetante horizontal.

Em seguida, desenharam-se a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido (que é um paralelogramo cujos vértices são os pontos de maior e de menor abscissa das projeções horizontais das duas bases) e a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do cilindro. O desenho da **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido processou-se com o recurso à construção necessária para determinar as retas tangentes a uma circunferência (as projeções frontais das duas bases) que são paralelas a uma reta (a projeção frontal do eixo do cilindro – o segmento $[O_2O'_2]$). O arco mais à direita da circunferência que delimita a base de menor afastamento (e que está compreendido entre as duas geratrizes do contorno aparente frontal) é **invisível** em projeção frontal, o que se assinalou devidamente no desenho.

Identificação do tipo de secção produzida:

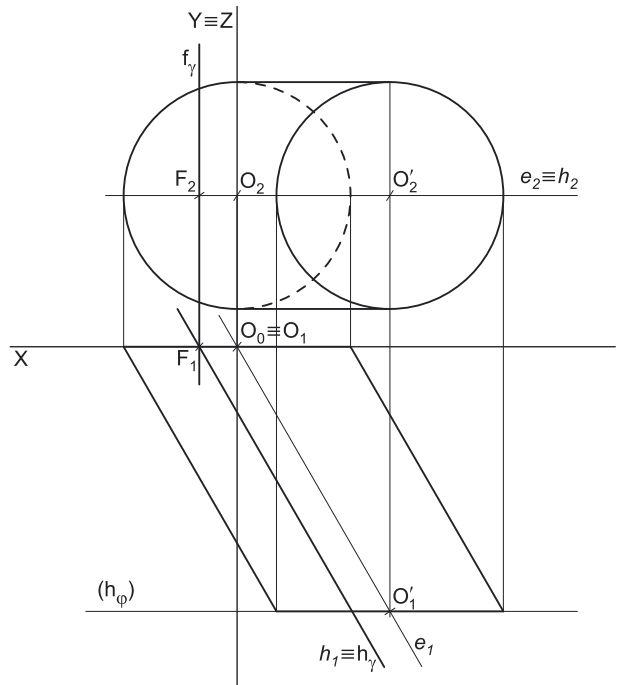
Pretende-se identificar a curva (a **cónica**) resultante da secção produzida pelo plano γ no cilindro. Para tal há que recorrer ao **método geral para a identificação da figura da secção**, que se executa em uma ou duas etapas, a saber: **1.** analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante em relação aos planos das bases do cilindro – no caso de não ser paralelo àqueles, passa-se para a análise seguinte; **2.** analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante em relação ao eixo do cilindro.

1. Analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante (o plano γ) em relação aos planos das bases. O plano γ (um plano vertical) não é paralelo aos planos das bases (que são planos frontais), pelo que a figura da secção **não é um círculo**.

2. Analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante em relação ao eixo do cilindro. O eixo do cilindro está contido numa reta horizontal (de nível) – a reta e . Assim, recorreu-se a uma reta horizontal (de nível) do plano γ – a reta h . A reta h pertence ao plano γ , pois tem o seu traço frontal (o ponto F) sobre o traço frontal do plano γ (f_γ). A reta h está, assim, definida por um ponto (o ponto F) e por uma direção (a direção das retas horizontais do plano γ). A reta h é paralela à reta e , pelo que o plano γ é paralelo ao eixo do sólido (verifica o **critério de paralelismo entre planos e retas**, pois contém uma reta paralela à reta dada). Assim, a figura da secção produzida pelo plano γ no cilindro **é um paralelogramo**.

Traçado:

O eixo X representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo $Y \equiv Z$ representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). As projeções do cilindro e os traços do plano secante (o plano γ), porque integram os dados, representaram-se igualmente a **médio**. O traço horizontal do plano φ (o plano que contém a base de maior afastamento), no contexto do exercício, é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traçados necessários à determinação do contorno aparente horizontal do cilindro e da reta h).



172.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto O , pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida representou-se o plano φ , o plano frontal (de frente) que contém a base de menor afastamento do cilindro, pelo seu traço horizontal. O traço horizontal do plano φ (h_φ) passa pela projeção horizontal do ponto O (O_1), pois o plano φ é um plano projetante horizontal. O plano φ não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis. Os dados permitiram-nos representar, ainda, o plano α (o plano secante) pelos seus traços.

Resolução:

Determinação das projeções do cilindro:

A base do cilindro está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pelo que se projeta em verdadeira grandeza em projeção frontal. Assim, com o compasso, fazendo centro em O_2 (a projeção frontal do ponto O) e com 3 cm de raio, desenhou-se a projeção frontal da base do sólido. A projeção horizontal da circunferência é um segmento de reta sobre h_φ .

Em seguida, pelas projeções do ponto O conduziram-se as projeções homónimas da reta h , a reta suporte do eixo do sólido. A altura de um cilindro é a distância entre os planos que contêm as bases. Uma vez que a base de menor afastamento está contida num plano frontal (de frente) com 2 cm de afastamento e que a altura do sólido é 7 cm, o plano frontal (de frente) que contém a base de maior afastamento do sólido (o plano φ') tem 9 cm de afastamento ($2 + 7 = 9$). Assim, representou-se o plano φ' pelo seu traço horizontal ($h_{\varphi'}$). O plano φ' não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.

Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto O' , o centro da base de maior afastamento do sólido. O ponto O' é o ponto de interseção da reta h (a reta suporte do eixo do cilindro) com o plano φ' (o plano que contém a base de maior afastamento do sólido). O ponto O' determinou-se de forma direta, a partir da sua projeção horizontal (pois o plano φ' é um plano projetante horizontal).

Em seguida, com o compasso, fazendo centro em O'_2 (a projeção frontal do ponto O') e também com 3 cm de raio, desenhou-se a projeção frontal da base de maior afastamento do cilindro (que também se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção). A projeção horizontal desta base é um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano φ' ($h_{\varphi'}$), pois o plano φ' é um plano projetante horizontal.

Por fim, desenharam-se a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido (que é um paralelogramo cujos vértices são os pontos de maior e de menor abscissa das projeções horizontais das duas bases) e a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do cilindro. O desenho da **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido processou-se com o recurso à construção necessária para determinar as retas tangentes a uma circunferência (as projeções frontais das duas bases) que são paralelas a uma reta (a projeção frontal da reta h , a reta suporte do eixo do cilindro). O arco mais à direita da circunferência que delimita a base de menor afastamento (e que está compreendido entre as duas geratrizes do contorno aparente frontal) é **invisível** em projeção frontal, o que se assinalou devidamente no desenho.

A **determinação da figura da secção produzida no cilindro** pelo plano α , deve processar-se seguindo uma sequência de etapas, que em seguida se apresentam:

1. Identificar o tipo de secção (ou cónica) produzida pelo plano secante no sólido.
2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes do sólido.
3. Determinar o **espaço útil** em que a secção se desenvolve (que será útil para o eventual recurso aos planos paralelos às bases).
4. Recorrer a planos paralelos aos planos das bases ou a geratrizes da superfície, de forma a obter o número necessário de pontos para um desenho relativamente preciso da curva.

1. Identificação do tipo de secção (ou cónica) produzida pelo plano secante no sólido.

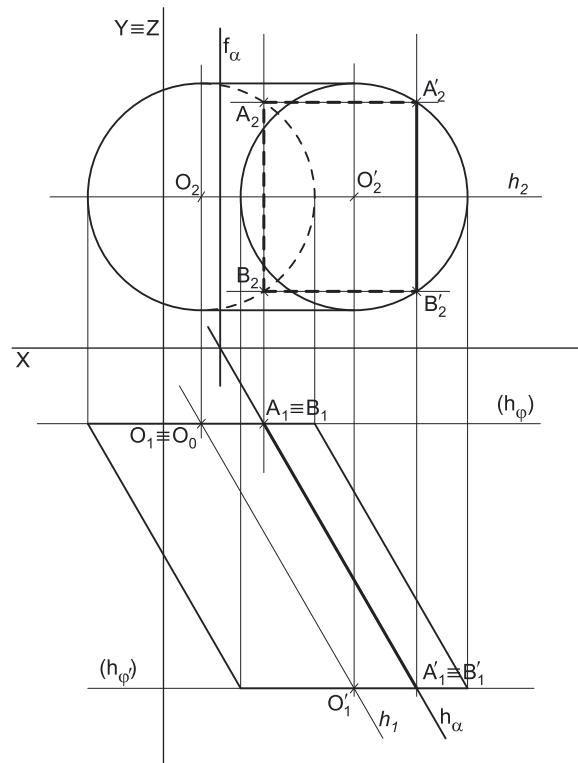
Para identificar a curva (a **cónica**) resultante da secção produzida pelo plano α no cilindro há que recorrer ao **método geral para a identificação da figura da secção**, que se executa em duas etapas, a saber: **A**. analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante em relação aos planos das bases do cilindro – no caso de não ser paralelo àqueles, passa-se para a análise seguinte; **B**. analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante em relação ao eixo do cilindro.

A. Analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante (o plano α) em relação aos planos das bases. O plano α (um plano vertical) não é paralelo aos planos das bases (que são planos frontais), pelo que a figura da secção **não é um círculo**.

B. Analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante em relação ao eixo do cilindro. O eixo do cilindro está contido numa reta horizontal (de nível) – a reta h . É possível constatar que o plano α é paralelo à reta h , pois contém uma reta (o seu traço horizontal – h_α) que é paralelo à reta h (o plano α verifica o **Critério de paralelismo entre planos e retas** em relação à reta h). Assim, a figura da secção produzida pelo plano α no cilindro **é um paralelogramo**.

2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes do sólido.

Tendo em conta que o plano α é um plano projetante horizontal, a determinação dos pontos em que o plano corta os contornos aparentes é direta.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O plano α corta o **contorno aparente horizontal** em quatro pontos – o plano α corta a circunferência que delimita a base de menor afastamento em dois pontos (os pontos **A** e **B**) e corta a circunferência que delimita a base de maior afastamento em outros dois pontos (os pontos **A'** e **B'**). O plano α não corta qualquer geratriz do contorno aparente horizontal. O plano α corta o **contorno aparente frontal** nos pontos **A'** e **B'** (os pontos em que plano α corta a circunferência que delimita a base de maior afastamento do sólido).

Conclui-se que o plano α corta os contornos aparentes do cilindro em quatro pontos – os pontos **A, B, A'** e **B'**.

3. Determinar o **espaço útil** em que a secção se desenvolve (que será útil para o eventual recurso aos planos paralelos às bases).

Tendo em conta que o plano α corta as duas bases do cilindro, o **espaço útil** em que a secção se desenvolve é o espaço entre as duas bases.

4. Recorrer a planos paralelos aos planos das bases ou a geratrizes da superfície, de forma a obter o número necessário de pontos para um desenho relativamente preciso da curva.

Uma vez que a secção produzida pelo plano α no cilindro é um **paralelogramo**, não é necessária a determinação de quaisquer outros pontos da secção, pois já temos os quatro vértices da figura, que são os pontos **A, B, A'** e **B'**.

A partir dos quatro vértices da figura da secção (o paralelogramo **[AA'B'B]**), desenharam-se as suas duas projeções, atendendo às invisibilidades existentes. Em **projeção frontal**, o lado **[AB]** é invisível (está contido na base de menor afastamento do cilindro, que é invisível em projeção frontal), bem como os lados **[AA']** e **[BB']**, pois estão contidos na parte invisível (em projeção frontal) da superfície lateral do sólido. Em **projeção horizontal**, a figura reduz-se a um segmento de reta sobre h_α , pois o plano α é um plano projetante horizontal.

Note que, não havendo desagregação do sólido (é pedida a **figura da secção** e não o **sólido resultante da secção**), a superfície da figura (a área do corte) nunca é visível, pelo que não há lugar à execução de tracejado.

Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y** \equiv **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). As projeções do cilindro e os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se igualmente a **médio**. O traço horizontal do plano φ (o plano que contém a base de maior afastamento do cilindro) representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. As duas projeções da figura da secção (o objetivo do exercício) representaram-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso da reta **h**).

173.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se a reta **e** (a reta suporte do eixo do cilindro) pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida determinaram-se as projeções do ponto **O**, o centro da base de menor afastamento do sólido – o ponto **O** é o traço frontal da reta **e**.

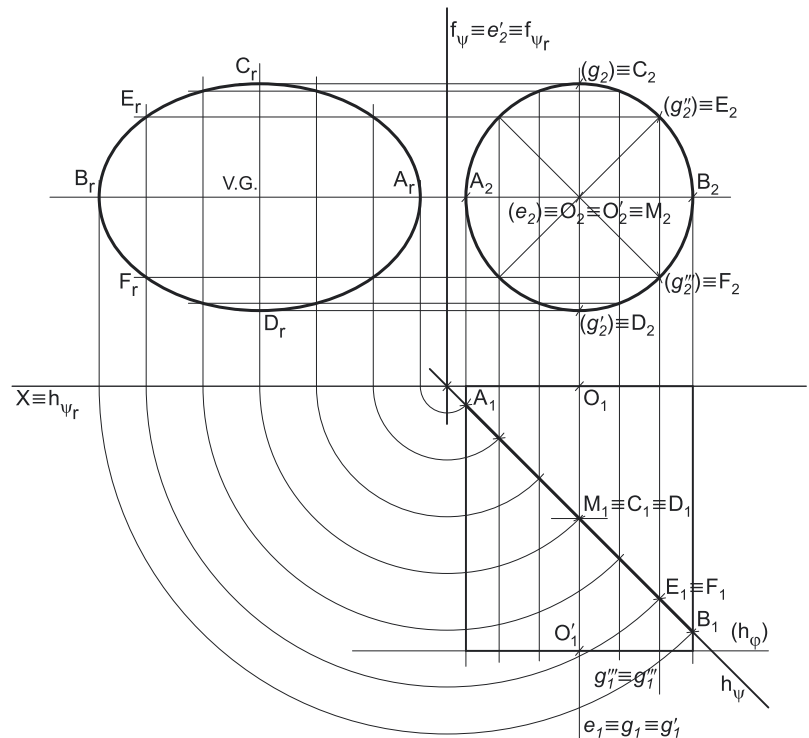
Resolução:

Determinação das projeções do cilindro:

A base de menor afastamento do cilindro está contida no Plano Frontal de Projeção, pelo que se projeta em verdadeira grandeza em projeção frontal. Assim, com o compasso, fazendo centro em O_2 (a projeção frontal do ponto **O**) e com 3 cm de raio, desenhou-se a projeção frontal da base de menor afastamento do sólido. A projeção horizontal da circunferência que delimita a base é um segmento de reta sobre o eixo **X** (pois a base situa-se no Plano Frontal de Projeção).

A altura de um cilindro é a distância entre os planos que contêm as bases. Uma vez que a base inferior está contida no Plano Frontal de Projeção e que a altura do sólido é 7 cm, o plano frontal (de frente) que contém a outra base do sólido (o plano φ) tem 7 cm de afastamento ($0 + 7 = 7$). Assim, representou-se o plano φ pelo seu traço horizontal (h_φ). O plano φ não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.

Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto O' , o centro da base de maior afastamento do sólido. O ponto O' é o ponto de interseção da reta **e** (a reta suporte do eixo do cilindro) com o plano φ (o plano que contém a base de maior afastamento do sólido). O ponto O' determinou-se de forma direta, pois o plano φ é um plano projetante horizontal e a reta **e** é uma reta projetante frontal.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Tendo em conta que as geratrizes do cilindro são projetantes frontais, a projeção frontal da base de maior afastamento do sólido está coincidente com a projeção frontal da sua base de menor afastamento. A projeção horizontal desta base é um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano φ (h_φ), pois o plano φ é um plano projetante horizontal.

Por fim, desenharam-se a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido (que é a circunferência que delimita a projeção frontal da base de maior afastamento do sólido) e a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do cilindro (que é um retângulo cujos vértices são os pontos de maior de menor abcissa das projeções horizontais das duas bases).

Em seguida, determinou-se o ponto médio do eixo do cilindro, o ponto **M**, o que nos permitiu representar o plano secante (o plano ψ), pelos seus traços, em função dos dados. O plano ψ é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal (h_ψ) passa por **M₁** (a projeção horizontal do ponto **M**). A **determinação da figura da secção produzida no cilindro** pelo plano ψ , deve processar-se seguindo uma sequência de etapas, que em seguida se apresentam:

1. Identificar o tipo de secção (ou cónica) produzida pelo plano secante no sólido.
2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes do sólido.
3. Determinar o **espaço útil** em que a secção se desenvolve (que será útil para o eventual recurso aos planos paralelos às bases).
4. Recorrer a planos paralelos aos planos das bases ou a geratrizes da superfície, de forma a obter o número necessário de pontos para um desenho relativamente preciso da curva.

1. Identificação do tipo de secção (ou cónica) produzida pelo plano secante no sólido.

Para identificar a curva (a **cónica**) resultante da secção produzida pelo plano ψ no cilindro há que recorrer ao **método geral para a identificação da figura da secção**, que se executa em duas etapas, a saber: **A**. analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante em relação aos planos das bases do cilindro – no caso de não ser paralelo àqueles, passa-se para a análise seguinte; **B**. analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante em relação ao eixo do cilindro.

A. Analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante (o plano ψ) em relação aos planos das bases. O plano ψ (um plano vertical) não é paralelo aos planos das bases (que são planos frontais), pelo que a figura da secção **não é um círculo**.

B. Analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante em relação ao eixo do cilindro. O eixo do cilindro está contido numa reta de topo – a reta **e**. O plano ψ (que é um plano vertical – um plano projetante horizontal) **não é paralelo** à reta **e**, (que é uma reta projetante frontal), pelo que a figura da secção produzida pelo plano ψ no cilindro **não é um paralelogramo** – é uma **elipse**.

Atendendo a que o plano ψ não corta nenhuma das bases do cilindro (o que se constata diretamente, pois o plano ψ é projetante horizontal), a secção produzida pelo plano ψ no cilindro é efetivamente uma **elipse** (e não um segmento de elipse).

2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes do sólido.

Tendo em conta que o plano ψ é um plano projetante horizontal, a determinação dos pontos em que o plano corta os contornos aparentes é direta.

O plano ψ corta o **contorno aparente horizontal** em dois pontos – o plano ψ corta a geratriz mais à esquerda do contorno aparente horizontal no ponto **A** e corta a geratriz mais à direita do contorno aparente horizontal no ponto **B**. O plano ψ não corta o **contorno aparente frontal** do cilindro, pois o plano ψ não corta a base de maior afastamento do sólido.

Conclui-se que o plano ψ corta os contornos aparentes do cilindro em dois pontos – os pontos **A** e **B**. Já temos **dois pontos** da figura da secção.

3. Determinar o espaço útil em que a secção se desenvolve (que será útil para o eventual recurso aos planos paralelos às bases).

Tendo em conta que as bases do sólido estão contidas em planos frontais (de frente), o recurso a planos paralelos às bases refere-se ao recurso a planos horizontais frontais (de frente). Estes têm de ser introduzidos no **espaço útil** da secção que é, precisamente, o espaço entre os **pontos de maior e de menor afastamento da secção** – estes pontos definem o **espaço útil** no qual se desenvolve a secção.

Uma vez que o plano ψ (o plano secante) é um plano projetante horizontal, é possível constatar, de forma imediata, que o ponto **A** é o **ponto de menor afastamento** da secção e que **B** é o **ponto de maior afastamento** da secção. Assim, o **espaço útil** no qual a secção se desenvolve é o espaço compreendido entre os pontos **A** e **B**.

Por outro lado, atendendo a que o plano secante é **um plano projetante horizontal** e que a superfície cilíndrica que limita o sólido é **uma superfície projetante frontal**, é possível, de forma imediata, desenhar as duas projeções da figura da secção, mesmo sem determinar quaisquer outros pontos da mesma. Nesse sentido, a projeção horizontal da figura da secção é o segmento de reta **[A₁B₁]**, que se situa sobre o traço horizontal do plano ψ (h_ψ). Já a projeção frontal da figura da secção está coincidente com a projeção frontal do contorno aparente do sólido.

Assim, satisfiz-se a primeira parte do pedido no exercício – a determinação das projeções da figura da secção. No entanto, uma vez que é pedida, também, a verdadeira grandeza da figura da secção, é necessária a determinação dos pontos da secção que nos permitirão o desenho da curva em verdadeira grandeza (à mão livre), o que significa a determinação de um mínimo de oito dos seus pontos.

4. Recorrer a planos paralelos aos planos das bases ou a geratrizes da superfície, de forma a obter o número necessário de pontos para um desenho relativamente preciso da curva.

Optou-se por se recorrer ao **método das geratrizes** para a determinação dos pontos da secção, uma vez que as geratrizes do cilindro são projetantes frontais (o que nos permite uma grande rapidez e rigor no recurso a este método).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Já temos dois pontos da figura da secção – os pontos **A** e **B**. Estes são necessariamente dois extremos de um dos eixos da elipse. Assim, o segmento **[AB]** (que é um segmento de reta horizontal) é imediatamente o **eixo maior** da elipse (**A** e **B** são os pontos mais distantes da curva) – o outro eixo da elipse terá de ser vertical (perpendicular a **[AB]**). O ponto **M** é o ponto médio do segmento **[AB]**, pelo que **M** é o ponto no qual se bissectam os dois eixos da elipse. O eixo menor da elipse é vertical e passa pelo ponto **M** – assim, os extremos do **eixo menor** da elipse terão de ser os pontos de maior e de menor cota da figura da secção.

Nesse sentido, representaram-se as geratrizes **g** e **g'** pelas suas projecções – a geratriz **g** é a geratriz de maior cota do cilindro e a geratriz **g'** é a geratriz de menor cota do sólido. O plano ψ corta a geratriz **g** no ponto **C** e corta a geratriz **g'** no ponto **D**. O segmento **[CD]** é, assim, o **eixo menor** da elipse. Note que as geratrizes **g** e **g'** têm as suas projecções horizontais coincidentes. Já temos **quatro pontos** da figura da secção.

Os outros quatro pontos a determinar deverão estar distribuídos pela curva de forma uniforme, de modo equilibrado entre os quatro pontos já determinados. Nesse sentido, desenharam-se as projecções de mais duas geratrizes quaisquer, **g''** e **g'''**, tais que as suas projecções horizontais estão coincidentes. Tenha em conta que estas geratrizes se situam precisamente a meio dos arcos **CB** e **BD** da elipse, o que se processou conduzindo, pela projecção frontal do ponto **M** (**M**₂) as bissectrizes dos ângulos retos formados (em projecção frontal) pelos dois eixos da elipse (os segmentos **[AB]** e **[CD]**). Os pontos **E** e **F** são os pontos em que o plano secante (o plano ψ) corta as geratrizes **g''** e **g'''**, respetivamente e são mais dois pontos da figura da secção. Já temos **seis pontos** da figura da secção.

Em seguida, recorreu-se a outro par de geratrizes (cujas projecções não se identificaram) – as geratrizes que se situam a meio dos arcos **AC** e **AD** da elipse (recorrendo, mais uma vez, às bissectrizes atrás referidas). Determinaram-se os pontos em que o plano secante (o plano ψ) corta essas duas geratrizes (pontos esses que também não se identificaram), o que nos permitiu determinar mais dois pontos da figura da secção. Já temos **oito pontos** da figura da secção.

Por uma questão de rigor, recorreu-se ainda a mais dois pares de geratrizes, em situações semelhantes às expostas (cada par tem as suas projecções horizontais coincidentes) e localizados de forma a permitirem-nos uma distribuição uniforme dos pontos da curva – cada par de geratrizes permite-nos determinar outros dois pontos. Assim, obteve-se um total de **doze pontos** da curva, o que nos irá permitir um desenho relativamente preciso da mesma.

Determinação da verdadeira grandeza da figura da secção.

O plano que contém a figura da secção (o plano secante – o plano ψ) não é paralelo a qualquer dos planos de projecção, pelo que a figura da secção não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projecções (a elipse está deformada tanto em projecção frontal como em projecção horizontal). Note que a projecção frontal da **elipse** (a figura da secção) é um círculo mas tal facto resulta da deformação inerente à projecção da elipse – no espaço, a curva resultante da secção é efetivamente uma **elipse** e não um círculo. Assim, para determinar a verdadeira grandeza da figura da secção é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano secante (o plano que contém a figura da secção) para o Plano Frontal de Projecção. A charneira foi **f_ψ**, que se identificou imediatamente (reta **e'**) – trata-se de uma reta vertical (projetante horizontal). Os planos que contém os arcos do rebatimento são planos horizontais (de nível) – são planos ortogonais à charneira. Tendo em conta que os arcos do rebatimento de cada ponto se projetam em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projecção e que os pontos mantêm as suas cotas ao longo do rebatimento, efetuou-se o rebatimento de cada um dos doze pontos da figura da secção, o que nos permitiu desenhar a curva em verdadeira grandeza (em rebatimento) com alguma precisão.

Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. As projecções do cilindro e os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se igualmente a **médio**. O traço horizontal do plano φ (o plano que contém a base de maior afastamento do sólido) representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. As duas projecções da figura da secção (um dos objetivos do exercício) representaram-se a **forte**, pois são parte do pedido. A verdadeira grandeza da figura da secção, que é a outra parte do pedido (outro dos objetivos do exercício) representou-se igualmente a **forte**. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso das geratrizes a que se recorreu ou, ainda, de todos os traçados necessários ao rebatimento do plano ψ).

174.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. Os dados permitiram-nos representar, ainda, o plano θ (o plano secante) pelos seus traços.

Resolução:

Determinação das projeções do cilindro:

A base inferior do cilindro está contida no Plano Horizontal de Projeção, pelo que se projeta em verdadeira grandeza em projeção horizontal. Assim, com o compasso, fazendo centro em **O**₁ (a projeção horizontal do ponto **O**) e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal da base inferior do sólido. A projeção frontal da circunferência é um segmento de reta sobre o eixo **X** (pois a base situa-se no Plano Horizontal de Projeção).

Em seguida, pelas projeções do ponto **O** conduziram-se as projeções homónimas da reta **f**, a reta suporte do eixo do sólido. A altura de um cilindro é a distância entre os planos que contêm as bases. Uma vez que a base inferior está contida no Plano Horizontal de Projeção e que a altura do sólido é 7 cm, o plano horizontal (de nível) que contém a base superior do sólido (o plano ν) tem 7 cm de cota ($0 + 7 = 7$). Assim, representou-se o plano ν pelo seu traço frontal (**f**_v). O plano ν não tem traço horizontal, pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto **O'**, o centro da base superior do sólido. O ponto **O'** é o ponto de interseção da reta **f** (a reta suporte do eixo do cilindro) com o plano ν (o plano que contém a base superior do sólido). O ponto **O'** determinou-se de forma direta, a partir da sua projeção frontal (pois o plano ν é um plano projetante frontal).

Em seguida, com o compasso, fazendo centro em **O'**₁ (a projeção horizontal do ponto **O'**) e também com 3,5 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal base superior do cilindro (que também se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção). A projeção frontal desta base é um segmento de reta sobre o traço frontal do plano ν (**f**_v), pois o plano ν é um plano projetante frontal.

Por fim, desenharam-se a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido (que é um paralelogramo cujos vértices são os pontos de maior e de menor abcissa das projeções frontais das duas bases) e a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do cilindro. O desenho da **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido processou-se com o recurso à construção necessária para determinar as retas tangentes a uma circunferência (as projeções horizontal das duas bases) que são paralelas a uma reta (a projeção horizontal da reta **f**, que é a reta suporte do eixo do cilindro). O arco mais à esquerda da circunferência que delimita a base inferior (e que está compreendido entre as duas geratrizes do contorno aparente horizontal) é **invisível** em projeção horizontal, o que se assinalou devidamente no desenho.

A **determinação da figura da secção produzida no cilindro** pelo plano θ , deve processar-se seguindo uma sequência de etapas, que em seguida se apresentam:

1. Identificar o tipo de secção (ou cónica) produzida pelo plano secante.
2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes do sólido.
3. Determinar o **espaço útil** em que a secção se desenvolve (que será útil para o eventual recurso aos planos paralelos às bases).
4. Recorrer a planos paralelos aos planos das bases ou a geratrizes da superfície, de forma a obter o número necessário de pontos para um desenho relativamente preciso da curva.

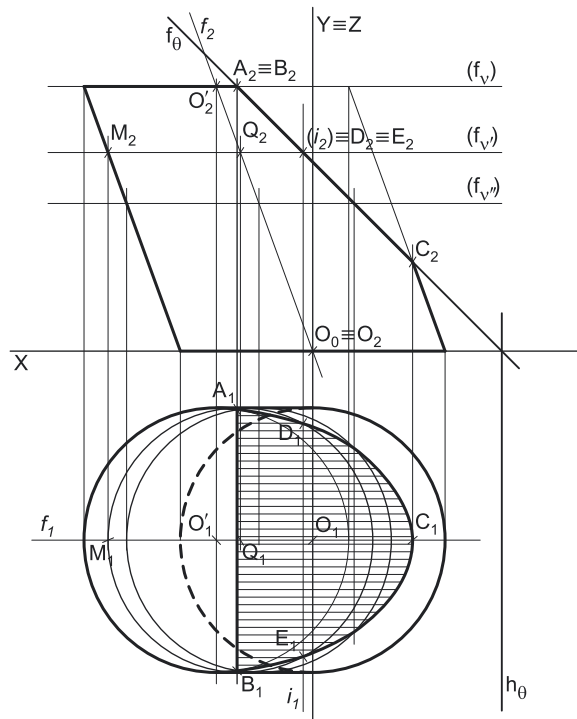
1. Identificação do tipo de secção (ou cónica) produzida pelo plano secante no sólido.

Para identificar a curva (a **cónica**) resultante da secção produzida pelo plano θ no cilindro há que recorrer ao **método geral para a identificação da figura da secção**, que se executa em duas etapas, a saber: **A**. analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante em relação aos planos das bases do cilindro – no caso de não ser paralelo àqueles, passa-se para a análise seguinte; **B**. analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante em relação ao eixo do cilindro.

A. Analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante (o plano θ) em relação aos planos das bases. O plano θ (um plano de topo) não é paralelo aos planos das bases (que são planos horizontais), pelo que a figura da secção **não é um círculo**.

B. Analisa-se a posição de eventual paralelismo do plano secante em relação ao eixo do cilindro. O eixo do cilindro está contido numa reta frontal (de frente) – a reta **f**. É possível constatar que o plano θ **não é paralelo** à reta **f**, pois a «família» das retas frontais (de frente) que o plano contém (a «família» de retas a que o seu traço frontal pertence) não é a «família» de retas da reta **f** – **f**₀ não é paralelo à reta **f**. Assim, o plano θ não verifica o **Critério de paralelismo entre planos e retas** em relação à reta **f**, pelo que a figura da secção produzida pelo plano θ no cilindro **não é um paralelogramo** – é uma **elipse**.

Atendendo a que o plano θ corta a base superior do cilindro (o que se constata diretamente, pois o plano θ é projetante frontal), a secção produzida pelo plano θ no cilindro é um **segmento de elipse**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes do sólido.

Tendo em conta que o plano θ é um plano projetante frontal, a determinação dos pontos em que o plano corta os contornos aparentes é direta.

O plano θ corta o **contorno aparente frontal** em três pontos – o plano θ corta a circunferência que delimita a base superior do sólido em dois pontos (os pontos **A** e **B**) e corta a geratriz mais à direita do contorno aparente frontal no ponto **C**. O plano θ não corta qualquer das linhas que integra o contorno aparente horizontal, pelo que o plano θ não corta o contorno aparente horizontal do cilindro.

Conclui-se que o plano θ corta os contornos aparentes do cilindro em três pontos – os pontos **A**, **B** e **C**. Já temos **três pontos** da figura da secção.

3. Determinar o espaço útil em que a secção se desenvolve (que será útil para o eventual recurso aos planos paralelos às bases).

Tendo em conta que as bases do sólido estão contidas em planos horizontais (de nível), o recurso a planos paralelos às bases refere-se ao recurso a planos horizontais (de nível). Estes têm de ser introduzidos no **espaço útil** da secção que é, precisamente, o espaço entre os **pontos de maior e de menor cota da secção** (porque os planos paralelos à base são planos horizontais). Tenha em conta que qualquer plano frontal (de frente) introduzido fora deste **espaço útil** não nos permitirá determinar qualquer ponto da secção, precisamente porque não existe secção fora desse **espaço útil**.

Uma vez que o plano θ (o plano secante) é um plano projetante frontal, é possível constatar, de forma imediata, que os pontos **A** e **B** (que se situam na base superior do cilindro) são os **pontos de maior cota** da secção e que **C** é o **ponto de menor cota** da secção (o que não seria possível garantir, caso o plano não fosse projetante frontal). Assim, o **espaço útil** é o espaço compreendido entre a base (onde se situam os pontos **A** e **B**) e o ponto **C**.

4. Recorrer a planos paralelos aos planos das bases ou a geratrizes da superfície, de forma a obter o número necessário de pontos para um desenho relativamente preciso da curva.

O recurso a planos paralelos aos planos das bases deve garantir que os pontos que eles nos permitem determinar estão distribuídos uniformemente pelo **espaço útil**, precisamente para garantir que o desenho da curva (à mão livre) se processe de uma forma o mais precisa possível. Uma vez que já temos três pontos da secção e que cada plano auxiliar nos permite determinar mais dois pontos, optou-se por se recorrer a dois planos auxiliares, de forma a obter um total de sete pontos da secção. Esses dois planos auxiliares (os planos v' e v'') foram distribuídos pelo **espaço útil** de modo mais ou menos uniforme.

O plano v' , porque é paralelo aos planos das bases, produz, no cilindro, uma secção circular. O centro desse círculo é o ponto **Q**, que é o ponto em que o plano v' intersecta o eixo do cilindro. O raio desse círculo é a distância do ponto **Q** ao ponto de interseção de uma qualquer geratriz do cone com o plano v' . Assim, determinou-se o ponto **M**, que é o ponto em que o plano v' corta a geratriz mais à esquerda do contorno aparente frontal do cilindro. Os pontos **Q** e **M** foram determinados diretamente, a partir das suas projeções frontais, pois o plano v' é um plano projetante frontal. O círculo com centro no ponto **Q** raio **QM** é a secção que o plano v' produz no cilindro (que se projeta em verdadeira grandeza em projeção horizontal). Assim, com o compasso, fazendo centro em **Q₁** (a projeção horizontal do ponto **Q**) e com raio **Q₁M₁**, desenhou-se a circunferência que delimita a projeção horizontal do círculo.

Em seguida, determinou-se a reta de interseção do plano v' (o plano auxiliar) com o plano θ (o plano secante), que é uma reta de topo (uma reta projetante frontal), cujas projeções não se identificaram. Os pontos em que esta reta corta a circunferência são mais dois pontos da secção – os pontos **D** e **E**. Estes pontos foram determinados a partir das suas projeções horizontais – as suas projeções frontais (**D₂** e **E₂**) situam-se sobre o traço frontal do plano v' , pois o plano v' é um plano projetante frontal. Já temos mais dois pontos da secção, o que perfaz um total de **cinco pontos**.

O processo atrás exposto para a determinação dos pontos **D** e **E** repetiu-se mais uma vez. O plano v'' é o outro plano horizontal (de nível) a que se recorreu. Em seguida, determinou-se a secção que esse plano produz no cilindro, de forma semelhante à exposta anteriormente. Por fim, determinou-se a reta de interseção desse plano com o plano θ e a interseção entre as duas figuras (a reta e a circunferência) permitiu-nos determinar mais dois pontos da secção. Já temos **sete pontos** da secção. Note que se omitiram todas as notações referentes aos pontos sucessivamente determinados, de forma a não sobrecarregar em demasia a resolução gráfica apresentada.

Determinação das projeções do sólido resultante da secção.

Em seguida, desenharam-se as projeções do **sólido resultante da secção** (que é um outro sólido – uma parte do sólido inicial), começando pelos seus contornos aparentes. O **sólido resultante da secção** é, no presente caso, a parte do cilindro compreendida entre o plano secante e o Plano Horizontal de Projeção.

O **contorno aparente horizontal** deste novo sólido é o idêntico ao **contorno aparente horizontal do cilindro**, pois o plano secante não cortou nenhuma das linhas que integram o contorno aparente horizontal do cilindro. A **projeção frontal do contorno aparente frontal** é a linha poligonal com cinco lados (um pentágono irregular) que integra o segmento [**A₂C₂**], a projeção frontal da base inferior, a projeção frontal da geratriz de maior abcissa do cilindro e partes da projeção frontal da base superior e da projeção frontal da geratriz de maior abcissa do cilindro.

A **figura da secção**, porque é visível em projeção horizontal (a área do corte é visível em projeção horizontal), foi identificada com o recurso a tracejado, paralelamente ao eixo **X** (em projeção horizontal).

Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y \equiv Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). Os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. As projeções do cilindro, apesar de integrarem igualmente os dados, representaram-se a **leve** pois, nesta situação, são um traçado auxiliar para atingir o objetivo pretendido (o sólido resultante da secção). As duas projeções do **sólido resultante da secção** (o objetivo do exercício) representaram-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos planos horizontais auxiliares, ou, ainda, das projeções horizontais das secções circulares produzidas por aqueles no cilindro).

175.

Dados:

Uma vez que a esfera, que tem 3,5 cm de raio, é tangente aos dois planos de projeção, é possível inferir que no seu centro (o ponto **O**) tem 3,5 cm tanto de cota como de afastamento. Assim, em primeiro lugar representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função do exposto. Em seguida, representou-se o plano φ (o plano secante), pelo seu traço horizontal, em função dos dados. O plano φ não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.

Resolução:

Determinação das projeções da esfera:

As duas projeções da esfera são círculos com 3,5 cm de raio e centros nas respetivas projeções do centro da esfera.

Nesse sentido, a **projeção horizontal** da esfera é a própria projeção horizontal do seu **círculo máximo horizontal** – este projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção, pois é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção. Assim, a projeção horizontal da esfera é um círculo com 3,5 cm de raio e centro em **O₁** (a projeção horizontal do ponto **O**).

Por outro lado, a **projeção frontal** da esfera é a própria projeção frontal do seu **círculo máximo frontal** – este projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção, pois é paralelo ao Plano Frontal de Projeção. Assim, a projeção frontal da esfera é um círculo com 3,5 cm de raio e centro em **O₂** (a projeção frontal do ponto **O**).

Os diâmetros fronto-horizontais dos dois círculos máximos (que são meramente auxiliares) permitem relacionar as duas projeções da esfera – os pontos de maior e de menor abscissa do círculo máximo frontal da esfera (os extremos do seu diâmetro fronto-horizantal) são, também, os pontos de maior e de menor abscissa do círculo máximo horizontal da esfera (os extremos do seu diâmetro fronto-horizantal), o que se assinalou com as respetivas linhas de chamada.

Determinação da figura da secção:

A secção produzida por qualquer plano numa esfera será sempre um **círculo** – o centro desse círculo é o ponto de interseção do plano secante com o raio da esfera que é ortogonal ao plano secante e o raio do círculo é a distância desse ponto (o centro do círculo) a um dos pontos de interseção do plano secante com qualquer círculo máximo que contenha aquele raio.

A **determinação da figura da secção produzida na esfera** pelo plano φ , deve processar-se seguindo uma sequência de etapas, que em seguida se apresentam:

1. Determinar o centro do círculo resultante da secção (que é o ponto de interseção do plano secante com o raio da esfera que é ortogonal ao plano secante).
2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes da esfera.
3. Determinar o raio do círculo resultante da secção.
4. No caso de a figura da secção não se projetar em verdadeira grandeza, determinar um número mínimo de pontos que nos permita um desenho relativamente preciso da curva de erro, recorrendo a planos paralelos aos planos de projeção ou ao rebatimento prévio da figura da secção.

1. Determinar o centro do círculo resultante da secção (que é o ponto de interseção do plano secante com o raio da esfera que é ortogonal ao plano secante).

Determinou-se o centro do **círculo**, que é o ponto **Q** – o ponto de interseção do plano φ (o plano secante) com o raio da esfera que é ortogonal ao plano φ (um raio de topo). Tenha em conta que o ponto **Q** é o ponto de interseção do plano φ com o raio de topo (projetante frontal) da esfera está compreendido entre o ponto **O** (o centro da esfera) e o Plano Frontal de Projeção. O ponto **Q** foi determinado de forma direta, a partir da sua projeção horizontal, pois o plano φ é um plano projetante horizontal.

2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes da esfera.

Em seguida, determinaram-se os pontos que o plano φ corta os contornos aparentes da esfera. O plano φ não corta o **contorno aparente frontal** da esfera, pois é paralelo ao plano que contém o contorno aparente frontal do sólido. O plano φ corta o **contorno aparente horizontal** da esfera nos pontos **A** e **B** – os pontos **A** e **B** foram determinados de forma direta, a partir das suas projeções horizontais, pois o plano φ (o plano secante) é um plano projetante horizontal.

3. Determinar o raio do círculo resultante da secção.

O raio da figura da secção (o **círculo** resultante da secção) é a distância do ponto **Q** a qualquer dos pontos **A** e **B**.

4. No caso de a figura da secção não se projetar em verdadeira grandeza, determinar um número mínimo de pontos que nos permita um desenho relativamente preciso da curva de erro, recorrendo a planos paralelos aos planos de projeção ou ao rebatimento prévio da figura da secção.

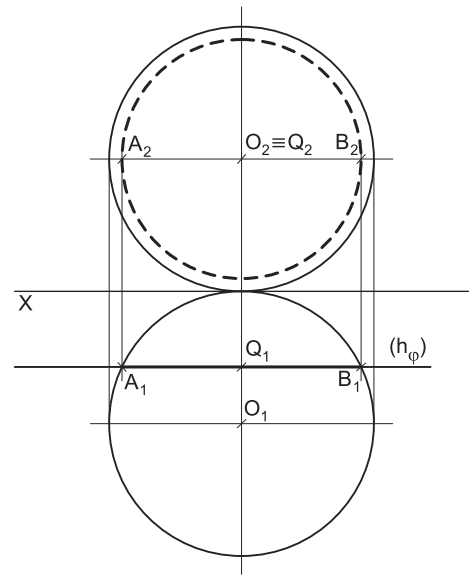
Tendo em conta que o plano que contém a figura da secção (o plano φ) é paralelo ao Plano Frontal de Projeção, a figura da secção projeta-se em verdadeira grandeza em projeção frontal, pelo que não é necessária a determinação de quaisquer outros pontos da curva.

Assim, com o compasso, fazendo centro em **Q₂** (a projeção frontal do ponto **Q**) e com raio $\overline{Q_2A_2} = \overline{Q_2B_2}$, desenhou-se a projeção frontal da figura da secção. A **projeção horizontal** da figura da secção (o segmento $[A_1B_1]$) reduz-se a um segmento de reta sobre h_φ (o traço horizontal do plano φ), pois o plano φ é um plano projetante horizontal. Por outro lado, atendendo a que não houve a desagregação do sólido (é pedida a **figura da secção** e não o **sólido resultante da secção**), há que representar as eventuais invisibilidades da figura.

A figura da secção (o **círculo** resultante da secção) é **invisível** em **projeção frontal**, na sua totalidade, pois situa-se na parte **invisível** da superfície do sólido. Uma vez que a **figura da secção**, em projeção horizontal, se reduz a um segmento de reta, não há quaisquer invisibilidades a registar em projeção horizontal.

Traçado:

O eixo **X** representa-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. As projeções da esfera e o traço horizontal do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. As duas projeções da figura da secção (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são o pedido. Todas as restantes linhas são a **leve**, pois ou são linhas auxiliares (caso dos diâmetros fronto-horizontais das duas circunferências) ou são linhas de chamada.



176.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto O , pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano γ (o plano secante), pelos seus traços, em função dos dados.

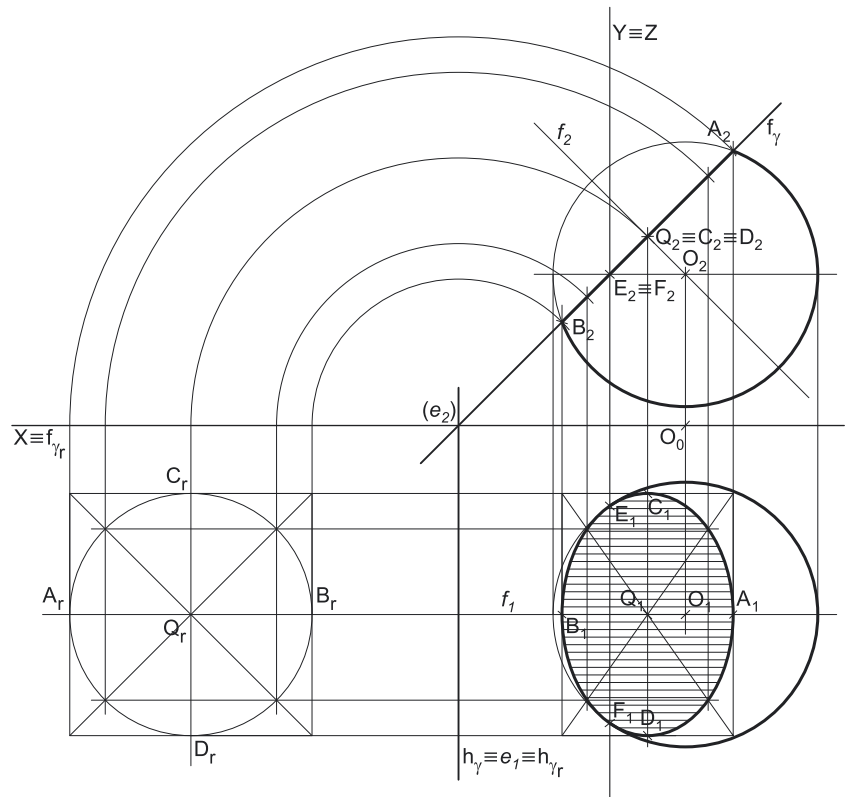
Resolução:*Determinação das projeções da esfera:*

As duas projeções da esfera são círculos com 3,5 cm de raio e centros nas respetivas projeções do centro da esfera.

Nesse sentido, a **projeção horizontal** da esfera é a própria projeção horizontal do seu **círculo máximo horizontal** – este projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção, pois é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção. Assim, a projeção horizontal da esfera é um círculo com 3,5 cm de raio e centro em O_1 (a projeção horizontal do ponto O).

Por outro lado, a **projeção frontal** da esfera é a própria projeção frontal do seu **círculo máximo frontal** – este projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção, pois é paralelo ao Plano Frontal de Projeção. Assim, a projeção frontal da esfera é um círculo com 3,5 cm de raio e centro em O_2 (a projeção frontal do ponto O).

Os diâmetros fronto-horizontais dos dois círculos máximos (que são meramente auxiliares) permitem relacionar as duas projeções da esfera – os pontos de maior e de menor abscissa do círculo máximo frontal da esfera (os extremos do seu diâmetro fronto-horizontal) são, também, os pontos de maior e de menor abscissa do círculo máximo horizontal da esfera (os extremos do seu diâmetro fronto-horizontal), o que se assinalou com as respetivas linhas de chamada.

*Determinação da figura da secção:*

A secção produzida por qualquer plano numa esfera será sempre um **círculo** – o centro desse círculo é o ponto de interseção do plano secante com o raio da esfera que é ortogonal ao plano secante e o raio do círculo é a distância desse ponto (o centro do círculo) a um dos pontos de interseção do plano secante com qualquer círculo máximo que contenha aquele raio.

A **determinação da figura da secção produzida na esfera** pelo plano γ , deve processar-se seguindo uma sequência de etapas, que em seguida se apresentam:

1. Determinar o centro do círculo resultante da secção (que é o ponto de interseção do plano secante com o raio da esfera que é ortogonal ao plano secante).
2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes da esfera.
3. Determinar o raio do círculo resultante da secção.
4. No caso de a figura da secção não se projetar em verdadeira grandeza, determinar um número mínimo de pontos que nos permita um desenho relativamente preciso da curva de erro, recorrendo a planos paralelos aos planos de projeção ou ao rebatimento prévio da figura da secção.

1. Determinar o centro do círculo resultante da secção (que é o ponto de interseção do plano secante com o raio da esfera que é ortogonal ao plano secante).

A reta f , frontal (de frente) é a reta que passa pelo ponto O (centro da esfera) e é ortogonal ao plano γ (pois verifica o **Critério de ortogonalidade entre retas e planos**) – a reta f e, assim, a reta que contém o raio da esfera que é ortogonal ao plano γ . Em seguida, determinou-se o centro do **círculo** resultante da secção, que é o ponto Q – o ponto de interseção do plano γ (o plano secante) com a reta f . O ponto Q foi determinado de forma direta, a partir da sua projeção frontal, pois o plano γ é um plano projetante frontal.

2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes da esfera.

Em seguida, determinaram-se os pontos que o plano γ corta os contornos aparentes da esfera. O plano γ corta o **contorno aparente frontal** da esfera (o círculo máximo frontal da esfera) nos pontos A e B – os pontos A e B foram determinados de forma direta, a partir das suas projeções horizontais, pois o plano γ (o plano secante) é um plano projetante horizontal. O plano γ corta o **contorno aparente horizontal** da esfera (o círculo máximo horizontal da esfera) nos pontos E e F – os pontos E e F foram determinados de forma direta, a partir das suas projeções frontais, pois o plano γ (o plano secante) é um plano projetante frontal.

3. Determinar o raio do círculo resultante da secção.

O raio da figura da secção (o **círculo** resultante da secção) é a distância do ponto Q a qualquer dos pontos A , B , E ou F .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

4. No caso de a figura da secção não se projetar em verdadeira grandeza, determinar um número mínimo de pontos que nos permita um desenho relativamente preciso da curva de erro, recorrendo a planos paralelos aos planos de projeção ou ao rebatimento prévio da figura da secção.

Tendo em conta que o plano que contém a figura da secção (o plano γ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, a figura da secção não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções (está deformada em ambas as projeções) – a **projeção frontal** da figura da secção é um **segmento de reta** sobre o traço frontal do plano γ (pois o plano γ é um plano projetante frontal) e a sua **projeção horizontal** é necessariamente uma **elipse** (resultante da deformação do círculo em projeção horizontal). Nesse sentido, o desenho da **elipse** que é a **projeção horizontal do círculo** (e que é uma **curva de erro**), carece da determinação de oito pontos da curva, para um desenho relativamente preciso da curva à mão livre.

Note que, ao contrário das **secções cônicas** e **secções cilíndricas**, nesta situação a figura da secção **não é uma elipse** – a figura da secção é um **círculo**, embora a sua projeção seja uma **elipse**. Assim, a curva cônica (a **elipse**) não é a **figura da secção em si** mas, sim, a **sua projeção**, deformada pela situação da própria projeção.

Já temos quatro pontos para o desenho da curva – os pontos **A, B, E e F**. No entanto, o desenho (à mão livre) relativamente preciso da curva requer um mínimo de **oito pontos**.

Para a determinação dos restantes pontos necessários ao desenho da **elipse** optou-se pelo rebatimento do plano γ (o plano secante) e pelo desenho prévio da figura da secção, em rebatimento. Optou-se pelo rebatimento do plano γ para o Plano Horizontal de Projeção – a charneira (reta **e**) é o traço horizontal do plano (h_γ), que roda sobre si próprio e que é uma reta de topo (projetante frontal). Os planos ortogonais à charneira são planos frontais (de frente), pelo que os arcos do rebatimento se projetam em verdadeira grandeza em projeção frontal.

Efetuuou-se o rebatimento dos pontos **Q, A e B**, o que nos permitiu obter **Q_r, A_r e B_r**. A figura da secção é um círculo com centro no ponto **Q** e raio $\overline{QA} = \overline{QB}$. Assim, com o compasso, fazendo centro em **O_r** e com raio $\overline{Q_r A_r} = \overline{Q_r B_r}$, desenhou-se a figura da secção em rebatimento (em verdadeira grandeza).

Para determinar os elementos necessários ao desenho (à mão livre) da **elipse**, inscreveu-se a circunferência num quadrado de lados paralelos à charneira do rebatimento. Em seguida, desenharam-se as suas medianas (os segmentos paralelos aos lados e que passam pelo ponto **O_r**) bem como as suas diagonais. Os pontos em que as medianas do quadrado (em rebatimento) se apoiam nos lados do quadrado são, imediatamente, **quatro** pontos da circunferência – os pontos **A_r, B_r, C_r e D_r** (note que os pontos **A e B** são os pontos em que o plano γ corta o contorno aparente frontal).

[**C_rD_r**] é, em rebatimento, o diâmetro da circunferência que é paralelo à charneira, pelo que não sofre qualquer deformação em projeção – [**CD**] projeta-se em verdadeira grandeza em projeção horizontal. Assim, a projeção horizontal do diâmetro [**CD**] corresponderá ao **eixo maior** da elipse. [**A_rB_r**] é, em rebatimento, o diâmetro da circunferência que é perpendicular à charneira, pelo que sofre a deformação máxima em projeção – [**AB**] projeta-se com a máxima redução em projeção horizontal. Assim, a projeção horizontal do diâmetro [**AB**] corresponderá ao **eixo menor** da elipse.

Inverteu-se o rebatimento do plano γ , o que nos permitiu determinar as projeções dos pontos **C e D**, bem como desenhar a projeção horizontal do quadrado (que é um retângulo, pois está deformada). As projeções horizontais dos pontos **A, B, C e D** (**A₁, B₁, C₁ e D₁**) são, imediatamente, os pontos em que a **elipse** (que é a projeção horizontal do **círculo**) será tangente aos lados do retângulo envolvente. Já temos **seis pontos** para o desenho da elipse (os pontos **A, B, C, D, E e F**).

Os pontos em que a circunferência corta as diagonais do quadrado são mais **quatro** pontos cujas projeções horizontais serão os mais **quatro** pontos que nos permitirão o desenho da curva da **elipse** com alguma precisão. Em projeção horizontal, desenharam-se as diagonais do retângulo (que são as projeções horizontais das diagonais do quadrado). Em seguida transportaram-se, para as diagonais do retângulo, os pontos em que a circunferência (em rebatimento) corta as diagonais do quadrado – esse transporte processou-se com o recurso aos planos frontais (de frente) que contêm os arcos do rebatimento daqueles pontos. Este procedimento permitiu-nos determinar mais **quatro pontos** para o desenho da **elipse**. A partir dos **dez pontos** determinados, procedeu-se ao desenho da curva (à mão livre), atendendo às situações de tangência da curva aos lados do retângulo acima referidas.

Salienta-se, ainda, que a **projeção horizontal da figura da secção** (a **elipse**) é tangente ao contorno aparente horizontal nos pontos **E₁ e F₁** (as projeções horizontais dos pontos **E e F**).

Determinação das projeções do sólido resultante da secção:

A partir do desenho da figura da secção, foi possível desenhar as projeções **sólido resultante da secção** (que é um outro sólido – uma parte da esfera inicial), que é a parte do sólido compreendida entre o plano secante e o Plano Horizontal de Projeção.

A **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido resultante da secção é a linha mista fechada que integra o segmento [**A₂B₂**] bem como o arco maior **A₂B₂** da circunferência que delimita a projeção frontal da esfera. A **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido resultante da secção a linha curva fechada que integra o arco **E₁B₁F₁**, da elipse, bem como o arco maior **E₁F₁** da circunferência que delimita a projeção horizontal da esfera.

A **figura da secção**, porque é **visível em projeção horizontal** (a área do corte é visível em projeção horizontal), foi identificada com o recurso a tracejado, paralelamente ao eixo **X** (em projeção horizontal).

Traçado:

O eixo **X** representa-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y \equiv Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). As projeções da esfera, apesar de integrarem igualmente os dados, representaram-se a **leve** pois, nesta situação, são um traçado auxiliar para atingir o objetivo pretendido (o sólido resultante da secção). Os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. As duas projeções do **sólido resultante da secção** (o objetivo do exercício) representaram-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traçados referentes ao rebatimento do plano γ para a determinação dos pontos necessários ao desenho da elipse). O tracejado que preenche a figura da secção (em projeção horizontal) executou-se a **leve**.

177.

Dados:

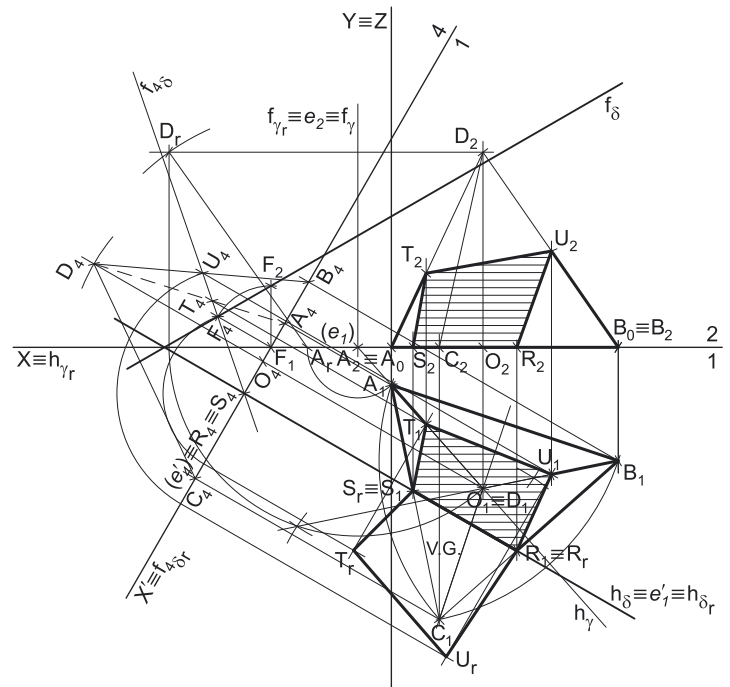
Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Os dados permitiram-nos representar, também, o plano δ (o plano secante), pelos seus traços. O plano δ tem os seus traços simétricos em relação ao eixo **X**, pois é um plano ortogonal ao $\beta_{1/3}$ (planos ortogonais ao $\beta_{1/3}$ têm os seus traços simétricos em relação ao eixo **X**).

Resolução:

Determinação das projeções do tetraedro:

A face inferior do sólido (o triângulo equilátero **[ABC]**) está contida no Plano Horizontal de Projeção, pelo que está em verdadeira grandeza em projeção horizontal. Assim, a partir de **A**₁ e **B**₁, efetuou-se a construção do triângulo equilátero, o que nos permitiu determinar **C**₁ (a projeção horizontal do terceiro vértice do triângulo), bem como **O**₁ (a projeção horizontal do centro do triângulo) – a projeção frontal da figura situa-se no eixo **X**, pois todos os seus vértices têm cota nula. A determinação do ponto **O** não teve a ver com a construção da figura (o triângulo **[ABC]**) mas, sim, com a subsequente construção do sólido.

Um tetraedro toma a forma aparente de uma **pirâmide triangular regular**, qualquer que seja a face que se considere como base. Assim, o vértice **D** (o quarto vértice do sólido) situa-se numa reta que passa pelo ponto **O** e que é ortogonal ao plano que contém o triângulo **[ABC]** (que é o Plano Horizontal de Projeção), ou seja, situa-se na reta vertical (projetante horizontal) que passa pelo ponto **O**. Dessa forma, determinou-se **D**₁, a projeção horizontal do vértice **D**, coincidente com a projeção horizontal do ponto **O** (**O**₁).



Apesar de o tetraedro tomar a forma aparente de uma pirâmide triangular regular, não é conhecida a altura dessa pirâmide mas, sim, é adquirido o facto de que **todas as arestas do tetraedro são iguais** (têm o mesmo comprimento), pois trata-se de um **poliedro regular**. Assim, é um facto que todas as arestas que convergem no vértice **D** (as arestas **[AD]**, **[BD]** e **[CD]**) têm o mesmo comprimento dos lados do triângulo **[ABC]** (que estão em verdadeira grandeza em projeção horizontal). No entanto, nenhuma daquelas arestas se projeta em verdadeira grandeza em qualquer dos planos de projeção, pois nenhuma daquelas três arestas é paralela a qualquer dos planos de projeção. Assim, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo rebatimento do plano projetante horizontal da aresta **[AD]** – o plano γ . Nesse sentido, conduziu-se, pela aresta **[AD]**, o seu plano projetante horizontal (o plano γ), que se representou pelos seus traços.

Efeituou-se o rebatimento do plano γ para o Plano Frontal de Projeção. Nesse sentido, identificou-se a charneira (que é o traço frontal do plano – f_γ), bem como os planos ortogonais à charneira, que são planos horizontais – os arcos do rebatimento projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção. Rebateram-se os pontos **A** e **O** (cujos arcos do rebatimento estão contidos no próprio Plano Horizontal de Projeção), determinando **A**_r e **O**_r. Por **O**_r conduziu-se uma perpendicular ao eixo **X**, que corresponde ao eixo do sólido (relativo à face **[ABC]**) em rebatimento. Em seguida, com o compasso, fazendo centro em **A**_r e com raio igual à medida do lado do triângulo **[ABC]** (que está em verdadeira grandeza em projeção horizontal), determinou-se **D**_r sobre a perpendicular ao eixo **X** que passa por **O**_r, desenhando-se em seguida a aresta **[AD]** em rebatimento – o segmento **[A_rD_r]**.

Uma vez que, no rebatimento efetuado, os pontos mantêm as suas cotas, transportou-se a cota do ponto **D** para a sua linha de chamada (através de uma paralela ao eixo **X**, que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento), determinando-se **D**₂ (a projeção frontal do ponto **D**).

Em seguida, a partir das projeções dos quatro vértices do tetraedro, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é a linha fechada **[ACBD]**, cuja projeção frontal é o polígono **[A₂C₂B₂D₂]**. Todos os vértices do sólido pertencem ao contorno aparente frontal. No entanto, a aresta **[AB]** é invisível em projeção frontal, pois separa duas faces invisíveis em projeção frontal (as faces **[ABD]** e **[ABC]**). Note, ainda, que **A** e **B** são os vértices de menor afastamento do sólido. Apesar disso, a aresta **[AB]** está oculta por arestas visíveis, pelo que, em projeção frontal, não há quaisquer invisibilidades a assinalar. Por outro lado, há a referir que a aresta **[CD]** é visível em projeção frontal, pois separa duas faces visíveis em projeção frontal (o vértice **C** é o vértice de maior afastamento do sólido).

O contorno aparente horizontal é o triângulo **[ABC]**, cuja projeção horizontal é o triângulo **[A₁B₁C₁]**. Em projeção horizontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente horizontal – o vértice **D**. Este, por ser o vértice de **maior cota** do tetraedro, é **visível**, bem como todas as arestas que neles convergem, ou seja, as arestas **[AD]**, **[BD]** e **[CD]** são visíveis em projeção horizontal.

a) Determinação das projeções da figura da secção:

O plano secante (o plano δ) é um plano não projetante, pelo que a determinação dos pontos em que o plano secante corta as arestas do sólido não é direta. Nesse sentido, optou-se por se recorrer a uma mudança do diedro de projeção de forma a transformar o plano secante num plano projetante. Há que tentar, na mudança do diedro de projeção a efetuar, que se mantenha o plano no qual a face **[ABC]** do tetraedro se projeta em verdadeira grandeza, por uma questão de economia de traçados.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Nesse sentido, é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção por um outro plano (o **plano 4**), que seja ortogonal ao plano δ , de forma a transformar o plano δ num plano projetante. Assim, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é ortogonal ao plano δ , o eixo **X'** é perpendicular ao traço horizontal do plano (h_δ). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**). **A₄**, **B₄** e **C₄** são as projeções dos pontos **A**, **B** e **C** no **plano 4** e determinaram-se em função das suas cotas, que se mantiveram (os pontos têm cota nula, pelo que as suas projeções no **plano 4** situam-se no eixo **X'**). **D₄** é a projeção do ponto **D** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de **D₄** ao eixo **X'** é igual à distância de **D₂** ao eixo **X**. A partir das projeções dos quatro vértices do sólido no **plano 4**, desenhou-se a projeção do tetraedro no **plano 4**, atendendo às invisibilidades que se verificam no novo diedro de projeção (a aresta **[AV]** é a única invisibilidade a assinalar).

Em seguida, foi necessário determinar o traço do plano ρ no **plano 4** – **f₄**. Para tal recorreu-se a um ponto qualquer de **f_p** – o ponto **F**. **F₄** é a projeção do ponto **F** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de **F₄** ao eixo **X'** é igual à distância de **F₂** ao eixo **X**. Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano Δ é um plano projetante frontal, o traço do plano δ no **plano 4** (**f₄**) está definido por dois pontos – o seu ponto de concorrência com **h_δ** (que se situa no eixo **X'**) e **F₄** (a nova projeção frontal do ponto **F**).

No novo diedro de projeção, o plano secante (o plano δ) é um plano projetante frontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta duas arestas da face **[ABC]** (as arestas **[BC]** e **[AC]**, nos pontos **R** e **S**, respetivamente), bem como a aresta **[AC]** (no ponto **T**) e a aresta **[BC]** (no ponto **U**). Nesse sentido, a figura da secção tem **quatro vértices** – é um **quadrilátero**.

As projeções dos **quatro vértices** da **figura da secção** no **plano 4** determinaram-se de forma direta pois, no diedro de projeção formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**, o plano δ (o plano secante) é um plano projetante frontal. Em seguida, determinaram-se as projeções horizontais (no **plano 1**) dos pontos **R**, **S**, **T** e **U** (os quatro vértices da figura da secção), de forma direta, a partir das suas projeções no **plano 4**.

Por fim, a partir das projeções horizontais daqueles pontos (no **plano 1**), foi possível determinar as suas projeções frontais (no **plano 2**), no diedro de projeção inicial, de forma direta. O ponto **R** é o ponto em que o plano δ corta a aresta **[BC]**, pelo que a sua projeção frontal (**R₂**) se situa sobre a projeção frontal da aresta **[BC]** (**[B₂C₂]**). O ponto **S** é o ponto em que o plano ρ corta a aresta **[AC]**, pelo que a sua projeção frontal (**S₂**) se situa sobre a projeção frontal da aresta **[AC]** (**[A₂C₂]**). O ponto **T** é o ponto em que o plano δ corta a aresta **[AD]**, pelo que a sua projeção frontal (**T₂**) se situa sobre a projeção frontal da aresta **[AD]** (**[A₂D₂]**). O ponto **U** é o ponto em que o plano δ corta a aresta **[BD]**, pelo que a sua projeção frontal (**U₂**) se situa sobre a projeção frontal da aresta **[BD]** (**[B₂D₂]**).

A partir das projeções de todos os vértices da figura da secção, foi possível desenhar as suas duas projeções, bem como as projeções do sólido resultante da secção.

Determinação das projeções do sólido resultante da secção:

A partir de todos os vértices do **sólido resultante da secção** (que é um outro sólido – uma parte do sólido inicial), determinaram-se os seus contornos aparentes. O **sólido resultante da secção** é, no presente caso, um tronco do tetraedro – o tronco do tetraedro cuja base é o quadrilátero **[ABRS]** e em que uma face é o quadrilátero **[RSTU]** (que é, afinal, a parte do sólido compreendida entre o plano secante e o Plano Horizontal de Projeção).

O contorno aparente frontal é a linha fechada **[ATUBRS]**, cuja projeção frontal é o polígono **[A₂T₂U₂B₂R₂S₂]**. Todos os vértices do sólido integram o contorno aparente frontal. No entanto, a aresta **[AB]** é invisível em projeção frontal, pois separa duas faces invisíveis em projeção frontal (as faces **[ATUB]** e **[ABRS]**). Note, ainda, que **A** e **B** são os vértices de menor afastamento do sólido. Apesar disso, a aresta **[AB]** está oculta por arestas visíveis, pelo que, em projeção frontal, não há quaisquer invisibilidades a assinalar. Por outro lado, há a referir que as arestas **[ST]** e **[RU]** são visíveis em projeção frontal, pois separam faces visíveis em projeção frontal (os vértices **R** e **S** são os vértices de maior afastamento do sólido).

O contorno aparente horizontal é a linha fechada **[ABRS]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[A₁B₁R₁S₁]**. Em projeção horizontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices **T** e **U**. Estes vértices, por serem os vértices de **maior cota** do sólido, são **visíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[AT]**, **[TU]**, **[ST]**, **[RU]** e **[UB]**.

A **figura da secção**, porque **é visível em ambas as projeções** (a área do corte é visível em ambas as projeções), foi identificada com o recurso a tracejado, paralelamente ao eixo **X** (em ambas as projeções).

- b) O plano que contém a figura da secção (o plano secante – o plano δ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que a figura da secção não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções. Assim, para determinar a verdadeira grandeza da figura da secção é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano secante (o plano δ) para o Plano Horizontal de Projeção, com vista a uma maior economia de meios (os pontos **R** e **S**, da figura da secção, são dois pontos do Plano Horizontal de Projeção). Por outro lado, de forma a economizar traçados, rebateu-se o plano δ no diedro de projeção formado pelo **plano 1** (o Plano Horizontal de Projeção) e pelo **plano 4**, o qual o plano δ é um plano de topo (um plano projetante frontal. Assim, identificou-se a charneira do rebatimento, que foi **h_δ** (reta **e'**), o que se assinalou convenientemente. Os pontos **R** e **S** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos) – tem-se imediatamente **R_r ≡ R₁** e **S_r ≡ S₁**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, efetuou-se o rebatimento do plano δ como um plano projetante. Nesse diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), os planos ortogonais à charneira (que contém os arcos do rebatimento, são planos frontais (de frente), paralelos ao **plano 4**. Assim, os pontos **T** e **U**, ao longo do seu rebatimento, mantêm os seus afastamentos. Por outro lado, os arcos do rebatimento dos pontos **T** e **U** projetam-se em verdadeira grandeza no **plano 4**. Reberam-se os pontos **T** e **U**, o que nos permitiu determinar T_r e U_r . Por fim desenhou-se o quadrilátero $[R_r, S_r, T_r, U_r]$, que é a figura da secção em verdadeira grandeza (em rebatimento), o que se assinalou convenientemente no desenho.

Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y** \equiv **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). Os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. As projeções do tetraedro, apesar de integrarem igualmente os dados, representaram-se a **leve** pois, nesta situação, são um traçado auxiliar para atingir o objetivo pretendido (o sólido resultante da secção). As duas projeções do **sólido resultante da secção** (um dos objetivos do exercício) representaram-se a **forte**, pois são parte do pedido. A verdadeira grandeza da figura da secção, que é a outra parte do pedido (outro dos objetivos do exercício) representou-se igualmente a **forte**. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traçados referentes ao rebatimento do plano γ e necessários à construção das projeções do tetraedro, os traçados relativos à mudança do diedro de projeção para a determinação da figura da secção e, ainda, os referentes à determinação da verdadeira grandeza da figura da secção). O tracejado que preenche a figura da secção (em ambas as projeções) executou-se a **leve**.

178.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **A**, pelas suas projeções, bem como o plano π (o plano de perfil que contém o quadrado $[ABCD]$), pelos seus traços, em função dos dados. Os traços do plano π passam pelas projeções do ponto **A**, pois o plano π é um plano duplamente projetante. Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano ρ (o plano secante) pelo seu traço horizontal, bem como a projeção horizontal do ponto **B** (B_1), que tem afastamento nulo.

Resolução:

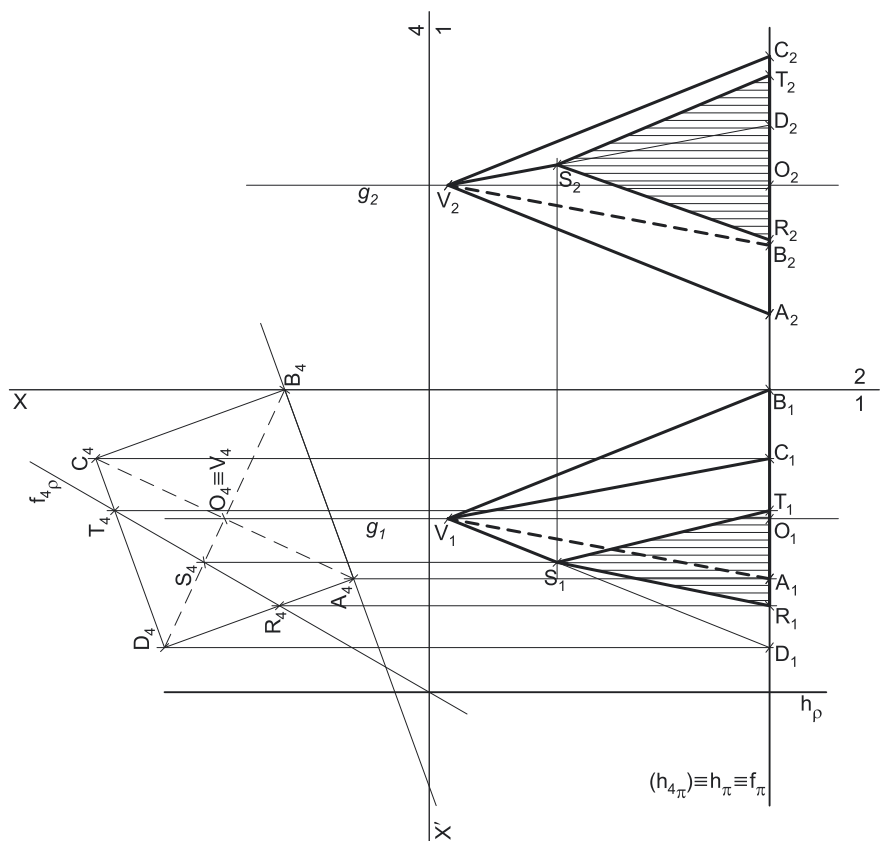
Determinação das projeções do quadrado $[ABCD]$:

A base da pirâmide (o quadrado $[ABCD]$) está contida num plano de perfil, que não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o quadrado não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Por outro lado, o ângulo dado não é um ângulo em projeções – é um **ângulo real** (é o ângulo que o lado $[AB]$ faz com h_π), que está contido no plano π e que, por isso, também não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo recurso a uma mudança do diedro de projeção.

Nesse sentido, substituiu-se o Plano Frontal de Projeção por um outro plano (o **plano 4**), que paralelo ao plano π , de forma a transformar o plano π num plano frontal (de frente). Nesse sentido, foi criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções**, **mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas**, **mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo X') é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com $1/4$. Como o **plano 4** é paralelo ao plano π , o eixo X' é paralelo ao traço horizontal do plano (h_π). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo X' (o novo eixo **X**). A_4 é a projeção do ponto **A** no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de A_4 ao eixo X' é igual à distância de A_2 ao eixo **X** (que é 2 cm – a cota de **A**).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

No **plano 4**, já é possível medir o ângulo que o lado **[AB]** faz com o Plano Horizontal de Projeção. Assim, a partir de **A₄**, desenhou-se o outro lado do ângulo (a projeção da reta suporte do lado **[AB]** no **plano 4**), fazendo um ângulo de 20° com o eixo **X'**, sendo que, das duas hipóteses, a que o desenho apresenta é a única que nos garante que o quadrado se situe no espaço do 1^a Diedro. Em seguida, determinou-se **B₄** (a projeção do ponto **B** no **plano 4**), a partir da sua projeção horizontal (**B₁**), que se manteve (pois o ponto **B** tem afastamento nulo). A partir de **A₄** e **B₄**, construiu-se a projeção do quadrado **[ABCD]** no **plano 4**, em verdadeira grandeza (o quadrado **[A₄B₄C₄D₄]**), tendo-se determinado, igualmente, o ponto **O₄** (a projeção do centro do quadrado no **plano 4**). A importância do ponto **O** tem a ver com o facto de serem pedidas as projeções de uma pirâmide, pois o ponto **O** é desnecessário para o quadrado.

Em seguida, inverteu-se a mudança do diedro de projeção efetuada, determinando as projeções dos restantes vértices do quadrado e do ponto **O** no **plano 2**, a partir das respetivas cotas, que se mantiveram. **B₂** é a projeção frontal do ponto **B** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de **B₂** ao eixo **X** é igual à distância de **B₄** ao eixo **X'**. O procedimento para a determinação das projeções dos pontos **C**, **D** e **O** foi idêntico ao exposto para o ponto **B**. As duas projeções do quadrado reduzem-se a segmentos de reta, pois o plano π é um plano duplamente projetante.

Determinação das projeções da pirâmide:

Trata-se de uma **pirâmide regular**, pelo que o seu eixo é ortogonal ao plano da base, ou seja, está contido numa reta fronto-horizontal. Assim, pelas projeções do ponto **O** conduziram-se as projeções da reta **g**, a reta suporte do eixo da pirâmide. Uma vez que a altura da pirâmide é a distância do vértice ao plano da base, medida ortogonalmente a este, o vértice **V** dista 8,5 cm (a altura da pirâmide) do plano π . Assim, a altura da pirâmide pode medir-se na reta **g**, que é paralela aos dois planos de projeção – o segmento **[OV]** (o eixo do sólido) projeta-se em verdadeira grandeza em ambas as projeções. Assim, a partir de **O₂** (por exemplo), mediram-se os 8,5 cm sobre **g₂** (a projeção frontal da reta **g**) e determinou-se **V₂** (a projeção frontal do ponto **V**), sobre **g₂**, o que nos permitiu determinar **V₁** (a projeção horizontal do ponto **V**) sobre **g₁** (a projeção horizontal da reta **g**). Note que se garantiu que o vértice **V** se situa à esquerda do plano da base, como o enunciado pede expressamente.

A partir das projeções de todos os cinco vértices da pirâmide, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é a linha fechada **[ADCV]**, cuja projeção frontal é o polígono **[A₂D₂C₂V₂]**. Em projeção frontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **B**. Este vértice, por ser o vértice de **menor afastamento** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AB]** e **[BC]**, da base, e a aresta lateral **[BV]**. As arestas **[AB]** e **[BC]** da base estão ocultas por arestas visíveis, pelo que a única invisibilidade a assinalar, em projeção frontal, é a da aresta lateral **[BV]**. Já a aresta lateral **[DV]** é visível em projeção frontal, pois separa duas faces visíveis em projeção frontal (note que **D** é o vértice de maior afastamento da pirâmide).

O contorno aparente horizontal é a linha fechada **[BCDV]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[B₁C₁D₁V₁]**. Em projeção horizontal, existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **A**. Este vértice, por ser o vértice de **menor cota** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AB]** e **[AD]**, da base, e a aresta lateral **[AV]**. As arestas **[AB]** e **[AD]** da base estão ocultas por arestas visíveis, pelo que a única invisibilidade a assinalar, em projeção horizontal, é a da aresta lateral **[AV]**. Já a aresta lateral **[CV]** é visível em projeção horizontal, pois separa duas faces visíveis em projeção horizontal (note que **C** é o vértice de maior cota da pirâmide).

Determinação das projeções da figura da secção:

O plano secante (o plano ρ) é um plano não projetante, pelo que a determinação dos pontos em que o plano secante corta as arestas laterais não é direta. Nesse sentido, optou-se por se recorrer a uma mudança do diedro de projeção de forma a transformar o plano secante num plano projetante. Há a referir que, sendo conhecido, apenas, o traço horizontal do plano ρ (**h_p**), será conveniente que, na mudança do diedro de projeção a efetuar, que se mantenha o Plano Horizontal de Projeção, por uma questão de economia de traçados.

Nesse sentido, é necessário substituir o Plano Frontal de Projeção por um outro plano (o **plano 4**), que seja ortogonal ao plano ρ , de forma a transformar o plano ρ num plano projetante. Acontece que essa foi, precisamente, a mudança do diedro de projeção efetuada para determinar as projeções da base da pirâmide. De facto, o recurso a uma mudança do diedro de projeção para a determinação das projeções da base da pirâmide teve a ver, precisamente, com a necessidade, na sequência do exercício, do recurso a uma mudança do diedro de projeção para a rápida determinação das projeções da figura da secção que o plano ρ produz no sólido, exatamente por se tratar de um plano não projetante.

Assim, foi necessário determinar o traço do plano ρ no **plano 4** – **f_{4,p}**. Tendo em conta que, no novo diedro de projeção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), o plano ρ é um plano de topo, o ângulo que o plano ρ faz com o Plano Horizontal de Projeção (que é dado no enunciado) projeta-se em verdadeira grandeza no ângulo que o seu novo traço frontal (**f_{4,p}**) faz com o eixo **X'** – **f_{4,p}** está, assim, definido por um ponto (o seu ponto de concorrência com **h_p**, que se situa no eixo **X'**) e por uma direção (o ângulo que faz com o eixo **X'**), o que nos permitiu desenhar **f_{4,p}**.

Em seguida, determinou-se a projeção da pirâmide no **plano 4**, atendendo às invisibilidades que se verificam no novo diedro de projeção (as quatro arestas laterais são invisíveis na nova projeção frontal da pirâmide). Note que **V₄** é a projeção do ponto **V** no **plano 4** e está coincidente com **O₄** pois, no diedro de projeção formado pelo **plano 2** e pelo **plano 4**, o eixo da pirâmide é projetante frontal.

No novo diedro de projeção, o plano secante (o plano ρ) é um plano projetante frontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta duas arestas da base da pirâmide (as arestas **[AD]** e **[CD]**), bem como a aresta lateral **[DV]** do sólido – a figura da secção tem **três vértices**, pelo que é um **triângulo**.

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **três vértices da figura da secção** no **plano 4**, o que se processou de forma direta pois, no diedro de projeção formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**, o plano ρ (o plano secante) é um plano projetante frontal. Em seguida, determinaram-se as projeções horizontais (no **plano 1**) dos pontos **R**, **S** e **T** (os três vértices da figura da secção), de forma direta, a partir das suas projeções no **plano 4**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por fim, a partir das projeções horizontais daqueles pontos (no **plano 1**), foi possível determinar as suas projeções frontais (no **plano 2**), no diedro de projeção inicial, de forma direta. O ponto **R** é o ponto em que o plano ρ corta a aresta **[AD]**, que é de perfil – assim, a projeção frontal do ponto **R** (R_2) determinou-se em função da sua cota, que se manteve (a distância de R_2 ao eixo **X** é igual à distância de R_4 ao eixo X'). O ponto **T** é o ponto em que o plano ρ corta a aresta **[CD]**, que também é de perfil – assim, a projeção frontal do ponto **T** (T_2) determinou-se em função da sua cota, que se manteve (a distância de T_2 ao eixo **X** é igual à distância de T_4 ao eixo X'). O ponto **S** é o ponto em que o plano ρ corta a aresta **[DV]**, pelo que a sua projeção frontal (S_2) se situa sobre a projeção frontal da aresta **[DV]** (D_2V_2).

A partir das projeções de todos os vértices da figura da secção, foi possível desenhar as suas duas projeções, bem como as projeções do sólido resultante da secção.

Determinação das projeções do sólido resultante da secção:

A partir de todos os vértices do **sólido resultante da secção** (que é um outro sólido – uma parte do sólido inicial), determinaram-se os seus contornos aparentes. O **sólido resultante da secção** é, no presente caso, um tronco de pirâmide – o tronco da pirâmide cuja base é o pentágono **[ABCTR]** e da qual o triângulo **[RST]** é uma face (que é afinal, a parte do sólido compreendida entre o plano secante e o eixo **X**).

O contorno aparente frontal é a linha fechada **[CVART]**, cuja projeção frontal é o polígono **[C₂V₂A₂R₂T₂]**. Em projeção frontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices **B** e **S**. O vértice **B**, por ser o vértice de **menor afastamento** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AB]** e **[BC]**, da base, e a aresta **[BV]**. No entanto, as arestas **[AB]** e **[BC]** estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis em projeção frontal, pelo que a única invisibilidade a assinalar em projeção frontal é a da aresta **[BV]**. O vértice **S**, por ser um dos vértices de **maior afastamento** da pirâmide, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[RS]**, **[ST]** e **[SV]**.

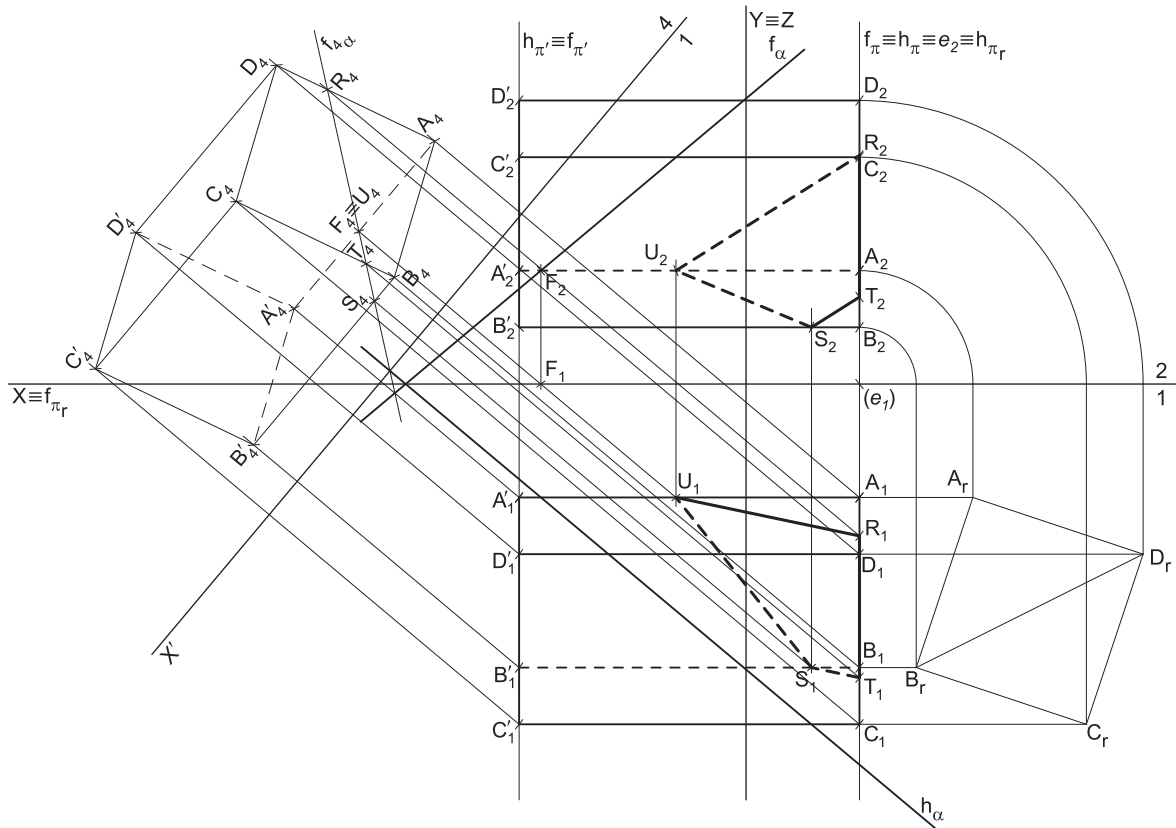
O contorno aparente horizontal é a linha fechada **[BCTRSV]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[B₁C₁T₁R₁S₁V₁]**. Em projeção horizontal, existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **A**. Este, por ser o vértice de **menor cotra** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AB]** e **[AR]**, da base, e a aresta **[AV]**. No entanto, as arestas **[AB]** e **[AR]** estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis em projeção horizontal, pelo que a única invisibilidade a assinalar em projeção horizontal é a da aresta **[AV]**. As arestas **[CV]** e **[ST]** são visíveis em projeção horizontal, pois separaram faces que são visíveis em projeção horizontal (os vértices **C**, **S** e **T** são três dos vértices de maior cota da pirâmide).

A **figura da secção**, porque é **visível em ambas as projeções** (a área do corte é visível em ambas as projeções), foi identificada com o recurso a tracejado, paralelamente ao eixo **X** (em ambas as projeções).

Traçado:

O eixo **X** representa-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. Os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. As projeções da pirâmide, apesar de integrarem igualmente os dados, representaram-se a **leve** pois, nesta situação, são um traçado auxiliar para atingir o objetivo pretendido (o sólido resultante da secção). As duas projeções do **sólido resultante da secção** (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representam-se a **forte**, pois são o pedido. As restantes linhas representam-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traçados relativos à mudança do diedro de projeção). O tracejado que preenche a figura da secção (em ambas as projeções) executou-se a **leve**.

179.



Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **C**, pelas respectivas projeções, bem como o plano π (o plano de perfil que contém o quadrado **[ABCD]**), pelos seus traços, em função dos dados. Os traços do plano π passam pelas projeções dos pontos **A** e **C**, pois o plano π é um plano duplamente projetante. Os dados permitiram-nos, ainda, representar o plano α (o plano secante) pelos seus traços. O plano α tem os seus traços simétricos em relação ao eixo **X**, pois é ortogonal ao $\beta_{1/3}$ (planos ortogonais ao $\beta_{1/3}$ têm os seus traços simétricos em relação ao eixo **X**).

Resolução:

Determinação das projeções do quadrado **[ABCD]**:

O quadrado **[ABCD]** está contida num plano de perfil, que não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o quadrado não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo recurso ao rebatimento do plano π para o Plano Horizontal de Projeção. A charneira foi h_π , que se identificou imediatamente (reta **e**) – trata-se de uma reta de topo (projetante frontal). Os planos que contêm os arcos do rebatimento são planos frontais (de frente) – são planos ortogonais à charneira.

Tendo em conta que os arcos do rebatimento de cada ponto se projetam em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção e que os pontos mantêm os seus afastamentos ao longo do rebatimento, efetuou-se o rebatimento dos pontos **A** e **C**, o que nos permitiu determinar **A_r** e **C_r**. A partir de **A_r** e **B_r**, construiu-se o quadrado **[ABCD]** em verdadeira grandeza, em rebatimento (o quadrado **[A_rB_rC_rD_r]**).

Em seguida, inverteu-se o rebatimento do plano π , o que nos permitiu determinar as projeções dos vértices **B** e **D** do quadrado. As duas projeções do quadrado reduzem-se a segmentos de reta, pois o plano π é um plano duplamente projetante.

Determinação das projeções do prisma:

A altura de um prisma é a distância entre os planos das duas bases. Assim, porque o prisma tem 9 cm de altura e o plano π (que tem -3 de abcissa) é o plano que contém a base mais à direita do sólido, o plano π' (o plano que contém a sua base mais à esquerda) tem 6 cm de abcissa (-3 + 9 = 6). Nesse sentido, representou-se o plano π' (o plano que contém a outra base do sólido) pelos seus traços.

Trata-se de um **prisma regular**, pelo que as suas arestas laterais são ortogonais aos planos das bases, ou seja, estão contidas em retas fronto-horizontais. Assim, pelas projeções dos vértices do quadrado **[ABCD]** conduziram-se as projeções homónimas das retas suporte das respetivas arestas laterais (que não se identificaram) e determinaram-se os pontos de interseção dessas retas com o plano π' – esses pontos são os vértices do quadrado **[A'B'C'D']**, que é a base mais à esquerda do sólido.

A partir das projeções dos oito vértices do prisma, desenharam-se os seus contornos aparentes.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O contorno aparente frontal é a linha fechada $[BCDD'C'B']$, cuja projeção frontal é o polígono $[B_2C_2D_2D'_2C'_2B'_2]$. Em projeção frontal existem dois vértices que não integram o contorno aparente frontal – os vértices A e A' . Estes vértices, por serem os vértices de **menor afastamento** do prisma, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas $[AB]$ e $[AD]$ (da base mais à direita), as arestas $[A'B']$ e $[A'D']$ (da base mais à esquerda), e a aresta lateral $[AA']$. As arestas $[AB]$, $[A'B']$, $[AD]$ e $[A'D']$ estão ocultas por arestas visíveis, pelo que a única invisibilidade a assinalar, em projeção frontal, é a da aresta lateral $[AA']$. Já a aresta lateral $[CC']$ é visível em projeção frontal, pois separa duas faces visíveis em projeção frontal (note que C e C' são os vértices de maior afastamento do prisma).

O contorno aparente horizontal é a linha fechada $[ADCC'D'A]$, cuja projeção horizontal é o polígono $[A_1D_1C_1C'_1D'_1A'_1]$. Em projeção horizontal, existem dois vértices que não integram o contorno aparente frontal – os vértices B e B' . Estes vértices, por serem os vértices de **menor cota** do prisma, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas $[AB]$ e $[BC]$ (da base mais à direita), as arestas $[A'B']$ e $[B'C']$ (da base mais à esquerda), e a aresta lateral $[BB']$. As arestas $[AB]$, $[A'B']$, $[BC]$ e $[B'C']$ estão ocultas por arestas visíveis, pelo que a única invisibilidade a assinalar, em projeção horizontal, é a da aresta lateral $[BB']$. Já a aresta lateral $[DD']$ é visível em projeção horizontal, pois separa duas faces visíveis em projeção horizontal (note que D e D' são os vértices de maior cota do prisma).

Determinação das projeções da figura da secção:

O plano secante (o plano α) é um plano não projetante, pelo que a determinação dos pontos em que o plano secante corta as arestas do sólido não é direta. Nesse sentido, optou-se por se recorrer a uma mudança do diedro de projeção de forma a transformar o plano secante num plano projetante.

Para tal, substituiu-se o Plano Frontal de Projeção por um outro plano (o **plano 4**), ortogonal ao plano α , de forma a transformar o plano α num plano projetante. Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

- no que respeita às **projeções, mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);
- no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo X (o eixo X') é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com $1/4$. Como o **plano 4** é ortogonal ao plano α , o eixo X' é perpendicular ao traço horizontal do plano (h_α). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo X' (o novo eixo X). A_4 , B_4 , C_4 e D_4 são as projeções dos pontos A , B , C e D no **plano 4** e determinaram-se em função das suas cotas, que se mantiveram. A'_4 , B'_4 , C'_4 e D'_4 são as projeções dos pontos A' , B' , C' e D' no **plano 4** e determinaram-se em função das suas cotas, que se mantiveram.

A partir das projeções dos oito vértices do prisma no **plano 4**, desenhou-se a projeção do sólido no **plano 4**, começando pelo seu contorno aparente (que é a linha fechada $[ABB'C'D'D]$) e atendendo às invisibilidades que se verificam no novo diedro de projeção. No novo diedro de projeção, o vértice A' é o vértice de menor afastamento, pelo que é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas $[A'B']$ e $[A'D']$ (da base $[A'B'C'D']$) e a aresta lateral $[AA']$. O vértice C é o vértice de maior afastamento no prisma (no novo diedro de projeção), pelo que é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas $[BC]$ e $[CD]$ (da base $[ABCD]$) e a aresta lateral $[CC']$.

Em seguida, foi necessário determinar o traço do plano α no **plano 4** – $f_{4\alpha}$. Para tal recorreu-se a um ponto qualquer de f_α – o ponto F (que tem a mesma cota do ponto A , por uma questão de economia de traçados). F_4 é a projeção do ponto F no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de F_4 ao eixo X' é igual à distância de F_2 ao eixo X (que é 3 cm – a cota de F). Tendo em conta que, no novo diedro de projeção, o plano α é um plano projetante frontal, o traço do plano α no **plano 4** ($f_{4\alpha}$) está definido por dois pontos – o seu ponto de concorrência com h_α (que se situa no eixo X') e F_4 (a nova projeção frontal do ponto F).

No novo diedro de projeção, o plano secante (o plano α) é um plano projetante frontal, pelo que é possível constatar que o plano secante corta as arestas laterais $[AA']$ e $[BB']$ do prisma (nos pontos U e S , respetivamente), bem como as arestas $[AD]$ e $[BC]$ da base $[ABCD]$ (nos pontos R e T , respetivamente) – a figura da secção tem **quatro vértices** (é o **quadrilátero [RTSU]**). Note que o plano secante não corta a base $[A'B'C'D']$.

Nesse sentido, determinaram-se as projeções dos **quatro vértices da figura da secção** no **plano 4**, o que se processou de forma direta pois, no diedro de projeção formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**, o plano ρ (o plano secante) é um plano projetante frontal. Em seguida, determinaram-se as projeções horizontais (no **plano 1**) dos pontos R , S , T e U (os quatro vértices da figura da secção), de forma direta, a partir das suas projeções no **plano 4**.

Por fim, a partir das projeções horizontais daqueles pontos (no **plano 1**), foi possível determinar as suas projeções frontais (no **plano 2**), no diedro de projeção inicial, de forma direta. O ponto S é o ponto em que o plano α corta a aresta $[BB']$, pelo que a sua projeção frontal (S_2) se situa sobre a projeção frontal da aresta $[BB']$ ($[B_2B'_2]$). O ponto U é o ponto em que o plano α corta a aresta $[AA']$, pelo que a sua projeção frontal (U_2) se situa sobre a projeção frontal da aresta $[AA']$ ($[A_2A'_2]$). O ponto T é o ponto em que o plano α corta a aresta $[BC]$, que é de perfil – assim, a projeção frontal do ponto T (T_2) determinou-se em função da sua cota, que se manteve (a distância de T_2 ao eixo X é igual à distância de T_4 ao eixo X'). O ponto R é o ponto em que o plano α corta a aresta $[AD]$, que também é de perfil – assim, a projeção frontal do ponto R (R_2) determinou-se em função da sua cota, que se manteve (a distância de R_2 ao eixo X é igual à distância de R_4 ao eixo X').

A partir das projeções de todos os vértices da figura da secção, foi possível desenhar as suas duas projeções, atendendo às invisibilidades existentes.

Os lados invisíveis da **figura da secção** (em projeção frontal) são os lados da figura que estão contidos nas faces do prisma que são invisíveis em projeção frontal – as faces laterais $[AA'B'B]$ e $[AA'D'D]$. Assim, os lados $[RU]$ e $[SU]$ da figura da secção, porque se situam naquelas duas faces, são **invisíveis**, em projeção frontal. O lado $[ST]$ da **figura da secção** é **visível** em projeção frontal, porque se situa numa face visível em projeção frontal – a face $[BB'C'C]$. O lado $[RT]$, da **figura da secção**, porque se situa numa face projetante frontal (a base $[ABCD]$), apesar de ser invisível em projeção frontal, essa invisibilidade não se assinala, pois está oculta por arestas visíveis.

(continua na página seguinte)

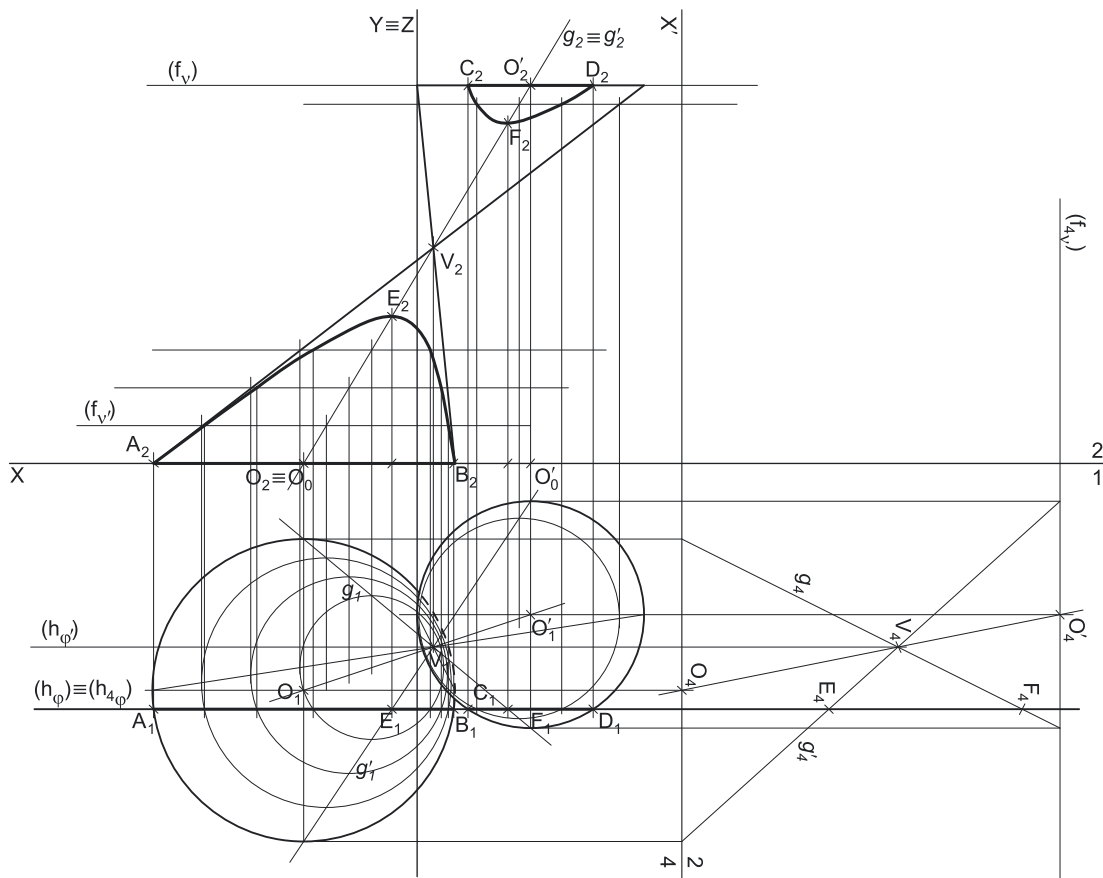
(continuação da página anterior)

Os lados invisíveis da **figura da secção** (em projeção horizontal) são os lados da figura que estão contidos nas faces do prisma que são invisíveis em projeção horizontal – as faces laterais **[AA'B'B]** e **[BB'C'C]**. Assim, os lados **[SU]** e **[ST]** da figura da secção, porque se situam naquelas duas faces, são **invisíveis**, em projeção horizontal. O lado **[RU]** da **figura da secção** é **visível** em projeção horizontal, porque se situa numa face visível em projeção horizontal – a face **[AA'D'D]**. O lado **[RT]**, da **figura da secção**, porque se situa numa face projetante horizontal (a base **[ABCD]**), apesar de ser invisível em projeção horizontal, essa invisibilidade não se assinala, pois está oculta por arestas visíveis.

Traçado:

As projeções do prisma e os traços do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. O eixo **X** representou-se igualmente a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y = Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). As duas projeções da figura da secção (o objetivo do exercício), com as respetivas invisibilidades, representaram-se a **forte**, pois são o pedido. Os traços dos planos π e π' (os planos que contêm as bases) representaram-se a **leve** pois, no contexto do exercício, são meramente auxiliares. As restantes linhas representaram-se a **leve**, pois ou são linhas de chamada ou são traçados auxiliares (caso dos traçados necessários à construção do quadrado, nomeadamente os referentes ao rebatimento do plano π , bem como, ainda, os traçados relativos à mudança do diedro de projeção efetuada).

180.



Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **O** e **O'**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Os dados permitiram-nos representar, ainda, o plano φ (o plano secante) pelo seu traço horizontal. O plano φ não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis. Em seguida, foi ainda possível representar o plano ν (o plano horizontal que contém a base superior do sólido) pelo seu traço frontal. O plano ν não tem traço horizontal, pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

Resolução:

Determinação das projeções do sólido:

A base inferior está contida no Plano Horizontal de Projeção, pelo que está em verdadeira grandeza em projeção horizontal. Assim, com o compasso, fazendo centro em **O₁** (a projeção horizontal do ponto **O**) e com 4 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal da base – a sua projeção frontal situa-se no eixo **X** (é um segmento de reta sobre o eixo **X**).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A base superior está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que se projeta em verdadeira grandeza em projeção horizontal. Assim, com o compasso, fazendo centro em O'_1 (a projeção horizontal do ponto O') e com 3 cm de raio, desenharam-se a projeção horizontal da base superior do sólido – a projeção frontal desta base é um segmento de reta sobre o traço frontal do plano v (f_v), pois o plano v é um plano projetante frontal.

Tendo em conta que o vértice do sólido se situa entre as duas bases, desenharam-se as duas projeções das duas geratrizes do contorno aparente frontal do sólido – uma das geratrizes está definida pelo ponto de maior abcissa da base inferior e pelo ponto de menor abcissa da base superior, enquanto a outra geratriz está definida pelo ponto de menor abcissa da base inferior e pelo ponto de maior abcissa da base superior. O ponto de concorrência das duas geratrizes é o vértice do sólido.

Em seguida, desenharam-se a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido (que é constituída por dois triângulos com um vértice em comum em V_2 e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor abcissa das projeções horizontais das respetivas bases) e a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido (que é constituído por duas circunferências secantes – as projeções horizontais das duas bases).

A **determinação da figura da secção produzida no sólido** pelo plano φ , deve processar-se seguindo uma sequência de etapas, que em seguida se apresentam:

1. Identificar o tipo de secção (ou cónica) produzida pelo plano secante no sólido.
2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes do sólido.
3. Determinar o **espaço útil** para o recurso aos planos paralelos à base.
4. Recorrer a planos paralelos ao plano da base, de forma a obter o número necessário de pontos para um desenho relativamente preciso da curva.

1. Identificação do tipo de secção (ou cónica) produzida pelo plano secante no sólido.

Para identificar a curva (a **cónica**) resultante da secção produzida pelo plano φ no sólido há que recorrer ao **método geral para a identificação da figura da secção**, que se executa em três etapas, a saber: **A.** conduz-se, pelo vértice do sólido, um plano paralelo ao plano secante; **B.** determina-se a reta de interseção desse plano auxiliar (paralelo ao plano secante) com o plano da base (qualquer das bases); **C.** analisa-se a posição da reta secante e relação à base do sólido.

- A.** Conduziu-se, pelo vértice do sólido (o ponto V) um plano paralelo ao plano secante (o plano φ). O plano φ' é outro plano frontal (de frente) e é o plano paralelo ao plano φ que se conduziu pelo vértice V do sólido. O plano φ' é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal ($h_{\varphi'}$) passa por V_1 (a projeção horizontal do ponto V).
- B.** Determinou-se a reta de interseção do plano φ' com o plano da base inferior do sólido (o Plano Horizontal de Projeção), que é o próprio traço horizontal do plano $\varphi' - h_{\varphi'}$.
- C.** Analisa-se a posição da reta de interseção em relação à base do sólido. A reta $h_{\varphi'}$ é secante à base do sólido, pelo que a secção produzida no sólido pelo plano φ é uma **hipérbole**. Tendo em conta que o sólido é limitado pelas duas folhas da superfície cónica, a secção produzida é efetivamente uma **hipérbole** e não apenas um **ramo da hipérbole**.

Tendo em conta que uma **hipérbole** é considerada uma **curva de erro** (uma curva não rigorosa, por oposição à circunferência), o seu desenho (à mão livre) de uma forma relativamente precisa requer um mínimo de **oito pontos** (para cada ramo da hipérbole, dependendo, ainda das dimensões de cada ramo da curva).

2. Determinar os pontos em que o plano secante corta os contornos aparentes do sólido.

Tendo em conta que o plano φ é um plano projetante horizontal, a determinação dos pontos em que o plano corta os contornos aparentes é direta.

O plano φ corta o **contorno aparente horizontal** (as circunferências que delimitam as bases do sólido) em quatro pontos – o plano φ corta a circunferência que delimita a base inferior nos pontos **A** e **B** e corta a circunferência que delimita a base superior nos pontos **C** e **D**.

O plano φ não corta nenhuma das geratrizes do contorno aparente frontal. Assim, o plano φ corta o **contorno aparente frontal** nos mesmos pontos em que o plano corta o contorno aparente horizontal.

3. Determinar o espaço útil para o recurso aos planos paralelos à base.

Tendo em conta que as bases do sólido estão contidas em planos horizontais (de nível), o recurso a planos paralelos à base refere-se ao recurso a planos horizontais (de nível). Estes têm de ser introduzidos no **espaço útil** da secção que é, precisamente, o espaço entre os **pontos de maior e de menor cota da secção** (porque os planos paralelos à base são planos horizontais). Tenha em conta que qualquer plano horizontal (de nível) introduzido fora deste **espaço útil** não nos permitirá determinar qualquer ponto da secção, precisamente porque não existe secção fora desse **espaço útil**.

Tendo em conta que o plano φ (o plano secante) **não** é um plano projetante frontal, **não é possível** determinar, de forma imediata, os pontos de **maior e de menor cota** da curva da secção. No entanto, sabe-se que os pontos **A** e **B** (que se situam na base inferior do sólido) são os **pontos de menor cota** de um dos ramos da hipérbole. Por outro lado, os pontos **C** e **D** (que se situam na base superior do sólido) são os **pontos de maior cota** do outro ramo da hipérbole. Mas ainda assim, não temos o **espaço útil** para cada um dos ramos da secção.

Para determinarmos o **espaço útil** da secção, é necessário transformar o plano φ (que é um plano projetante horizontal) num **plano projetante frontal**, o que se processa com o recurso a uma mudança do diedro de projeção. Nesse sentido, substituiu-se o Plano Frontal de Projeção por um outro plano (o **plano 4**), ortogonal ao plano φ , de forma a transformar o plano φ num plano projetante frontal. Nesse sentido, será criado um novo diedro de projeção que tem, em comum com o diedro de projeção anterior, o Plano Horizontal de Projeção (o **plano 1**), que é o plano que se mantém. Tendo em conta que se **mantém** o Plano Horizontal de Projeção, tem-se o seguinte:

– no que respeita às **projeções**, **mantêm-se as projeções horizontais** (que se situam no plano de projeção que se manteve) e **alteram-se as projeções frontais** (que passarão a ser as projeções no novo plano de projeção – o **plano 4**);

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

– no que respeita às **coordenadas, mantêm-se as cotas** (que estão referenciadas ao plano de projeção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído e, agora, passarão a estar referenciados ao **plano 4**).

Assim, o novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a reta de interseção do **plano 1** (o plano de projeção que se manteve) com o **plano 4** (o novo plano de projeção), o que se assinalou convenientemente com **1/4**. Como o **plano 4** é ortogonal ao plano ϕ , o eixo **X'** é perpendicular ao traço horizontal do plano (h_ϕ) – o plano ϕ foi transformado num plano de perfil (um plano duplamente projetante). Nesse sentido, $f_{4\phi}$ (o traço do plano ϕ no **plano 4**) fica coincidente com o seu traço horizontal – $h_\phi \equiv f_{4\phi}$. Em seguida, determinou-se a projeção do sólido no **plano 4** (o novo plano de projeção). As linhas de chamada dos pontos, no novo diedro de projeção, são perpendiculares ao eixo **X'** (o novo eixo **X**). **O₄**, **V₄**, e **O'₄** são as projeções dos pontos **O**, **V** e **O'** no **plano 4** e determinaram-se em função das suas cotas, que se mantiveram.

A partir das projeções dos pontos **O**, **V** e **O'** no **plano 4**, desenhou-se a projeção do sólido no **plano 4** e determinaram-se os pontos em que o plano ϕ (que é um plano de perfil, no novo diedro de projeção) corta as novas geratrizes do contorno aparente frontal (as geratrizes **g** e **g'**) – os pontos **E** e **F**. O ponto **E** é o ponto de maior cota de um dos ramos da hipérbole e o ponto **F** é o ponto de menor cota do outro ramo da hipérbole.

Em seguida, inverteu-se a mudança do diedro de projeção efetuada, o que nos permitiu determinar as projeções frontais das geratrizes **g** e **g'**, bem como as projeções frontais dos pontos **E** e **F**. Um dos ramos da hipérbole está compreendido entre os pontos **A** e **B** (os seus **pontos de menor cota**) e o ponto **E** (o seu **ponto de maior cota**) – o **espaço útil** para este ramo da hipérbole é o espaço entre a base inferior do sólido e o ponto **E**. O outro ramo da hipérbole está compreendido entre os pontos **C** e **D** (os seus **pontos de maior cota**) e o ponto **F** (o seu **ponto de menor cota**) – o **espaço útil** para este ramo da hipérbole é o espaço entre o ponto **F** e a base superior do sólido.

Já está identificado o **espaço útil** para cada um dos dois ramos da hipérbole.

4. Recorrer a planos paralelos ao plano da base, de forma a obter o número necessário de pontos para um desenho relativamente preciso da curva.

O recurso a planos paralelos ao plano da base deve garantir que os pontos que eles nos permitem determinar estão distribuídos uniformemente pelo **espaço útil** (de cada ramo da hipérbole), precisamente para garantir que o desenho da(s) curva(s) se processe de uma forma o mais precisa possível. Em função das dimensões de cada ramo da hipérbole (existe um ramo maior e um outro menor), optou-se por se recorrer a **um plano auxiliar** para o **ramo menor** e a **três planos auxiliares** para o **ramo maior**.

O plano v' porque é paralelo aos planos das bases, produz, no sólido, uma secção circular. O centro desse círculo é o ponto em que o plano v' intersesta o eixo do sólido (e que não se identificou). O raio desse círculo é a distância desse ponto ao ponto de interseção do plano v' com uma qualquer geratriz do sólido (que também não se identificou, com vista a não sobrecarregar a resolução apresentada com excesso de notações). Assim, desenhou-se a projeção horizontal da secção que o plano v' produz no sólido. Em seguida, determinou-se a reta de interseção do plano v' (o plano auxiliar) com o plano ϕ (o plano secante), que é uma reta fronto-horizontal, cujas projeções também não se identificaram. Os pontos em que esta reta corta a circunferência são mais dois pontos da secção. Estes pontos foram determinados a partir das suas projeções horizontais – as suas projeções frontais situam-se sobre o traço frontal do plano v' , pois o plano v' é um plano projetante frontal. Já temos mais dois pontos para o desenho deste ramo da hipérbole, o que perfaz um total de **cinco pontos**.

Repetiu-se o processo acima exposto com mais dois planos auxiliares (para o primeiro ramo da hipérbole), o que nos permitiu determinar mais quatro pontos deste ramo da hipérbole. Já temos um total de **nove pontos** para o desenho deste ramo da hipérbole, o que se considera suficiente.

Por fim, repetiu-se mais uma vez o processo acima exposto em relação ao outro ramo da hipérbole, o que nos permitiu determinar dois pontos desse outro ramo. Já temos um total de **cinco pontos** para o desenho deste ramo da hipérbole, o que se considera suficiente, dada a dimensão da curva a desenhar.

A partir dos **catorze pontos** já determinados, desenharam-se as duas projeções da **figura da secção**. A projeção frontal da hipérbole é uma outra hipérbole, cujo desenho é relativamente preciso, a partir dos catorze pontos determinados. Note que a hipérbole se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção, pois o plano ϕ é paralelo ao Plano Frontal de Projeção. A projeção horizontal da hipérbole reduz-se a um segmento de reta sobre h_ϕ (o traço horizontal do plano ϕ), pois o plano ϕ (o plano secante) é um plano projetante horizontal.

A figura da secção (a **hipérbole** resultante da secção) é **visível** em **projeção frontal**, na sua totalidade, pois situa-se na parte **visível** da superfície do sólido. Uma vez que a **figura da secção**, em projeção horizontal, se reduz a um segmento de reta, não há quaisquer invisibilidades a registar em projeção horizontal.

Traçado:

O eixo **X** representa-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. As projeções do sólido e o traço horizontal do plano secante, porque integram os dados, representaram-se a **médio**. As duas projeções da figura da secção (o objetivo do exercício) representaram-se a **forte**, pois são o pedido. Todas as restantes linhas são a **leve**, pois ou são linhas auxiliares (caso dos planos horizontais a que se recorreu, bem como das projeções horizontais das secções circulares por aqueles produzidas no sólido) ou são linhas de chamada.

21 SOMBRAS

181.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **A**, pelas suas projeções, em função das suas coordenadas. A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

Resolução:

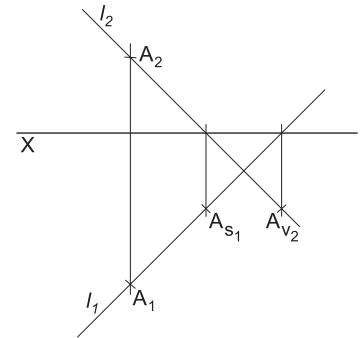
Para determinar as sombras real e virtual do ponto **A** conduziu-se, pelo ponto **A**, um raio luminoso l com a direção dada (a direção das suas projeções) – o raio luminoso l está definido por um ponto (o ponto **A**) e por uma direção (a direção convencional da luz).

Em seguida, determinaram-se os traços do raio luminoso l nos planos de projeção – o seu traço horizontal situa-se no **SPHA** e o seu traço frontal situa-se no **SPFI**. Atendendo a que as sombras reais se situam sempre no **SPHA** ou no **SPFS** (as faces do 1^a Diedro), o traço horizontal do raio luminoso l (que se situa no **SPHA**) é a **sombra real** do ponto **A** (A_s) e o traço frontal do raio luminoso l (que se situa no **SPFI**) é a **sombra virtual** do ponto **A** (A_v).

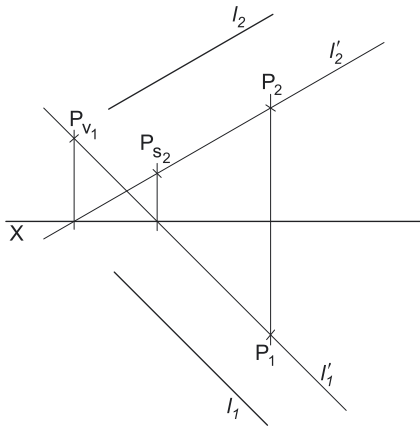
Tendo em conta que a **sombra real** do ponto **A** (A_s) se situa no **SPHA** (trata-se da sua projeção horizontal), assinalou-se esse facto com o respetivo índice – A_{s1} . Tendo em conta que a **sombra virtual** do ponto **A** (A_v) se situa no **SPFI** (trata-se de uma projeção frontal), assinalou-se esse facto com o respetivo índice – A_{v2} . Note que se omitiram as notações referentes às projeções das sombras (real e virtual) que se situam no eixo **X**, por estas não serem necessárias.

Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O pedido (as sombras real e virtual do ponto **A**) são pontos, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do raio luminoso l), representaram-se a **leve**.



182.



Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **P**, pelas suas projeções, em função das suas coordenadas. Representou-se, também, um raio luminoso l , com a direção luminosa dada no enunciado.

Resolução:

Para determinar as sombras real e virtual do ponto **P** conduziu-se, pelo ponto **P**, um raio luminoso l' paralelo a direção luminosa l – o raio luminoso l' está definido por um ponto (o ponto **P**) e por uma direção (é paralelo a direção luminosa l). Em seguida, determinaram-se os traços do raio luminoso l' nos planos de projeção – o seu traço frontal situa-se no **SPFS** e o seu traço horizontal situa-se no **SPHP**. Atendendo a que as sombras reais se situam sempre no **SPHA** ou no **SPFS** (as faces do 1^a Diedro), o traço frontal do raio luminoso l' (que se situa no **SPFS**) é a **sombra real** do ponto **P** (P_s) e o traço horizontal do raio luminoso l (que se situa no **SPHP**) é a **sombra virtual** do ponto **P** (P_v).

Tendo em conta que a **sombra real** do ponto **P** (P_s) se situa no **SPFS** (trata-se da sua projeção frontal), assinalou-se esse facto com o respetivo índice – P_{s2} . Tendo em conta que a **sombra virtual** do ponto **P** (P_v) se situa no **SPHP** (trata-se de uma projeção horizontal), assinalou-se esse facto com o respetivo índice – P_{v1} . Note que se omitiram as notações referentes às projeções das sombras (real e virtual) que se situam no eixo **X**, por estas não serem necessárias.

Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O raio luminoso l , porque integra os dados, representou-se a **médio**. O pedido (as sombras real e virtual do ponto **P**) são pontos, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do raio luminoso l'), representaram-se a **leve**.

183.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto **R** e o foco luminoso **L**, pelas respetivas projeções, em função das respetivas coordenadas.

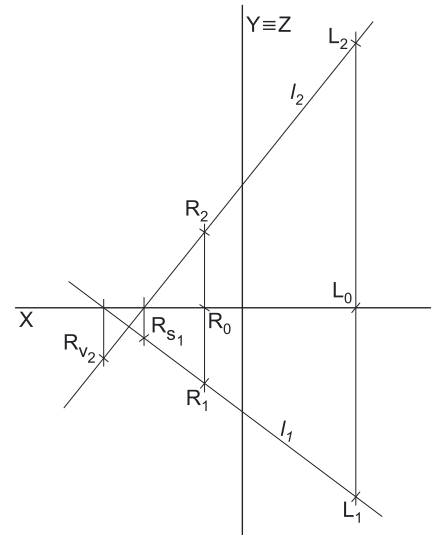
Resolução:

Para determinar as sombras real e virtual do ponto **R** conduziu-se, pelo ponto **R**, um raio luminoso **l**, que passa pelo foco luminoso **L** – o raio luminoso **l** está definido por dois pontos (os pontos **R** e **L**). Em seguida, determinaram-se os traços do raio luminoso **l** nos planos de projeção – o seu traço horizontal situa-se no **SPHA** e o seu traço frontal situa-se no **SPFI**. Atendendo a que as sombras reais se situam sempre no **SPHA** ou no **SPFS** (as faces do 1.º *Diedro*), o traço horizontal do raio luminoso **l** (que se situa no **SPHA**) é a **sombra real** do ponto **R** (**R_s**) e o traço frontal do raio luminoso **l** (que se situa no **SPFI**) é a **sombra virtual** do ponto **R** (**R_v**).

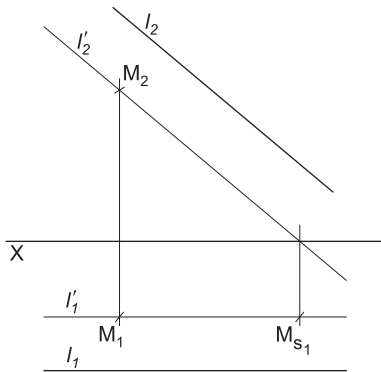
Tendo em conta que a **sombra real** do ponto **R** (**R_s**) se situa no **SPHA** (trata-se da sua projeção horizontal), assinalou-se esse facto com o respetivo índice – **R_{s1}**. Tendo em conta que a **sombra virtual** do ponto **R** (**R_v**) se situa no **SPFI** (trata-se de uma projeção frontal), assinalou-se esse facto com o respetivo índice – **R_{v2}**. Note que se omitiram as notações referentes às projeções das sombras (real e virtual) que se situam no eixo **X**, por estas não serem necessárias.

Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y ≡ Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido (as sombras real e virtual do ponto **R**) são pontos, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do raio luminoso **l**), representaram-se a **leve**.



184.



Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **M**, pelas suas projeções, em função das suas coordenadas. Representou-se, também, um raio luminoso **l**, com a direção luminosa dada no enunciado.

Resolução:

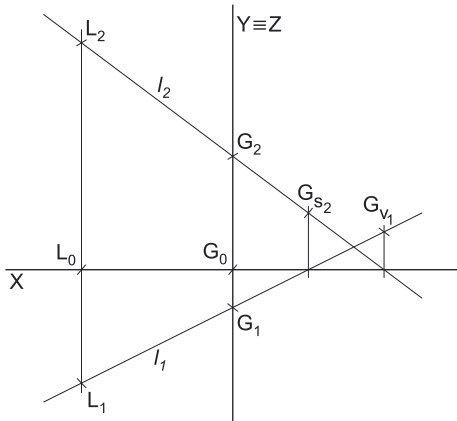
Para determinar as sombras real e virtual do ponto **M** conduziu-se, pelo ponto **M**, um raio luminoso **l'**, paralelo à direção luminosa **l** – o raio luminoso **l'** está definido por um ponto (o ponto **M**) e por uma direção (é paralelo à direção luminosa **l**). Em seguida, determinaram-se os traços do raio luminoso **l'** nos planos de projeção. O traço horizontal do raio luminoso situa-se no **SPHA** – atendendo a que as sombras reais se situam sempre no **SPHA** ou no **SPFS** (as faces do 1.º *Diedro*), o traço horizontal do raio luminoso **l'** (que se situa no **SPHA**) é a **sombra real** do ponto **M** (**M_s**). Por outro lado, atendendo a que o raio luminoso **l'** é uma reta frontal (de frente), que é paralela ao Plano Frontal de Projeção, constata-se que o raio luminoso não intersesta o Plano Frontal de Projeção, pelo que o ponto **M** não tem sombra virtual.

Tendo em conta que a **sombra real** do ponto **M** (**M_s**) se situa no **SPHA** (trata-se da sua projeção horizontal), assinalou-se esse facto com o respetivo índice – **M_{s1}**. Note que se omitiu a notação referente à projeção da sombra real que se situa no eixo **X**, por não ser necessária.

Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O raio luminoso **l**, porque integra os dados, representou-se a **médio**. O pedido (a sombra real do ponto **M**) é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do raio luminoso **l'**), representaram-se a **leve**.

185.



Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto **G** e o foco luminoso **L**, pelas respetivas projeções, em função das respetivas coordenadas.

Resolução:

Para determinar as sombras real e virtual do ponto **G** conduziu-se, pelo ponto **G**, um raio luminoso **l**, que passa pelo foco luminoso **L** – o raio luminoso **l** está definido por dois pontos (os pontos **G** e **L**). Em seguida, determinaram-se os traços do raio luminoso **l** nos planos de projeção – o seu traço frontal situa-se no **SPFS** e o seu traço horizontal situa-se no **SPHP**. Atendendo a que as sombras reais se situam sempre no **SPHA** ou no **SPFS** (as faces do 1^{a} Diedro), o traço frontal do raio luminoso **l** (que se situa no **SPFS**) é a **sombra real** do ponto **G** (G_s) e o traço horizontal do raio luminoso **l** (que se situa no **SPHP**) é a **sombra virtual** do ponto **G** (G_v).

Tendo em conta que a **sombra real** do ponto **G** (G_s) se situa no **SPFS** (trata-se da sua projeção frontal), assinalou-se esse facto com o respetivo índice – G_{s2} . Tendo em conta que a **sombra virtual** do ponto **G** (G_v) se situa no **SPHP** (trata-se de uma projeção horizontal), assinalou-se esse facto com o respetivo índice – G_{v1} . Note que se omitiram as notações referentes às projeções das sombras (real e virtual) que se situam no eixo **X**, por estas não serem necessárias.

Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y** \equiv **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido (as sombras real e virtual do ponto **G**) são pontos, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do raio luminoso **l**), representaram-se a **leve**.

186.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A**, **B** e **C**, pelas respetivas projeções, em função das respetivas coordenadas. A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

a) Para determinar a sombra real do ponto **A** conduziu-se, pelo ponto **A**, um raio luminoso **l**, com a direção luminosa dada (a direção convencional da luz) – o raio luminoso **l** está definido por um ponto (o ponto **A**) e por uma direção (a direção luminosa dada). Em seguida, determinou-se o primeiro traço do raio luminoso **l** nos planos de projeção – o seu traço horizontal (que se situa no **SPHA**). Atendendo a que as **sombras reais** se situam sempre no **SPHA** ou no **SPFS** (as faces do 1^{a} Diedro), o traço horizontal do raio luminoso **l** (que se situa no **SPHA**) é a **sombra real** do ponto **A** (A_s), o que se assinalou convenientemente, indicando, ainda, de que projeção se trata (é uma projeção horizontal) – A_{s1} .

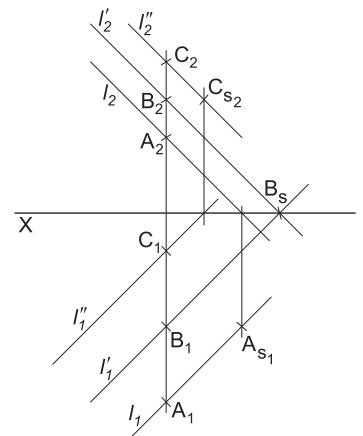
Para determinar a sombra real do ponto **B** conduziu-se, pelo ponto **B**, um raio luminoso **l'**, com a direção luminosa dada (a direção convencional da luz) – o raio luminoso **l'** está definido por um ponto (o ponto **B**) e por uma direção (a direção luminosa dada). Em seguida, determinou-se o primeiro traço do raio luminoso **l'** nos planos de projeção – o raio luminoso **l'** é uma reta passante, pelo que os seus dois traços (traço frontal e traço horizontal) estão coincidentes num único ponto (o ponto de concorrência do raio luminoso **l** com o eixo **X**). Atendendo a que as **sombras reais** se situam sempre no **SPHA** ou no **SPFS** (as faces do 1^{a} Diedro), o ponto de concorrência do raio luminoso **l'** com o eixo **X** (que se situa na aresta do 1^{a} Diedro) é a **sombra real** do ponto **B** (B_s), o que se assinalou convenientemente. Por outro lado, e uma vez que se pode tratar tanto de uma projeção frontal como de uma projeção horizontal, omitiu-se o índice que identifica a projeção, pois B_s situa-se nos dois planos de projeção.

Para determinar a sombra real do ponto **C** conduziu-se, pelo ponto **C**, um raio luminoso **l''**, com a direção luminosa dada (a direção convencional da luz) – o raio luminoso **l''** está definido por um ponto (o ponto **C**) e por uma direção (a direção luminosa dada). Em seguida, determinou-se o primeiro traço do raio luminoso **l''** nos planos de projeção – o seu traço frontal (que se situa no **SPFS**). Atendendo a que as **sombras reais** se situam sempre no **SPHA** ou no **SPFS** (as faces do 1^{a} Diedro), o traço frontal do raio luminoso **l''** (que se situa no **SPFS**) é a **sombra real** do ponto **C** (C_s), o que se assinalou convenientemente, indicando, ainda, de que projeção se trata (é uma projeção frontal) – C_{s2} .

b) A_{s1} situa-se no **SPHA** e o ponto **A** situa-se no 1^{a} Octante. B_s situa-se no eixo **X** e o ponto **B** situa-se no $\beta_{1/3}$. C_{s2} situa-se no **SPFS** e o ponto **C** situa-se no 2^{a} Octante. É necessário ter em conta que os três pontos se situam no 1^{a} Diedro (só existem sombras no espaço do 1^{a} Diedro) e que se trata da **direção convencional da luz**.

Conclusões: se o afastamento de um ponto é maior do que a sua cota (trata-se de um ponto do 1^{a} Octante), a sua sombra (real) situa-se no **SPHA**; se o afastamento e a cota de um ponto são iguais (trata-se de um ponto do $\beta_{1/3}$), a sua sombra situa-se no eixo **X**; se a cota de um ponto é maior do que o seu afastamento (trata-se de um ponto do 2^{a} Octante), a sua sombra situa-se no **SPFS**.

ATENÇÃO: estas conclusões referem-se, **apenas**, à direção convencional da luz.



187.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respetivas projeções, em função das respetivas coordenadas. A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

Resolução:

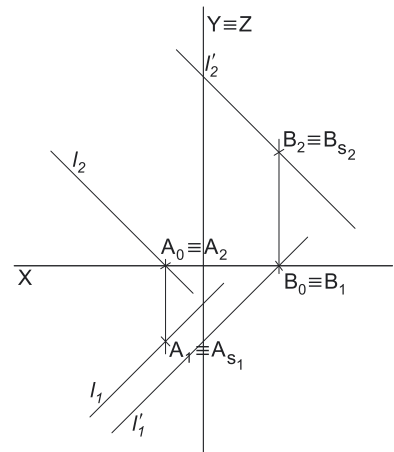
Para determinar a sombra real do ponto **A** conduziu-se, pelo ponto **A**, um raio luminoso l , com a direção luminosa dada (a direção convencional da luz) – o raio luminoso l está definido por um ponto (o ponto **A**) e por uma direção (a direção luminosa dada). Em seguida, constatou-se que o ponto **A** é o próprio traço horizontal do raio luminoso l – uma vez que o ponto **A** se situa no **SPHA**, a **sombra real** do ponto **A** (A_s) é o próprio ponto **A**. Tendo em conta que a **sombra real** do ponto **A** (A_s) se situa no **SPHA** (trata-se da sua projeção horizontal), assinalou-se esse facto com o respetivo índice – A_{s1} . Note que se omitiu a notação referente à projeção frontal da sombra (que se situa no eixo **X**), por não ser necessária.

Para determinar a sombra real do ponto **B** conduziu-se, pelo ponto **B**, um raio luminoso l' , com a direção luminosa dada (a direção convencional da luz) – o raio luminoso l' está definido por um ponto (o ponto **B**) e por uma direção (a direção luminosa dada). Em seguida, constatou-se que o ponto **B** é o próprio traço horizontal do raio luminoso l' – uma vez que o ponto **B** se situa no **SPFS**, a **sombra real** do ponto **B** (B_s) é o próprio ponto **B**. Tendo em conta que a **sombra real** do ponto **B** (B_s) se situa no **SPFS** (trata-se da sua projeção frontal), assinalou-se esse facto com o respetivo índice – B_{s2} . Note que se omitiu a notação referente à projeção horizontal da sombra (que se situa no eixo **X**), por não ser necessária.

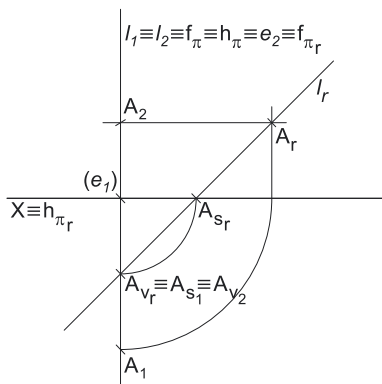
Comparação com os dois exercícios anteriores: a sombra de um ponto do Plano Horizontal de Projeção está coincidente com o próprio ponto, quer se trate de uma **direção luminosa** quer se trate de um **foco luminoso**, tal como a sombra de um ponto do Plano Frontal de Projeção está coincidente com o próprio ponto, quer se trate de uma **direção luminosa** quer se trate de um **foco luminoso**.

Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O eixo **Y** \equiv **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido (as sombras reais dos pontos **A** e **B**) são pontos, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso dos raios luminosos l e l'), representaram-se a **leve**.



188.



Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se o ponto **A**, pelas suas projeções, em função das suas coordenadas.

Resolução:

Para determinar a sombra real do ponto **A** conduziu-se, pelo ponto **A**, um raio luminoso l com a direção luminosa dada – o raio luminoso l está definido por um ponto (o ponto **A**) e pela sua direção (a direção dada). Para determinar as sombras (real e virtual) do ponto **A** há que, em seguida, determinar os traços do raio luminoso l nos planos de projeção. O raio luminoso l é uma **reta de perfil**, cujas projeções **não verificam** o **Critério de Reversibilidade** – não é possível, de forma direta, determinar quaisquer outros pontos do raio luminoso l para além do único ponto conhecido (o ponto **A**), pelo que é necessário o recurso a um **processo geométrico auxiliar**.

Optou-se pelo rebatimento do plano de perfil que contém o raio luminoso l . Nesse sentido conduziu-se, pelo raio luminoso l , um plano de perfil π e rebateu-se o plano π para o Plano Frontal de Projeção (a charneira foi f_π). Rebateu-se o ponto **A**, obtendo A_r . Por A_r conduziu-se o raio luminoso l , em rebatimento – l_r está definido por um ponto (o ponto A_r) e por uma direção (é paralelo ao $\beta_{1/3}$, ou seja, l_r faz ângulos de 45° com os traços do plano em rebatimento, tendo-se o cuidado de garantir o paralelismo ao $\beta_{1/3}$ e não ao $\beta_{2/4}$). Em seguida, em rebatimento, determinaram-se os traços do raio luminoso l nos planos de projeção.

A_s é a **sombra real** do ponto **A** e é o traço horizontal do raio luminoso l (porque tem afastamento positiva – situa-se no **SPHA**). A_v é a **sombra virtual** do ponto **A** e é o traço frontal do raio luminoso l (porque tem cota negativa – situa-se no **SPFI**). A_{s_r} é a **sombra real** do ponto **A** em rebatimento e A_{v_r} é a **sombra virtual** do ponto **A** em rebatimento).

Em seguida, inverteu-se o rebatimento e determinaram-se as projeções das sombras real e virtual do ponto **A**. Tendo em conta que a **sombra real** do ponto **A** (A_s) se situa no **SPHA** (trata-se da sua projeção horizontal), assinalou-se esse facto com o respetivo índice – A_{s1} . Tendo em conta que a **sombra virtual** do ponto **A** (A_v) se situa no **SPFI** (trata-se de uma projeção frontal), assinalou-se esse facto com o respetivo índice – A_{v2} . A sombra virtual do ponto **A** (A_v) é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente $A_{v_r} \equiv A_{v_2}$.

Note que se omitiram as notações referentes às projeções das sombras (real e virtual) que se situam no eixo **X**, por estas não serem necessárias.

Traçado:

O eixo **X** representou-se a **médio**, pois é a linha estruturante do exercício. O pedido (as sombras real e virtual do ponto **A**) são pontos, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do raio luminoso l , do plano π ou das projeções horizontais dos arcos do rebatimento, por exemplo), representaram-se a **leve**.

189.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respetivas projeções, em função dos dados e desenharam-se as projeções do segmento de reta **[AB]**. A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

Resolução:

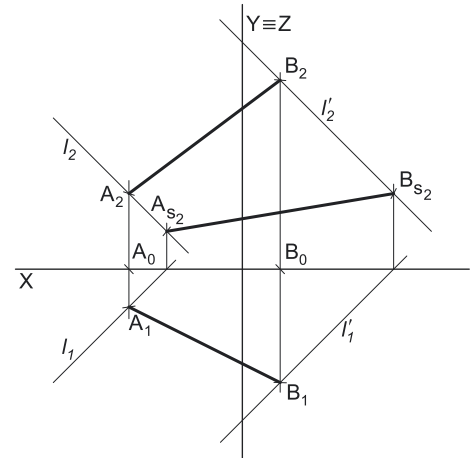
Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos pontos **A** e **B** (os extremos do segmento) nos Planos de Projeção. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam. A reta ***l*** é o raio luminoso que passa pelo ponto **A** – **A_{s2}** é a sombra real do ponto **A** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso ***l***. A reta ***l'*** é o raio luminoso que passa pelo ponto **B** – **B_{s2}** é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso ***l'***. Os raios luminosos ***l*** e ***l'*** são paralelos entre si e são paralelos à direção convencional da luz.

As sombras reais dos dois extremos do segmento situam-se no mesmo plano de projeção (o Plano Frontal de Projeção), pelo que a sombra projetada do segmento de reta se situa, na totalidade, no **SPFS**. O segmento de reta **[A_{s2}B_{s2}]** é a **sombra projetada (real)** do segmento **[AB]** nos planos de projeção.

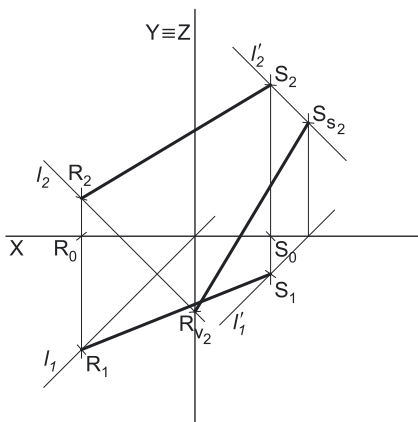
Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y ≡ Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o segmento de reta **[AB]** e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o segmento de reta **[AB]** ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o segmento. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.



190.



Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **R** e **S**, pelas respetivas projeções, em função dos dados e desenharam-se as projeções do segmento de reta **[RS]**. A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

Resolução:

Em seguida, determinaram-se as **sombras projetadas no Plano Frontal de Projeção** dos pontos **R** e **S** (os extremos do segmento). Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam. A reta ***l*** é o raio luminoso que passa pelo ponto **R** – **R_{v2}** é a **sombra projetada no Plano Frontal de Projeção** do ponto **R** (situa-se no **SPFI**) e é o traço frontal do raio luminoso ***l***. A reta ***l'*** é o raio luminoso que passa pelo ponto **S** – **S_{s2}** é a **sombra projetada no Plano Frontal de Projeção** do ponto **S** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso ***l'***. Os raios luminosos ***l*** e ***l'*** são paralelos entre si e são paralelos à direção convencional da luz. **R_{v2}** é a **sombra virtual** do ponto **R** e **S_{s2}** é a **sombra real** do ponto **S**.

Em seguida, desenhou-se o segmento de reta **[R_{v2}S_{s2}]**, que é a **sombra projetada no Plano Frontal de Projeção** do segmento **[RS]**. A parte do segmento **[R_{v2}S_{s2}]** que se situa para baixo do eixo **X** é a **parte virtual** da sombra projetada do segmento **[RS]** no Plano Frontal de Projeção (pois situa-se no **SPFI**). A parte do segmento **[R_{v2}S_{s2}]** que se situa para cima do eixo **X** é a **parte real** da sombra projetada do segmento **[RS]** no Plano Frontal de Projeção (pois situa-se no **SPFS**).

Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y ≡ Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o segmento de reta **[RS]** e a sua **sombra projetada no Plano Frontal de Projeção** (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o segmento de reta **[RS]** ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o segmento. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

191.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **R** e **S**, pelas respetivas projeções, em função dos dados e desenharam-se as projeções do segmento de reta **[RS]**. A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

Resolução:

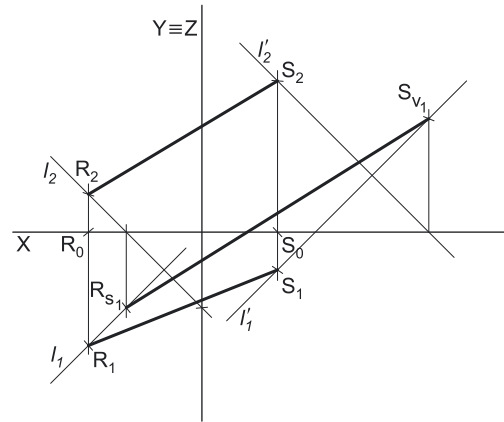
Em seguida, determinaram-se as **sombras projetadas no Plano Horizontal de Projeção** dos pontos **R** e **S** (os extremos do segmento). Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam. A reta ***l*** é o raio luminoso que passa pelo ponto **R – R_{s1}** é a **sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção** do ponto **R** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso ***l***. A reta ***l'*** é o raio luminoso que passa pelo ponto **S – S_{v1}** é a **sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção** do ponto **S** (situa-se no **SPHP**) e é o traço horizontal do raio luminoso ***l'***. Os raios luminosos ***l*** e ***l'*** são paralelos entre si e são paralelos à direção convencional da luz. **R_{s1}** é a **sombra real** do ponto **R** e **S_{v1}** é a **sombra virtual** do ponto **S**.

Em seguida, desenhou-se o segmento de reta **[R_{s1}S_{v1}]**, que é a **sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção** do segmento **[RS]**. A parte do segmento **[R_{s1}S_{v1}]** que se situa para cima do eixo **X** é a **parte virtual** da sombra projetada do segmento **[RS]** no Plano Horizontal de Projeção (pois situa-se no **SPHP**). A parte do segmento **[R_{s1}S_{v1}]** que se situa para baixo do eixo **X** é a **parte real** da sombra projetada do segmento **[RS]** no Plano Horizontal de Projeção (pois situa-se no **SPHA**).

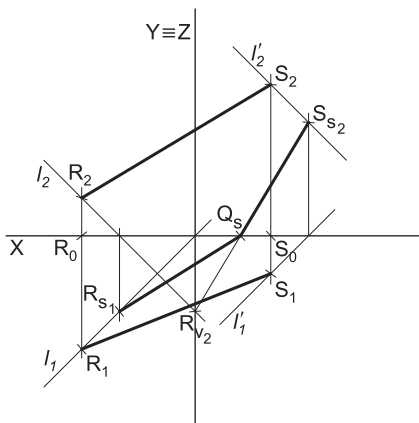
Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y ≡ Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o segmento de reta **[RS]** e a sua **sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção** (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o segmento de reta **[RS]** ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o segmento. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.



192.



Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **R** e **S**, pelas respetivas projeções, em função dos dados e desenharam-se as projeções do segmento de reta **[RS]**. A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

Resolução:

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos pontos **R** e **S** (os extremos do segmento) nos Planos de Projeção. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam. A reta ***l*** é o raio luminoso que passa pelo ponto **R – R_{s1}** é a **sombra real** do ponto **R** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso ***l***. A reta ***l'*** é o raio luminoso que passa pelo ponto **S – S_{s2}** é a **sombra real** do ponto **S** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso ***l'***. Os raios luminosos ***l*** e ***l'*** são paralelos entre si e são paralelos à direção convencional da luz.

As sombras reais dos dois extremos do segmento situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do segmento de reta **admite necessariamente a existência** de um **ponto de quebra**. Para determinar o ponto de quebra recorreu-se à sombra virtual do ponto **R – R_{v2}**. **R_{v2}** é a **sombra virtual** do ponto **R** – situa-se no **SPFI** e é o traço frontal do raio luminoso ***l***. O segmento **[R_{v2}S_{s2}]** é, assim, a **sombra projetada** do segmento **[RS]** no Plano Frontal de Projeção. O ponto de interseção do segmento **[R_{v2}S_{s2}]** (a sombra do segmento no Plano Frontal de Projeção) com o eixo **X** é **Q_s** (o ponto de quebra da sombra do segmento).

Q_s é a sombra de um ponto **Q**, do segmento **[RS]**, cujas projeções não se determinaram, por não serem necessárias. O segmento **[Q_sN_{s2}]** é a **parte real** da sombra projetada do segmento **[RS]** no Plano Frontal de Projeção. O segmento **[M_{v2}Q_s]** é a **parte virtual** da sombra projetada do segmento **[RS]** no Plano Frontal de Projeção. O segmento **[R_{s1}Q_s]** é a **parte real** da sombra do segmento **[RS]** no Plano Horizontal de Projeção.

A linha quebrada aberta **[R_{s1}Q_sS_{s2}]** é a **sombra real** do segmento **[RS]** nos planos de projeção.

Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y ≡ Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o segmento de reta **[RS]** e a sua **sombra projetada** nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o segmento de reta **[RS]** ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o segmento. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

193.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **J**, pelas suas projeções, em função dos dados e desenharam-se as projeções da reta **h**, a reta suporte do segmento **[JK]** (também em função dos dados). Representou-se, também, um raio luminoso **l**, com a direção luminosa dada no enunciado.

Resolução:*Determinação das projeções do segmento:*

A reta **h** (a reta suporte do segmento **[JK]**) é paralela ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que o segmento se projeta em verdadeira grandeza em projeção horizontal. Assim, sobre **h₁** (a projeção horizontal da reta **h**), a partir de **J₁** (a projeção horizontal do ponto **J**), mediram-se os 6 cm (o comprimento do segmento), o que nos permitiu determinar **K₁** (a projeção horizontal do ponto **K**). Note que se garantiu que **K** tem afastamento positivo, para que o segmento se situe no espaço do 1.^o Diedro, como é expressamente referido no enunciado. A projeção frontal do ponto **K** (**K₂**) situa-se sobre a projeção frontal da reta **h** (**h₂**).

Em seguida, desenharam-se as projeções do segmento de reta **[JK]**.

Determinação da sombra projetada do segmento:

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos pontos **J** e **K** (os extremos do segmento) nos Planos de Projeção. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam. A reta **l'** é o raio luminoso que passa pelo ponto **J – J_{s1}** e é a sombra real do ponto **J** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso **l'**. A reta **l''** é o raio luminoso que passa pelo ponto **K – K_{s1}** e é a sombra real do ponto **K** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso **l''**. Os raios luminosos **l'** e **l''** são paralelos entre si e são paralelos à direção luminosa dada – a reta **l**.

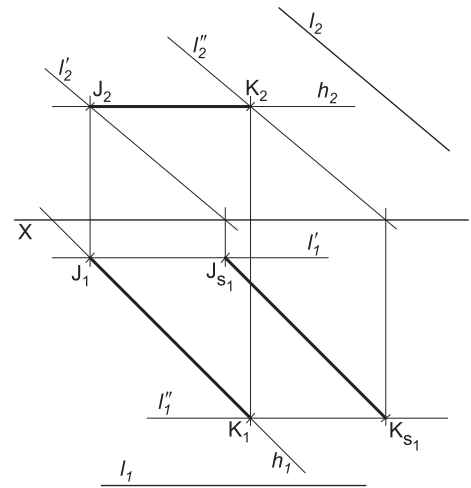
As sombras reais dos dois extremos do segmento situam-se no mesmo plano de projeção (o Plano Horizontal de Projeção), pelo que a sombra projetada do segmento de reta se situa, na totalidade, no **SPHA** (a sombra do segmento **não admite** a existência de pontos de quebra). O segmento de reta **[J_{s1}K_{s1}]** é a **sombra projetada (real)** do segmento **[JK]** nos planos de projeção.

Note que o segmento de reta **[J_{s1}K_{s1}]** é paralelo ao segmento **[J₁K₁]**, que é a projeção horizontal do segmento **[JK]**, que é um segmento de reta horizontal (de nível) – a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção do segmento de reta é, assim, paralela ao próprio segmento de reta.

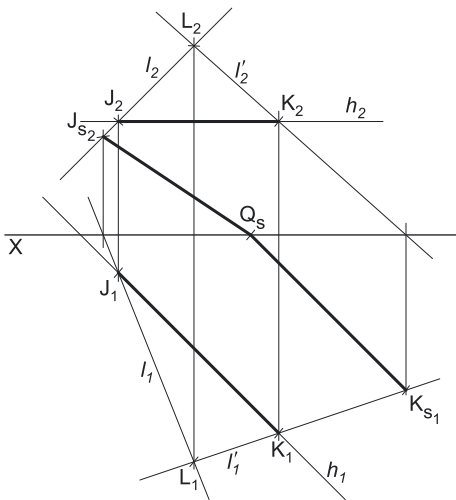
Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y ≡ Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O raio luminoso **l**, porque integra os dados, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o segmento de reta **[JK]** e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o segmento de reta **[JK]** ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o segmento. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.



194.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **J** e **L** (o foco luminoso), pelas respetivas projeções, em função dos dados e desenharam-se as projeções da reta **h**, a reta suporte do segmento **[JK]** (também em função dos dados).

Resolução:*Determinação das projeções do segmento:*

A reta **h** (a reta suporte do segmento **[JK]**) é paralela ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que o segmento se projeta em verdadeira grandeza em projeção horizontal. Assim, sobre **h₁** (a projeção horizontal da reta **h**), a partir de **J₁** (a projeção horizontal do ponto **J**), mediram-se os 6 cm (o comprimento do segmento), o que nos permitiu determinar **K₁** (a projeção horizontal do ponto **K**). Note que se garantiu que **K** tem afastamento positivo, para que o segmento se situe no espaço do 1.^o Diedro, como é expressamente referido no enunciado. A projeção frontal do ponto **K** (**K₂**) situa-se sobre a projeção frontal da reta **h** (**h₂**).

Em seguida, desenharam-se as projeções do segmento de reta **[JK]**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Determinação da sombra projetada do segmento:

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos pontos **J** e **K** (os extremos do segmento) nos Planos de Projeção. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam. A reta l é o raio luminoso que passa pelo ponto **J** (e pelo foco luminoso **L**) – J_{s_2} é a sombra real do ponto **J** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso l . A reta l' é o raio luminoso que passa pelo ponto **K** (e pelo foco luminoso **L**) – K_{s_1} é a sombra real do ponto **K** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso l' .

As sombras reais dos dois extremos do segmento situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do segmento de reta **admite necessariamente a existência** de um **ponto de quebra**. Para determinar o ponto de quebra teve-se em conta que o segmento de reta **[JK]** é um segmento de reta horizontal (de nível) e que a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção de um segmento de reta horizontal (de nível) é paralela ao próprio segmento.

Assim, por K_{s_1} (a sombra real do ponto **K**, que se situa no **SPHA**) conduziu-se uma reta paralela a $[J_1K_1]$ (a projeção horizontal do segmento) até ao eixo **X**, onde se situa Q_s (o ponto de quebra da sombra do segmento **[JK]**). Q_s é a sombra de um ponto **Q**, do segmento **[JK]**, cujas projeções não se determinaram, por não serem necessárias.

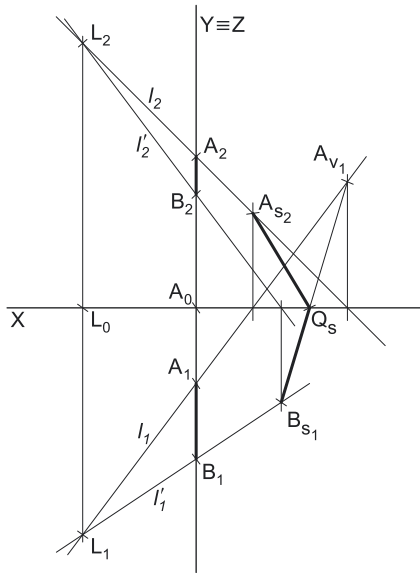
O segmento $[Q_sK_{s_1}]$ é a **sombra real** do segmento **[JK]** no Plano Horizontal de Projeção. Em seguida, desenhou-se o segmento $[J_2Q_s]$, que é a **sombra real** do segmento de reta **[JK]** no Plano Frontal de Projeção. A linha quebrada aberta $[J_2Q_sK_{s_1}]$ é a **sombra real** do segmento **[JK]** nos planos de projeção.

Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y = Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o segmento de reta **[JK]** e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o segmento de reta **[JK]** ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o segmento. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

195.



Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A**, **B** e **L** (o foco luminoso), pelas respetivas projeções, em função dos dados e desenharam-se as projeções do segmento de reta **[AB]**.

Resolução:

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos pontos **A** e **B** (os extremos do segmento) nos Planos de Projeção. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam. A reta l é o raio luminoso que passa pelo ponto **A** (e pelo foco luminoso **L**) – A_{s_2} é a sombra real do ponto **A** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso l . A reta l' é o raio luminoso que passa pelo ponto **B** (e pelo foco luminoso **L**) – B_{s_1} é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso l' .

As sombras reais dos dois extremos do segmento situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do segmento de reta **admite necessariamente a existência** de um **ponto de quebra**. Para determinar o ponto de quebra recorreu-se à sombra virtual do ponto **A** – A_{v_1} . A_{v_1} é a sombra virtual do ponto **A** – situa-se no **SPHP** e é o traço horizontal do raio luminoso l . O segmento $[A_{v_1}B_{s_1}]$ é, assim, a sombra projetada do segmento **[AB]** no Plano Horizontal de Projeção. O ponto de interseção do segmento $[A_{v_1}B_{s_1}]$ (a sombra do segmento no Plano Horizontal de Projeção) com o eixo **X** é Q_s (o ponto de quebra da sombra do segmento).

Q_s é a sombra de um ponto **Q**, do segmento **[AB]**, cujas projeções não se determinaram, por não serem necessárias. O segmento $[Q_sB_{s_1}]$ é a **parte real** da sombra projetada do segmento **[AB]** no Plano Horizontal de Projeção. O segmento $[A_{v_1}Q_s]$ é a **parte virtual** da sombra projetada do segmento **[AB]** no Plano Horizontal de Projeção. O segmento $[A_{s_2}Q_s]$ é a **parte real** da sombra do segmento **[AB]** no Plano Frontal de Projeção.

A linha quebrada aberta $[A_{s_2}Q_sB_{s_1}]$ é a **sombra real** do segmento **[AB]** nos planos de projeção.

Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y = Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o segmento de reta **[AB]** e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o segmento de reta **[AB]** ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o segmento. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

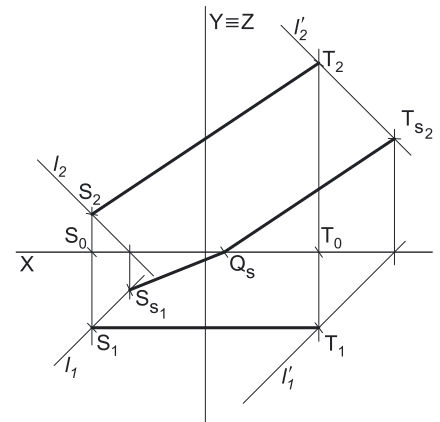
196.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **S** e **T**, pelas respetivas projeções, em função dos dados e desenharam-se as projeções do segmento **[ST]**. A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

Resolução:

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos pontos **S** e **T** (os extremos do segmento) nos Planos de Projeção. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam. A reta **l** é o raio luminoso que passa pelo ponto **S** – **S_{s1}** é a sombra real do ponto **S** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso **l**. A reta **l'** é o raio luminoso que passa pelo ponto **T** – **T_{s2}** é a sombra real do ponto **T** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso **l'**. Os raios luminosos **l** e **l'** são paralelos entre si e são paralelos à direção convencional da luz.



As sombras reais dos dois extremos do segmento situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do segmento de reta **admite necessariamente a existência** de um **ponto de quebra**. Para determinar o ponto de quebra teve-se em conta que o segmento de reta **[ST]** é um segmento de reta frontal (de frente) e que a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção de um segmento de reta frontal (de frente) é paralela ao próprio segmento.

Assim, por **T_{s2}** (a sombra real do ponto **T**, que se situa no **SPFS**) conduziu-se uma reta paralela a **[S₂T₂]** (a projeção frontal do segmento) até ao eixo **X**, onde se situa **Q_s** (o ponto de quebra da sombra do segmento **[ST]**). **Q_s** é a sombra de um ponto **Q**, do segmento **[ST]**, cujas projeções não se determinaram, por não serem necessárias.

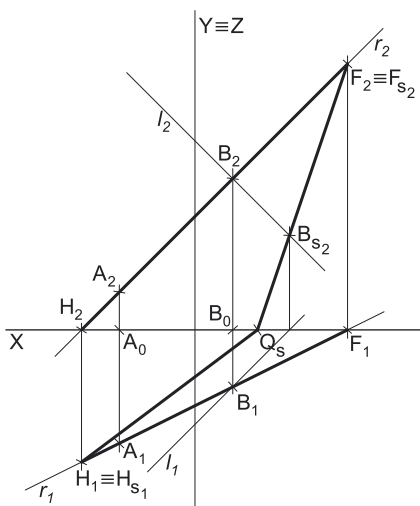
O segmento **[Q_sT_{s2}]** é a **sombra real** do segmento **[ST]** no Plano Frontal de Projeção. Em seguida, desenhou-se o segmento **[S_{s1}Q_s]**, que é a **sombra real** do segmento de reta **[ST]** no Plano Horizontal de Projeção. A linha quebrada aberta **[S_{s1}Q_sT_{s2}]** é a **sombra real** do segmento **[ST]** nos planos de projeção.

Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y = Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o segmento de reta **[ST]** e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o segmento de reta **[ST]** ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o segmento. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

197.



Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respetivas projeções, em função dos dados, e desenharam-se as projeções da reta **r**. A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

Resolução:

Tendo em conta que apenas existem sombras no espaço do **1º Diedro** (nas faces do **1º Diedro**), a parte da reta susceptível de produzir sombra é a parte da reta que se situa no **1º Diedro**. Assim, a primeira etapa da resolução consiste em identificar a parte da reta que se situa no **1º Diedro** (a parte da reta que pode produzir sombra).

Nesse sentido, determinaram-se os traços da reta **r** nos planos de projeção (os pontos **F** e **H**) e identificou-se a parte da reta que se situa no **1º Diedro**. O segmento **[FH]** é a parte da reta que se situa no **1º Diedro** – a parte da reta susceptível de produzir sombra nas faces do **1º Diedro**. Assim, a sombra projetada da reta corresponde, na prática, à sombra projetada do segmento de reta **[FH]**. Em seguida, determinou-se a sombra do segmento de reta **[FH]**.

O ponto **F** é um ponto do Plano Frontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente, **F_{s2} ≡ F₂**. O ponto **H** é um ponto do Plano Horizontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente, **H_{s1} ≡ H₁**.

As sombras reais dos dois extremos do segmento **[FH]** situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do segmento de reta **admite necessariamente a existência** de um **ponto de quebra**. Para determinar o ponto de quebra recorreu-se à sombra real do ponto **B**. A reta **l** é o raio luminoso que passa pelo ponto **B** – **B_{s2}** é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso **l**. O raio luminoso **l** está definido por um ponto (o ponto **B**) e por uma direção (a direção convencional da luz).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A sombra projetada do segmento **[FH]** tem necessariamente que passar por B_{s_2} . Assim, desenhou-se um segmento de reta com um extremo em F_{s_2} , passando por B_{s_2} e com o outro extremo no eixo **X** – esse extremo é o ponto Q_s (o ponto de quebra da sombra do segmento).

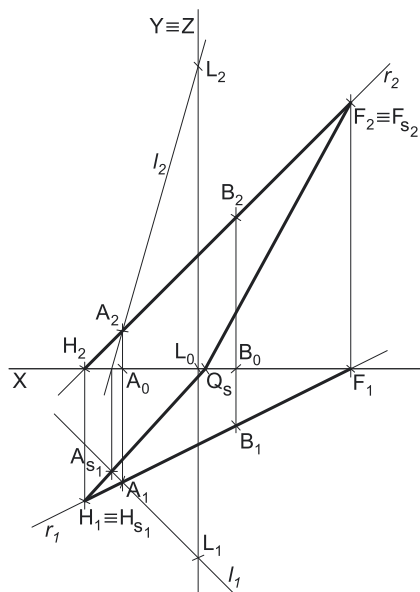
Q_s é a sombra de um ponto **Q**, do segmento **[FH]**, cujas projeções não se determinaram, por não serem necessárias. O segmento $[Q_s F_{s_2}]$ (que se situa no **SPFS**) é a **sombra real** do segmento **[FH]** no Plano Frontal de Projeção. O segmento $[H_{s_1} Q_s]$ (que se situa no **SPHA**) é a **sombra real** do segmento **[FH]** no Plano Horizontal de Projeção.

A linha quebrada aberta $[H_{s_1} Q_s F_{s_2}]$ é a **sombra real** da reta **r** nos planos de projeção.

Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo $Y \equiv Z$ representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o segmento de reta **[FH]** e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). A reta **r**, apesar de integrar os dados, no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções do raio luminoso), representaram-se a **leve**.

198.



Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A**, **B** e **L** (o foco luminoso), pelas respetivas projeções, em função dos dados, e desenharam-se as projeções da reta **r**.

Resolução:

Tendo em conta que apenas existem sombras no espaço do 1^{a} Diedro (nas faces do 1^{a} Diedro), a parte da reta susceptível de produzir sombra é a parte da reta que se situa no 1^{a} Diedro. Assim, a primeira etapa da resolução consiste em identificar a parte da reta que se situa no 1^{a} Diedro (a parte da reta que pode produzir sombra).

Nesse sentido, determinaram-se os traços da reta **r** nos planos de projeção (os pontos **F** e **H**) e identificou-se a parte da reta que se situa no 1^{a} Diedro. O segmento **[FH]** é a parte da reta que se situa no 1^{a} Diedro – a parte da reta susceptível de produzir sombra nas faces do 1^{a} Diedro. Assim, a sombra projetada da reta corresponde, na prática, à sombra projetada do segmento de reta **[FH]**. Em seguida, determinou-se a sombra do segmento de reta **[FH]**.

O ponto **F** é um ponto do Plano Frontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente, $F_{s_2} \equiv F_2$. O ponto **H** é um ponto do Plano Horizontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente, $H_{s_1} \equiv H_1$.

As sombras reais dos dois extremos do segmento **[FH]** situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do segmento de reta **admite necessariamente a existência** de um **ponto de quebra**. Para determinar o ponto de quebra recorreu-se à sombra real do ponto **A**. A reta **l** é o raio luminoso que passa pelo ponto **A** (e pelo foco luminoso **L**) – A_{s_1} é a sombra real do ponto **A** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso **l**. O raio luminoso **l** está definido por dois pontos – o ponto **A** e o foco luminoso **L**.

A sombra projetada do segmento **[FH]** tem necessariamente que passar por A_{s_1} . Assim, desenhou-se um segmento de reta com um extremo em H_{s_1} , passando por A_{s_1} e com o outro extremo no eixo **X** – esse extremo é o ponto Q_s (o ponto de quebra da sombra do segmento).

Q_s é a sombra de um ponto **Q**, do segmento **[FH]**, cujas projeções não se determinaram, por não serem necessárias. O segmento $[H_{s_1} Q_s]$ (que se situa no **SPHA**) é a **sombra real** do segmento **[FH]** no Plano Horizontal de Projeção. O segmento $[Q_s F_{s_2}]$ (que se situa no **SPFS**) é a **sombra real** do segmento **[FH]** no Plano Frontal de Projeção.

A linha quebrada aberta $[H_{s_1} Q_s F_{s_2}]$ é a **sombra real** da reta **r** nos planos de projeção.

Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo $Y \equiv Z$ representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o segmento de reta **[FH]** e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). A reta **r**, apesar de integrar os dados, no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos), representaram-se a **leve**.

199.

Dados:

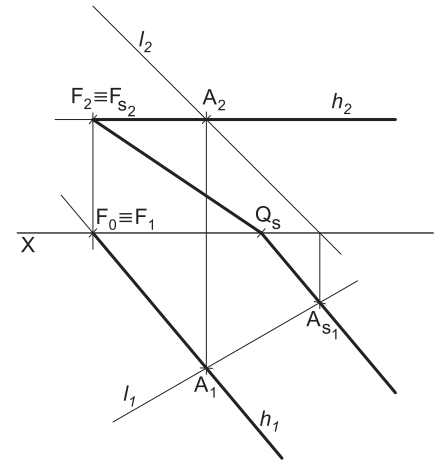
Em primeiro lugar, representaram-se o ponto **F** (o traço frontal da reta **h**) e a reta **h**, pelas respetivas projeções, em função dos dados.

Resolução:

Tendo em conta que apenas existem sombras no espaço do 1ª Diedro (nas faces do 1ª Diedro), a parte da reta susceptível de produzir sombra é a parte da reta que se situa no 1ª Diedro. Assim, a primeira etapa da resolução consiste em identificar a parte da reta que se situa no 1ª Diedro (a parte da reta que pode produzir sombra).

Nesse sentido, identificou-se a parte da reta que se situa no 1ª Diedro – a semirreta que se situa para a direita do ponto **F** (a parte da reta susceptível de produzir sombra nas faces do 1ª Diedro). Assim, a sombra projetada da reta corresponde, na prática, à sombra projetada da semirreta **FA**, sendo **A** um ponto qualquer da reta **h**. Assim, determinou-se a sombra da semirreta **FA**.

O ponto **F** é um ponto do Plano Frontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente, $F_{s2} \equiv F_2$. Em seguida determinou-se a sombra real do ponto **A**. Para tal, conduziu-se, pelo ponto **A**, um raio luminoso $l - A_{s1}$ é a sombra real do ponto **A** (situa-se no SPHA) e é o traço horizontal do raio luminoso l . O raio luminoso l está definido por um ponto (o ponto **A**) e por uma direção (a direção dada no enunciado).



As sombras reais dos dois pontos (**F** e **A**) situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) da semirreta **FA** admite necessariamente a existência de um ponto de quebra. Para determinar o ponto de quebra teve-se em conta que a reta **h** é uma reta horizontal (de nível) e que a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção de uma reta horizontal (de nível) é paralela à própria reta.

A sombra projetada da semirreta **FA** tem necessariamente que passar por **As1**. Assim, desenhou-se uma semirreta paralela a **h1** (a projeção horizontal da reta **h**) e passando por **As1**, com o seu extremo no eixo **X** – o extremo da semirreta é o ponto **Qs** (o ponto de quebra da sombra da semirreta).

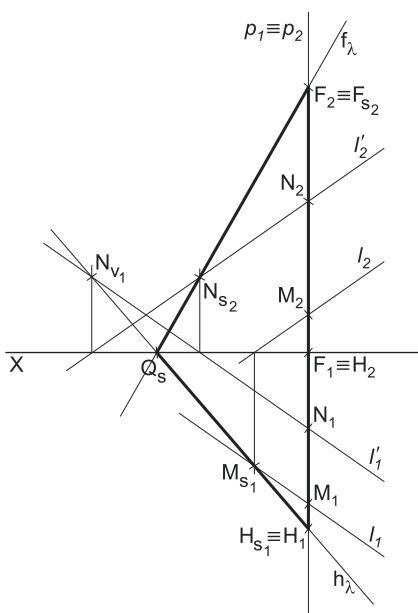
Qs é a sombra de um ponto **Q**, da semirreta **FA**, cujas projeções não se determinaram, por não serem necessárias. A semirreta **QsAs1** (que se situa no SPHA) é a sombra real semirreta **FA** no Plano Horizontal de Projeção. O segmento $[F_{s2}Q_s]$ (que se situa no SPFS) é a sombra real semirreta **FA** no Plano Frontal de Projeção.

A linha quebrada infinita que tem um extremo em **Fs2**, um vértice em **Qs** e que passa por **As1** é a sombra real da reta **h** nos planos de projeção.

Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a médio. O pedido representou-se a forte – a semirreta **FA** e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). A reta **h**, apesar de integrar os dados, no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que se representou a leve. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções do raio luminoso), representaram-se a leve.

200.



Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **M** e **N**, pelas respetivas projeções, em função dos dados, e desenharam-se as projeções da reta **p**.

Resolução:

Tendo em conta que apenas existem sombras no espaço do 1ª Diedro (nas faces do 1ª Diedro), a parte da reta susceptível de produzir sombra é a parte da reta que se situa no 1ª Diedro. Assim, a primeira etapa da resolução consiste em identificar a parte da reta que se situa no 1ª Diedro (a parte da reta que pode produzir sombra).

Para tal, há que determinar os traços da reta **p** nos planos de projeção. Salienta-se que a reta **p** é uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o Critério de Reversibilidade, pelo que a determinação dos traços da reta **p** nos planos de projeção não é direta – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar, por exemplo. No entanto, optou-se por uma resolução diferente, que economiza bastante traçado e que consiste em conduzir, pela reta, o respetivo plano luz/sombra – a sombra da reta nos planos de projeção estará contida nos traços do plano luz/sombra da reta.

O plano luz/sombra da reta **p** está definido por duas retas concorrentes – a reta **p** e um raio luminoso concorrente com a reta **p**. Assim, pelo ponto **M** conduziu-se um raio luminoso l – o raio luminoso l está definido por um ponto (o ponto **M**) e por uma direção (a direção luminosa dada no enunciado). O plano luz/sombra da reta **p** está definido por duas retas concorrentes no ponto **M** – a reta **p** e o raio luminoso l . Determinemos os traços do plano luz/sombra da reta **p** (o plano λ), nos quais estará contida a sombra projetada da reta **p**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Começamos por determinar o seu traço horizontal (h_λ). Para tal, determinou-se a sombra real do ponto $M - M_{s_1}$ é a **sombra real** do ponto M (situa-se no **SPHA**) e é o **traço horizontal** do raio luminoso l . Já temos um ponto para definir h_λ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. Os dados do plano λ são insuficientes para definir a reta h_λ (o traço horizontal do plano λ), pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano λ , reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção.

Recorreu-se ao raio luminoso l' , como reta auxiliar do plano, passando pelo ponto N . O raio luminoso l' está definido por um ponto (o ponto N – o seu ponto de concorrência com a reta p) e por uma direção (a direção luminosa dada). Em seguida, determinou-se a sombra real do ponto $N - N_{s_2}$ é a **sombra real** do ponto N (situa-se no **SPFS**) e é o **traço frontal** do raio luminoso l' . Depois, determinou-se a sombra virtual do ponto $N - N_{v_1}$ é a **sombra virtual** do ponto N (situa-se no **SPHP**) e é o **traço horizontal** do raio luminoso l' .

Já temos o ponto que nos faltava para definir h_λ (o traço horizontal do plano λ), que está definido por dois pontos – os pontos M_{s_1} e N_{v_1} (que são os traços horizontais dos raios luminosos l e l').

Determinemos, em seguida, o traço frontal do plano λ (f_λ). Já temos um ponto para definir f_λ – o ponto de concorrência dos dois traços do plano (um ponto do eixo X). Falta-nos outro ponto ou uma direção. A sombra real do ponto N (N_{s_2}) é o **traço frontal** do raio luminoso l' , pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir $f_\lambda - f_\lambda$ está definido por dois pontos (o ponto N_{s_2} e o ponto de concorrência dos dois traços do plano λ).

Como a reta p pertence ao plano λ , os seus traços têm de estar sobre os traços homónimos do plano – este raciocínio permitiu-nos determinar os traços da reta p nos planos de projeção (os pontos F e H), sobre os traços homónimos do plano. Assim, a parte da reta que produz sombra (a parte da reta que se situa no espaço do 1^{a} Diedro) é o segmento de reta $[FH]$ (a parte da reta que se situa no espaço do 1^{a} Diedro). A sombra projetada da reta p nos planos de projeção é, assim, a sombra do segmento de reta $[FH]$ nos planos de projeção.

O ponto F é um ponto do Plano Frontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente, $F_{s_2} \equiv F_2$. O ponto H é um ponto do Plano Horizontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente, $H_{s_1} \equiv H_1$. As sombras reais dos dois extremos do segmento $[FH]$ situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do segmento de reta **admite necessariamente a existência** de um **ponto de quebra**.

Tendo em conta que a sombra projetada da reta p está contida nos traços do plano λ (o plano luz/sombra da reta) nos planos de projeção, o ponto de concorrência dos dois traços do plano é, necessariamente, o ponto de quebra da sombra da reta p . Nesse sentido, identificou-se o ponto de concorrência dos traços do plano λ como $Q_s - Q_s$ é a sombra de um ponto Q , do segmento $[FH]$, cujas projeções não se determinaram, por não serem necessárias. O segmento $[H_{s_1} Q_s]$ (que está contido em h_λ) é a **sombra real** do segmento $[FH]$ no Plano Horizontal de Projeção. O segmento $[Q_s F_{s_2}]$ (que está contido em f_λ) é a **sombra real** do segmento $[FH]$ no Plano Frontal de Projeção.

A linha quebrada aberta $[H_{s_1} Q_s F_{s_2}]$ é a **sombra real** da reta p nos planos de projeção.

Traçado:

O eixo X , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o segmento de reta $[FH]$ e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). A reta p , apesar de integrar os dados, no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos ou dos traços do plano λ), representaram-se a **leve**.

201.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **M**, **N** e **L** (o foco luminoso), pelas respetivas projeções, em função dos dados, e desenharam-se as projeções da reta **p**.

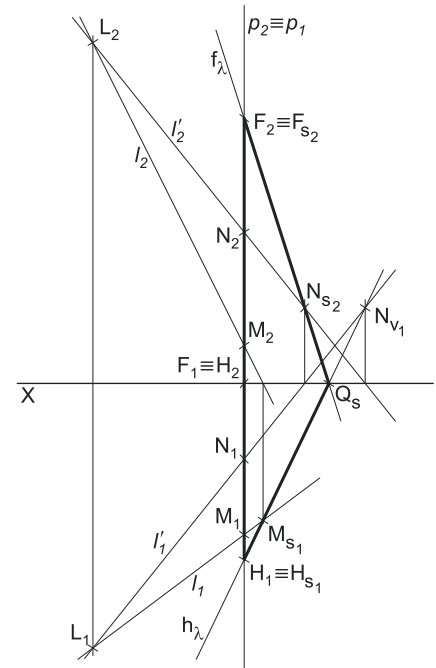
Resolução:

Tendo em conta que apenas existem sombras no espaço do 1^a Diedro (nas faces do 1^a Diedro), a parte da reta susceptível de produzir sombra é a parte da reta que se situa no 1^a Diedro. Assim, a primeira etapa da resolução consiste em identificar a parte da reta que se situa no 1^a Diedro (a parte da reta que pode produzir sombra).

Para tal, há que determinar os traços da reta **p** nos planos de projeção. Salienta-se que a reta **p** é uma reta de perfil, cujas projeções não verificam o **Crítério de Reversibilidade**, pelo que a determinação dos traços da reta **p** nos planos de projeção não é direta – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar, por exemplo. No entanto, optou-se por uma resolução diferente, que economiza bastante traçado e que consiste em conduzir, pela reta, o respetivo plano luz/sombra – a sombra da reta nos planos de projeção estará contida nos traços do plano luz/sombra da reta.

O plano luz/sombra da reta **p** está definido por duas retas concorrentes – a reta **p** e um raio luminoso concorrente com a reta **p**. Tendo em conta que se trata de um **foco luminoso** e que os raios luminosos são todos concorrentes no ponto **L** (o foco luminoso), nesta situação pode dizer-se que o plano luz/sombra da reta **p** está definido por uma reta (a reta **p**) e por um ponto exterior à reta (o ponto **L**).

Assim, pelo ponto **M** conduziu-se um raio luminoso **l** – o raio luminoso **l** está definido por dois pontos (o ponto **M** e o ponto **L**). O plano luz/sombra da reta **p** está definido por duas retas concorrentes no ponto **M** – a reta **p** e o raio luminoso **l**. Determinemos os traços do plano luz/sombra da reta **p** (o plano λ), nos quais estará contida a sombra projetada da reta **p**.



Começamos por determinar o seu traço horizontal (h_λ). Para tal, determinou-se a sombra real do ponto **M** – M_{s_1} é a **sombra real** do ponto **M** (situa-se no **SPHA**) e é o **traço horizontal** do raio luminoso **l**. Já temos um ponto para definir h_λ . Falta-nos outro ponto ou uma direção. Os dados do plano λ são insuficientes para definir a reta h_λ (o traço horizontal do plano λ), pelo que é necessário o recurso a uma reta auxiliar do plano λ , reta essa que, também ela, tem de estar definida por dois pontos ou por um ponto e uma direção.

Recorreu-se ao raio luminoso l' , como reta auxiliar do plano, passando pelo ponto **N**. O raio luminoso l' está definido por dois pontos – o ponto **N** (o seu ponto de concorrência com a reta **p**) e o ponto **L** (o foco luminoso). Em seguida determinou-se a sombra real do ponto **N** – N_{s_2} é a **sombra real** do ponto **N** (situa-se no **SPFS**) e é o **traço frontal** do raio luminoso l' . Depois, determinou-se a sombra virtual do ponto **N** – N_{v_1} é a **sombra virtual** do ponto **N** (situa-se no **SPHP**) e é o **traço horizontal** do raio luminoso l' .

Já temos o ponto que nos faltava para definir h_λ (o traço horizontal do plano λ), que está definido por dois pontos – os pontos M_{s_1} e N_{v_1} (que são os traços horizontais dos raios luminosos **l** e l').

Determinemos, em seguida, o traço frontal do plano λ (f_λ). Já temos um ponto para definir f_λ – o ponto de concorrência dos dois traços do plano (um ponto do eixo **X**). Falta-nos outro ponto ou uma direção. A sombra real do ponto **N** (N_{s_2}) é o **traço frontal** do raio luminoso l' , pelo que já temos o ponto que nos faltava para definir f_λ – f_λ está definido por dois pontos (o ponto N_{s_2} e o ponto de concorrência dos dois traços do plano λ).

Como a reta **p** pertence ao plano λ , os seus traços têm de estar sobre os traços homónimos do plano – este raciocínio permitiu-nos determinar os traços da reta **p** nos planos de projeção (os pontos **F** e **H**), sobre os traços homónimos do plano. Assim, a parte da reta que produz sombra (a parte da reta que se situa no espaço do 1^a Diedro) é o segmento de reta **[FH]** (a parte da reta que se situa no espaço do 1^a Diedro). A sombra projetada da reta **p** nos planos de projeção é, assim, a sombra do segmento de reta **[FH]** nos planos de projeção.

O ponto **F** é um ponto do Plano Frontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente, $F_{s_2} \equiv F_2$. O ponto **H** é um ponto do Plano Horizontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente, $H_{s_1} \equiv H_1$. As sombras reais dos dois extremos do segmento **[FH]** situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do segmento de reta **admite necessariamente a existência** de um **ponto de quebra**.

Tendo em conta que a sombra projetada da reta **p** está contida nos traços do plano λ (o plano luz/sombra da reta) nos planos de projeção, o ponto de concorrência dos dois traços do plano é, necessariamente, o ponto de quebra da sombra da reta **p**. Nesse sentido, identificou-se o ponto de concorrência dos traços do plano λ como $Q_s - Q_s$ é a sombra de um ponto **Q**, do segmento **[FH]**, cujas projeções não se determinaram, por não serem necessárias. O segmento $[H_{s_1} Q_s]$ (que está contido em h_λ) é a **sombra real** do segmento **[FH]** no Plano Horizontal de Projeção. O segmento $[Q_s F_{s_2}]$ (que está contido em f_λ) é a **sombra real** do segmento **[FH]** no Plano Frontal de Projeção.

A linha quebrada aberta $[H_{s_1} Q_s F_{s_2}]$ é a **sombra real** da reta **p** nos planos de projeção.

Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o segmento de reta **[FH]** e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). A reta **p**, apesar de integrar os dados, no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos ou dos traços do plano λ), representaram-se a **leve**.

202.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **R** e **S**, pelas suas projeções, em função dos dados, e desenharam-se as projeções da reta **m**. A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

Resolução:

Tendo em conta que apenas existem sombras no espaço do 1ª Diedro (nas faces do 1ª Diedro), a parte da reta susceptível de produzir sombra é a parte da reta que se situa no 1ª Diedro. Assim, a primeira etapa da resolução consiste em identificar a parte da reta que se situa no 1ª Diedro (a parte da reta que pode produzir sombra).

Nesse sentido, determinaram-se os traços da reta **m** nos planos de projeção (os pontos **F** e **H**) e identificou-se a parte da reta que se situa no 1ª Diedro – a semirreta **HS** (a semirreta que se situa para a direita do ponto **H**). Assim, a sombra projetada (real) da reta **m** corresponde, na prática, à sombra projetada da semirreta **HS**. Assim, determinou-se a sombra da semirreta **HS**.

O ponto **H** é um ponto do Plano Horizontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente, $H_{s_1} \equiv H_1$. Em seguida determinou-se a sombra real do ponto **S**. Para tal, conduziu-se, pelo ponto **S**, um raio luminoso **l** – S_{s_2} é a sombra real do ponto **S** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso **l**. O raio luminoso **l** está definido por um ponto (o ponto **S**) e por uma direção (a direção convencional da luz).

As sombras reais dos dois pontos (**H** e **S**) situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) da semirreta **HS** admite necessariamente a existência de um ponto de quebra. Para determinar o ponto de quebra recorreu-se à sombra virtual de outro ponto da reta **m** – o seu traço frontal, por exemplo. O traço frontal da reta **m** (o ponto **F**) situa-se no Plano Frontal de Projeção, pelo que a sua sombra está coincidente com o próprio ponto – uma vez que o ponto **F** se situa no **SPFI**, a sombra projetada do ponto **F** no Plano Frontal de Projeção é uma sombra virtual (tem-se imediatamente $F_{v_2} \equiv F_2$).

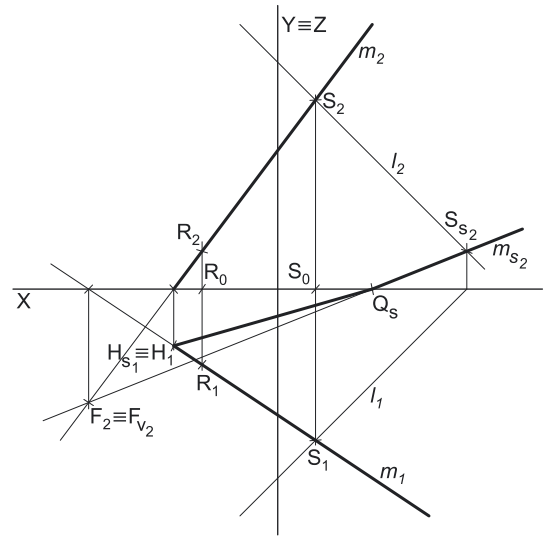
Em seguida desenhou-se a reta que passa por F_{v_2} e por S_{s_2} – a reta m_{s_2} . A reta m_{s_2} é a sombra projetada da reta **m** no Plano Frontal de Projeção, sendo que a parte da reta m_{s_2} que se situa para cima do eixo **X** (e que passa por S_{s_2}) é a parte real dessa sombra (porque se situa no **SPFS**) e a parte da reta m_{s_2} que se situa para baixo do eixo **X** é a parte virtual dessa sombra (porque se situa no **SPFI**). O ponto em que a reta m_{s_2} intersecta o eixo **X** é, assim, o ponto de quebra da sombra da reta **m** – o ponto Q_s .

Q_s é a sombra de um ponto **Q**, da semirreta **HS**, cujas projeções não se determinaram, por não serem necessárias. A semirreta $Q_s S_{s_2}$ (que se situa no **SPFS**) é a sombra real semirreta **HS** no Plano Frontal de Projeção. O segmento $[H_{s_1} Q_s]$ (que se situa no **SPHA**) é a sombra real semirreta **HS** no Plano Horizontal de Projeção.

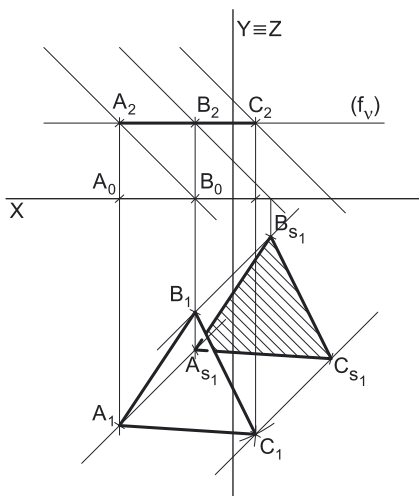
A linha quebrada infinita que tem um extremo em H_{s_1} , um vértice em Q_s e que passa por S_{s_2} é a sombra real da reta **m** nos planos de projeção.

Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a médio. O eixo **Y ≡ Z** representou-se a leve, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a forte – a semirreta **HS** e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). A reta **m**, apesar de integrar os dados, no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que se representou a leve. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções do raio luminoso), representaram-se a leve.



203.



Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Em seguida representou-se o plano **v** (o plano horizontal que contém a figura) pelo seu traço frontal. O plano **v** é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal (f_v) passa por A_2 e por B_2 (as projeções frontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente). O plano **v** não tem traço horizontal, pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis. A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

Resolução:

Determinação das projeções do triângulo **[ABC]**:

O plano que contém o triângulo **[ABC]** é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que o triângulo se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (a sua projeção horizontal não tem deformação). Assim, a partir de A_1 (a projeção horizontal do ponto **A**) e de B_1 (a projeção horizontal do ponto **B**) construiu-se a projeção horizontal do triângulo (em verdadeira grandeza), o que nos permitiu determinar C_1 (a projeção horizontal do ponto **C**) – C_2 (a projeção frontal do ponto **C**) situa-se sobre f_v (o traço frontal do plano **v**), pois o plano **v** é um plano projetante frontal. Em seguida, desenharam-se as duas projeções da figura.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Determinação da sombra do triângulo [ABC] nos planos de projeção:

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos três vértices do triângulo – os pontos **A**, **B** e **C**. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam, que não se identificaram (para evitar o excesso de notações no desenho e porque não é absolutamente necessária a sua identificação). Cada um dos raios luminosos está definido por um ponto (o respetivo vértice do triângulo) e por uma direção (a direção convencional da luz).

A_{s_1} é a sombra real do ponto **A** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que por ele passa. B_{s_1} é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que por ele passa. C_{s_1} é a sombra real do ponto **C** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que por ele passa. As sombras reais dos três vértices da figura situam-se no mesmo plano de projeção (situam-se todas no **SPHA**), pelo que a sombra projetada (real) do triângulo **não admite a existência de pontos de quebra**. Assim, desenhou-se o triângulo $[A_{s_1}B_{s_1}C_{s_1}]$, que é a **sombra real** do triângulo **[ABC]** nos planos de projeção. Note que, na prática, a sombra projetada do triângulo é limitada pelas sombras projetadas dos lados do triângulo nos planos de projeção e que os lados do triângulo são segmentos de reta.

Salienta-se que existe uma sobreposição entre o triângulo $[A_{s_1}B_{s_1}C_{s_1}]$ e o triângulo $[A_1B_1C_1]$ – essa sobreposição corresponde ao facto de parte do triângulo $[A_{s_1}B_{s_1}C_{s_1}]$ (a sombra do triângulo) estar oculto pela própria figura (que «tapa» parte da sua sombra), pelo é invisível. Assim, a **parte invisível** da sombra (a parte da sombra que está oculta pela figura) representou-se a traço interrompido.

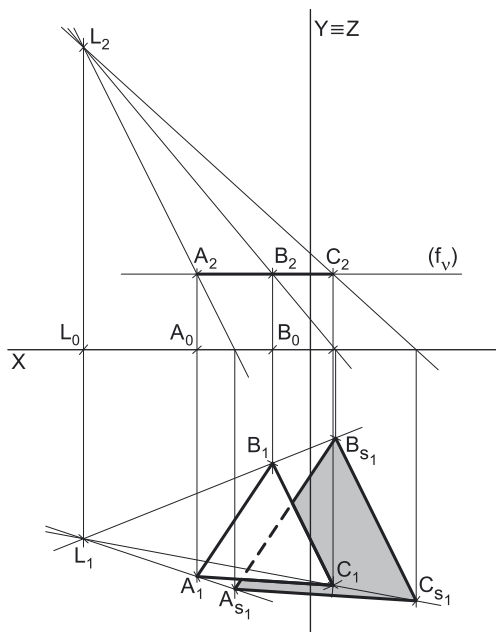
Por fim, preencheu-se a **parte visível** da sombra do triângulo com tracejado. Este foi executado perpendicularmente à direção luminosa, em projeção horizontal – a direção luminosa, em projeção horizontal, faz ângulos de 45° (de abertura para **a esquerda**) com o eixo **X**, pelo que o tracejado faz ângulos de 45° (de abertura para **a direita**) com o eixo **X**.

Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y \equiv Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o triângulo **[ABC]** e a sua sombra projetada nos planos de projeção, incluindo as invisibilidades observadas (o objetivo final do exercício). O traço frontal do plano v (o plano que contém a figura), apesar de integrar os dados, no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos), representaram-se a **leve**. O tracejado executou-se a **leve**, pois os tracejados são sempre a **leve**.

Note que, apesar de o triângulo **[ABC]** ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o triângulo. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

204.



Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A**, **B** e **L** (o foco luminoso) pelas respetivas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano v (o plano horizontal que contém a figura) pelo seu traço frontal. O plano v é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal (f_v) passa por A_2 e por B_2 (as projeções frontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente). O plano v não tem traço horizontal, pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

Resolução:

Determinação das projeções do triângulo [ABC]:

O plano que contém o triângulo **[ABC]** é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que o triângulo se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (a sua projeção horizontal não tem deformação). Assim, a partir de A_1 (a projeção horizontal do ponto **A**) e de B_1 (a projeção horizontal do ponto **B**) construiu-se a projeção horizontal do triângulo (em verdadeira grandeza), o que nos permitiu determinar C_1 (a projeção horizontal do ponto **C**) – C_2 (a projeção frontal do ponto **C**) situa-se sobre f_v (o traço frontal do plano v), pois o plano v é um plano projetante frontal. Em seguida, desenharam-se as duas projeções da figura.

Determinação da sombra do triângulo [ABC] nos planos de projeção:

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos três vértices do triângulo – os pontos **A**, **B** e **C**. Para tal, conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam, que não se identificaram (para evitar o excesso de notações no desenho e porque não é absolutamente necessária a sua identificação). Cada um dos raios luminosos está definido por dois pontos – o respetivo vértice do triângulo o foco luminoso (o ponto **L**).

A_{s_1} é a sombra real do ponto **A** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que por ele passa. B_{s_1} é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que por ele passa. C_{s_1} é a sombra real do ponto **C** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que por ele passa. As sombras reais dos três vértices da figura situam-se no mesmo plano de projeção (situam-se todas no **SPHA**), pelo que a sombra projetada (real) do triângulo **não admite a existência de pontos de quebra**. Assim, desenhou-se o triângulo $[A_{s_1}B_{s_1}C_{s_1}]$, que é a **sombra real** do triângulo **[ABC]** nos planos de projeção. Note que, na prática, a sombra projetada do triângulo é limitada pelas sombras projetadas dos lados do triângulo nos planos de projeção e que os lados do triângulo são segmentos de reta.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Salienta-se que existe uma sobreposição entre o triângulo $[A_s B_s C_s]$ e o triângulo $[A_1 B_1 C_1]$ – essa sobreposição corresponde ao facto de parte do triângulo $[A_s B_s C_s]$ (a sombra do triângulo) estar oculto pela própria figura (que «tapa» parte da sua sombra), pelo que é invisível. Assim, a **parte invisível** da sombra (a parte da sombra que está oculta pela figura) representou-se a traço interrompido.

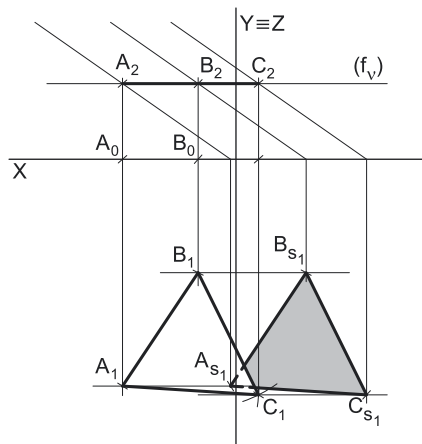
Por fim, preencheu-se a **parte visível** da sombra do triângulo com uma mancha clara e uniforme – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Traçado:

O eixo X , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo $Y \equiv Z$ representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o triângulo $[ABC]$ e a sua sombra projetada nos planos de projeção, incluindo as invisibilidades observadas (o objetivo final do exercício). O traço frontal do plano v (o plano que contém a figura), apesar de integrar os dados, no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o triângulo $[ABC]$ ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o triângulo. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

205.



Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Em seguida representou-se o plano v (o plano horizontal que contém a figura) pelo seu traço frontal. O plano v é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal (f_v) passa por A_2 e por B_2 (as projeções frontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente). O plano v não tem traço horizontal, pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

Resolução:

Determinação das projeções do triângulo $[ABC]$:

O plano que contém o triângulo $[ABC]$ é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que o triângulo se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção (a sua projeção horizontal não tem deformação). Assim, a partir de A_1 (a projeção horizontal do ponto **A**) e de B_1 (a projeção horizontal do ponto **B**) construiu-se a projeção horizontal do triângulo (em verdadeira grandeza), o que nos permitiu determinar C_1 (a projeção horizontal do ponto **C**) – C_2 (a projeção frontal do ponto **C**) situa-se sobre f_v (o traço frontal do plano v), pois o plano v é um plano projetante frontal. Em seguida desenharam-se as duas projeções da figura.

Determinação da sombra do triângulo $[ABC]$ nos planos de projeção:

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos três vértices do triângulo – os pontos **A**, **B** e **C**. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam, que não se identificaram (para evitar o excesso de notações no desenho e porque não é absolutamente necessária a sua identificação). Cada um dos raios luminosos está definido por um ponto (o respetivo vértice do triângulo) e por uma direção (a direção luminosa dada no enunciado).

A_{s1} é a sombra real do ponto **A** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que por ele passa. B_{s1} é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que por ele passa. C_{s1} é a sombra real do ponto **C** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que por ele passa. As sombras reais dos três vértices da figura situam-se no mesmo plano de projeção (situam-se todas no **SPHA**), pelo que a sombra projetada (real) do triângulo **não admite a existência de pontos de quebra**. Assim, desenhou-se o triângulo $[A_{s1} B_{s1} C_{s1}]$, que é a **sombra real** do triângulo $[ABC]$ nos planos de projeção. Note que, na prática, a sombra projetada do triângulo é limitada pelas sombras projetadas dos lados do triângulo nos planos de projeção e que os lados do triângulo são segmentos de reta.

Salienta-se que existe uma sobreposição entre o triângulo $[A_{s1} B_{s1} C_{s1}]$ e o triângulo $[A_1 B_1 C_1]$ – essa sobreposição corresponde ao facto de parte do triângulo $[A_{s1} B_{s1} C_{s1}]$ (a sombra do triângulo) estar oculto pela própria figura (que «tapa» parte da sua sombra), pelo que é invisível. Assim, a **parte invisível** da sombra (a parte da sombra que está oculta pela figura) representou-se a traço interrompido.

Por fim, preencheu-se a **parte visível** da sombra do triângulo com uma mancha clara e uniforme – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Traçado:

O eixo X , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo $Y \equiv Z$ representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o triângulo $[ABC]$ e a sua sombra projetada nos planos de projeção, incluindo as invisibilidades observadas (o objetivo final do exercício). O traço frontal do plano v (o plano que contém a figura), apesar de integrar os dados, no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o triângulo $[ABC]$ ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o triângulo. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

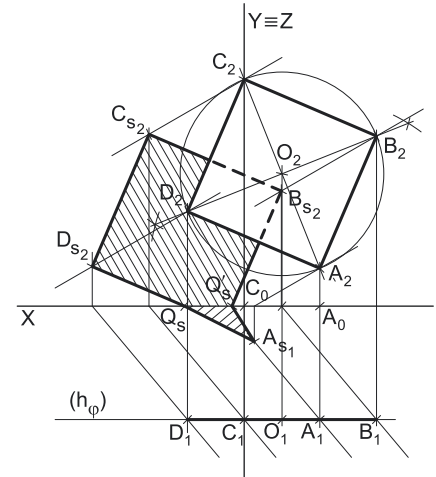
206.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **C**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Em seguida representou-se o plano ϕ (o plano frontal que contém a figura) pelo seu traço horizontal. O plano ϕ é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal (h_ϕ) passa por **A**₁ e por **C**₁ (as projeções horizontais dos pontos **A** e **C**, respetivamente). O plano ϕ não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.

Resolução:*Determinação das projeções do quadrado [ABCD]:*

O plano que contém o quadrado [ABCD] é paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pelo que o quadrado se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (a sua projeção frontal não tem deformação). Assim, a partir de **A**₂ (a projeção frontal do ponto **A**) e de **C**₂ (a projeção frontal do ponto **C**), determinaram-se as projeções do ponto médio do segmento [AC] (o ponto **D**) e efetuou-se a construção da projeção frontal do quadrado, em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar as projeções frontais dos outros dois vértices do quadrado – as suas projeções horizontais situam-se sobre h_ϕ , (o traço horizontal do plano ϕ), pois o plano ϕ é um plano projetante horizontal. Em seguida, desenharam-se as duas projeções da figura.

*Determinação da sombra do quadrado [ABCD] nos planos de projeção:*

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos quatro vértices do quadrado – os pontos **A**, **B**, **C** e **D**. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam, que não se identificaram (para evitar o excesso de notações no desenho e porque não é absolutamente necessária a sua identificação). Cada um dos raios luminosos está definido por um ponto (o respetivo vértice do quadrado) e por uma direção (a direção luminosa dada no enunciado).

A_{s1} é a sombra real do ponto **A** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que por ele passa. **B**_{s2} é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que por ele passa. **C**_{s2} é a sombra real do ponto **C** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que por ele passa. **D**_{s2} é a sombra real do ponto **D** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que por ele passa.

As sombras reais dos quatro vértices da figura situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do quadrado **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**. Analisemos detalhadamente esta questão – na prática, a sombra projetada do quadrado é limitada pelas sombras projetadas dos lados do quadrado nos planos de projeção e os lados do quadrado são segmentos de reta.

C_{s2} e **D**_{s2} situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra do lado [CD] do quadrado não admite a existência de pontos de quebra – o segmento [**C**_{s2}**D**_{s2}] é a sombra projetada do lado [CD] do quadrado (e situa-se, na totalidade, no **SPFS**). **C**_{s2} e **B**_{s2} situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra do lado [BC] do quadrado não admite a existência de pontos de quebra – o segmento [**B**_{s2}**C**_{s2}] é a sombra projetada do lado [BC] do quadrado (e situa-se, na totalidade, no **SPFS**). O mesmo já não acontece em relação aos lados [AB] e [AD] do quadrado – de facto, um ponto de quebra situa-se entre **A**_{s1} e **B**_{s2} (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre **A**_{s1} e **D**_{s2} (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre **A**_{s1} e **B**_{s2} teve-se em conta que o lado [AB] do quadrado é um segmento de reta frontal (de frente) e que a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção de um segmento de reta frontal (de frente) é paralela ao próprio segmento. Assim, por **B**_{s2} (a sombra real do ponto **B**, que se situa no **SPFS**) conduziu-se uma reta paralela a [**A**₂**B**₂] (a projeção horizontal frontal do segmento) até ao eixo **X**, onde se situa **Q**_s (o ponto de quebra da sombra do segmento [AB]) – **Q**_s é a sombra de um ponto **Q**, do lado [AB], cujas projeções não se determinaram, por não serem necessárias. O segmento [**B**_{s2}**Q**_s] é a **parte real** da sombra do lado [AB] no Plano Frontal de Projeção e o segmento [**Q**_s**A**_{s1}] é a **parte real** da sombra do lado [AB] no Plano Horizontal de Projeção. A linha quebrada aberta [**B**_{s2}**Q**_s**A**_{s1}] é a **sombra real** do lado [AB] nos planos de projeção.

Para determinar o ponto de quebra situado entre **A**_{s1} e **D**_{s2} teve-se em conta que o lado [AD] do quadrado é um segmento de reta frontal (de frente) e que a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção de um segmento de reta frontal (de frente) é paralela ao próprio segmento. Assim, por **D**_{s2} (a sombra real do ponto **D**, que se situa no **SPFS**) conduziu-se uma reta paralela a [**A**₂**D**₂] (a projeção frontal do lado [AD]) até ao eixo **X**, onde se situa **Q'**_s (o ponto de quebra da sombra do segmento [AD]) – **Q'**_s é a sombra de um ponto **Q'**, do lado [AD], cujas projeções não se determinaram, por não serem necessárias. O segmento [**Q'**_s**D**_{s2}] é a **parte real** da sombra do lado [AD] no Plano Frontal de Projeção e o segmento [**A**_{s1}**Q'**_s] é a **parte real** da sombra do lado [AD] no Plano Horizontal de Projeção. A linha quebrada aberta [**A**_{s1}**Q'**_s**D**_{s2}] é a **sombra real** do lado [AD] nos planos de projeção.

A linha quebrada fechada [**A**_{s1}**Q**_s**B**_{s2}**C**_{s2}**D**_{s2}**Q'**_s] é a **sombra real** do quadrado [ABCD] nos planos de projeção. O segmento [**Q**_s**Q'**_s] é a **linha de quebra** da sombra do quadrado.

Salienta-se que existe uma sobreposição entre o polígono [**A**_{s1}**Q**_s**B**_{s2}**C**_{s2}**D**_{s2}**Q'**_s] e o quadrado [**A**₂**B**₂**C**₂**D**₂] – essa sobreposição corresponde ao facto de parte da sombra do quadrado estar oculta pela própria figura (que «tapa» parte da sua sombra), pelo que é invisível. Assim, a **parte invisível** da sombra (a parte da sombra que está oculta pela figura) representou-se a traço interrompido.

Por fim, preencheu-se a **parte visível** da sombra do quadrado com tracejado. Este foi executado perpendicularmente à direção luminosa, em projeção horizontal – a direção luminosa, em projeção horizontal, faz ângulos de 30° (de abertura para a **direita**) com o eixo **X**, pelo que o tracejado faz ângulos de 60° (de abertura para a **esquerda**) com o eixo **X**.

Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y = Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o quadrado [ABCD] e a sua sombra projetada nos planos de projeção, incluindo as invisibilidades observadas (o objetivo final do exercício). O traço horizontal do plano ϕ (o plano que contém a figura), apesar de integrar os dados, no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos ou da construção da projeção frontal do quadrado), representaram-se a **leve**. O tracejado executou-se a **leve**, pois os tracejados são sempre a **leve**.

Note que, apesar de o quadrado [ABCD] ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o quadrado. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

207.

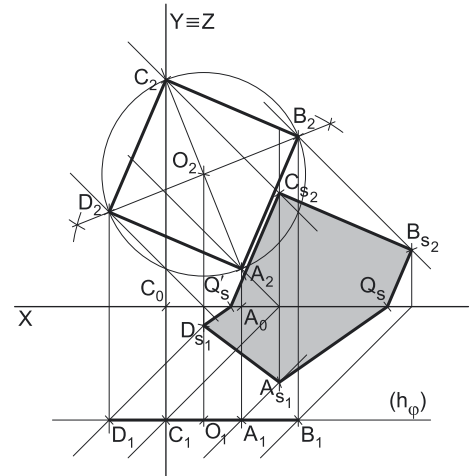
Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **C**, pelas respectivas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano φ (o plano frontal que contém a figura) pelo seu traço horizontal. O plano φ é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal (h_φ) passa por A_1 e por C_1 (as projeções horizontais dos pontos **A** e **C**, respetivamente). O plano φ não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis. A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

Resolução:

Determinação das projeções do quadrado [ABCD]:

O plano que contém o quadrado [ABCD] é paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pelo que o quadrado se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (a sua projeção frontal não tem deformação). Assim, a partir de A_2 (a projeção frontal do ponto **A**) e de C_2 (a projeção frontal do ponto **C**), determinaram-se as projeções do ponto médio do segmento [AC] (o ponto **O**) e efetuou-se a construção da projeção frontal do quadrado, em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar as projeções frontais dos outros dois vértices do quadrado – as suas projeções horizontais situam-se sobre h_φ (o traço horizontal do plano φ), pois o plano φ é um plano projetante horizontal. Em seguida, desenharam-se as duas projeções da figura.



Determinação da sombra do quadrado [ABCD] nos planos de projeção:

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos quatro vértices do quadrado – os pontos **A**, **B**, **C** e **D**. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam, que não se identificaram (para evitar o excesso de notações no desenho e porque não é absolutamente necessária a sua identificação). Cada um dos raios luminosos está definido por um ponto (o respetivo vértice do quadrado) e por uma direção (a direção luminosa convencional).

A_{s_1} é a sombra real do ponto **A** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que por ele passa. D_{s_1} é a sombra real do ponto **D** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que por ele passa. B_{s_2} é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que por ele passa. C_{s_2} é a sombra real do ponto **C** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que por ele passa.

As sombras reais dos quatro vértices da figura situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do quadrado **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**. Analisemos detalhadamente esta questão – na prática, a sombra projetada do quadrado é limitada pelas sombras projetadas dos lados do quadrado nos planos de projeção e os lados do quadrado são segmentos de reta.

B_{s_2} e C_{s_2} situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra do lado [BC] do quadrado não admite a existência de pontos de quebra – o segmento [$B_{s_2}C_{s_2}$] é a sombra projetada do lado [BC] do quadrado (e situa-se, na totalidade, no **SPFS**). A_{s_1} e D_{s_1} situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra do lado [AD] do quadrado não admite a existência de pontos de quebra – o segmento [$A_{s_1}D_{s_1}$] é a sombra projetada do lado [AD] do quadrado (e situa-se, na totalidade, no **SPHA**). O mesmo já não acontece em relação aos lados [AB] e [CD] do quadrado – de facto, um ponto de quebra situa-se entre A_{s_1} e B_{s_2} (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre D_{s_1} e C_{s_2} (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre A_{s_1} e B_{s_2} teve-se em conta que o lado [AB] do quadrado é um segmento de reta frontal (de frente) e que a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção de um segmento de reta frontal (de frente) é paralela ao próprio segmento. Assim, por B_{s_2} (a sombra real do ponto **B**, que se situa no **SPFS**) conduziu-se uma reta paralela a [A_2B_2] (a projeção horizontal frontal do segmento) até ao eixo **X**, onde se situa Q_s (o ponto de quebra da sombra do segmento [AB]) – Q_s é a sombra de um ponto **Q**, do lado [AB], cujas projeções não se determinaram, por não serem necessárias. O segmento [$B_{s_2}Q_s$] é a **parte real** da sombra do lado [AB] no Plano Frontal de Projeção e o segmento [$Q_sA_{s_1}$] é a **parte real** da sombra do lado [AB] no Plano Horizontal de Projeção. A linha quebrada aberta [$B_{s_2}Q_sA_{s_1}$] é a **sombra real** do lado [AB] nos planos de projeção.

Para determinar o ponto de quebra situado entre D_{s_1} e C_{s_2} teve-se em conta que o lado [CD] do quadrado é um segmento de reta frontal (de frente) e que a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção de um segmento de reta frontal (de frente) é paralela ao próprio segmento. Assim, por C_{s_2} (a sombra real do ponto **C**, que se situa no **SPFS**) conduziu-se uma reta paralela a [C_2D_2] (a projeção frontal do lado [CD]) até ao eixo **X**, onde se situa Q'_s (o ponto de quebra da sombra do segmento [CD]) – Q'_s é a sombra de um ponto **Q'**, do lado [CD], cujas projeções não se determinaram, por não serem necessárias. O segmento [$Q'_sC_{s_2}$] é a **parte real** da sombra do lado [CD] no Plano Frontal de Projeção e o segmento [$D_{s_1}Q'_s$] é a **parte real** da sombra do lado [CD] no Plano Horizontal de Projeção. A linha quebrada aberta [$D_{s_1}Q'_sC_{s_2}$] é a **sombra real** do lado [CD] nos planos de projeção.

A linha quebrada fechada [$A_{s_1}Q_sB_{s_2}C_{s_2}Q'_sD_{s_1}$] é a **sombra real** do quadrado [ABCD] nos planos de projeção. O segmento [$Q_sQ'_s$] é a **linha de quebra** da sombra do quadrado.

Nesta situação, a sombra do quadrado é visível na sua totalidade, pois não existe qualquer sobreposição entre a projeção frontal da figura e a sua sombra projetada. Assim, preencheu-se a **parte visível** (a totalidade) da sombra do quadrado com uma mancha clara e uniforme – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y = Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o quadrado [ABCD] e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). O traço horizontal do plano φ (o plano que contém a figura), apesar de integrar os dados, no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos ou da construção da projeção frontal do quadrado), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o quadrado [ABCD] ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o quadrado. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

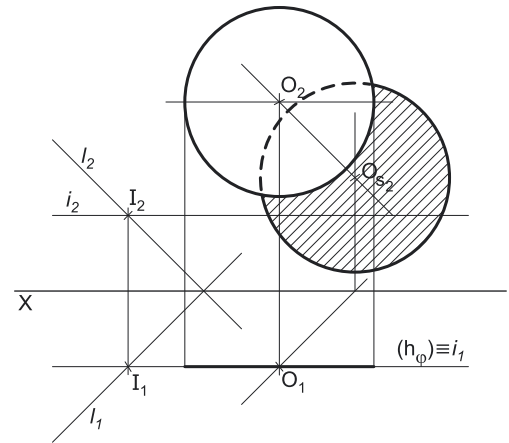
208.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano φ (o plano frontal que contém a figura) pelo seu traço horizontal. O plano φ é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal (h_φ) passa por O_1 (a projeção horizontal do ponto **O**). O plano φ não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis. A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

Resolução:*Determinação das projeções do círculo:*

O plano que contém o círculo (o plano φ) é paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pelo que o círculo se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (a projeção frontal do círculo está em verdadeira grandeza). Assim, com o compasso, fazendo centro em O_2 (a projeção frontal do ponto **O**) e com 2,5 cm de raio, desenhou-se a projeção frontal da circunferência que delimita a figura, em verdadeira grandeza. O plano φ é um plano projetante horizontal, pelo que a projeção horizontal do círculo é um segmento de reta do traço horizontal do plano – a projeção horizontal do círculo corresponde à projeção horizontal do seu diâmetro fronto-horizontal.

*Determinação da sombra do círculo nos planos de projeção:*

O **primeiro passo** na determinação da sombra de um círculo consiste em averiguar a eventual existência de pontos de quebra, o que se processa com o recurso ao **método do plano luz/sombra passante** (recorde que o **plano luz/sombra passante** é o lugar geométrico dos pontos do espaço cuja sombra se situa no eixo **X**).

Nesse sentido, definiu-se o plano luz/sombra passante na presente situação. O **plano luz/sombra passante** está definido por duas retas concorrentes – o eixo **X** e o raio luminoso l , passante (concorrente com o eixo **X**). O raio luminoso l está definido por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo **X**, que não se identificou) e por uma direção (a direção convencional da luz). Em seguida, determinou-se a reta de interseção do **plano luz/sombra passante** com o plano φ (o plano que contém a figura) – a reta i .

Para definir a reta i são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O **plano luz/sombra passante** e o plano φ são planos secantes, pelo que têm uma única «família» de retas em comum, sendo que a reta de interseção entre os dois planos é necessariamente uma reta dessa única «família» de retas que os dois planos têm em comum. O **plano luz/sombra passante** é um plano de rampa e o plano φ é um plano frontal (de frente), pelo que a única «família» de retas que os dois planos têm em comum é a «família» das retas fronto-horizontais – a reta i é, assim, uma reta fronto-horizontal. Já temos uma direção para definir a reta i . Falta-nos um ponto. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso l com plano φ – o ponto **I**. O ponto **I** foi determinado diretamente, a partir da sua projeção horizontal, pois o plano φ é um plano projetante horizontal (trata-se da interseção entre uma reta não projetante com um plano projetante horizontal). Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta i – a reta i está definida por um ponto (o ponto **I**) e por uma direção (é fronto-horizontal).

A reta i é exterior ao círculo, pelo que a sombra da figura não apresenta pontos de quebra – a sombra do círculo situar-se-á na totalidade no **SPHA** ou no **SPFS**. Para saber em qual dos planos se situa a sombra da figura, é necessário determinar a **sombra real** do centro do círculo – o ponto **O**. Nesse sentido, conduziu-se, pelo ponto **O**, o raio luminoso que por ele passa (e que não se identificou) – esse raio luminoso está definido por um ponto (o ponto **O**) e por uma direção (a direção luminosa convencional). O_{s2} é a **sombra real** do ponto **O** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que por ele passa.

O_{s2} situa-se no **SPFS**, o que nos permite concluir que a sombra do círculo (que não tem pontos de quebra) se situa, na totalidade, no **SPFS** – a sombra do círculo no Plano Frontal de Projeção é um outro círculo, geometricamente igual ao círculo dado (com o mesmo raio). Assim, com o compasso, fazendo centro em O_{s2} e com 2,5 cm de raio (o raio do círculo dado) desenhou-se o círculo que é a sombra projetada da figura no **SPFS**. Note que a parte oculta (a parte invisível) da sombra se identificou a traço interrompido.

Por fim, preencheu-se a **parte visível** (a totalidade) da sombra do círculo com tracejado, o que se processou perpendicularmente à projeção horizontal da direção luminosa.

Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o círculo e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). O traço horizontal do plano φ (o plano que contém a figura), apesar de integrar os dados, no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos ou da reta i), representaram-se a **leve**. O tracejado executou-se a **leve**, pois os tracejados são sempre a **leve**.

Note que, apesar de o círculo ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o círculo. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

209.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano ϕ (o plano frontal que contém a figura) pelo seu traço horizontal. O plano ϕ é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal (h_ϕ) passa por **O**₁ (a projeção horizontal do ponto **O**). O plano ϕ não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.

Resolução:

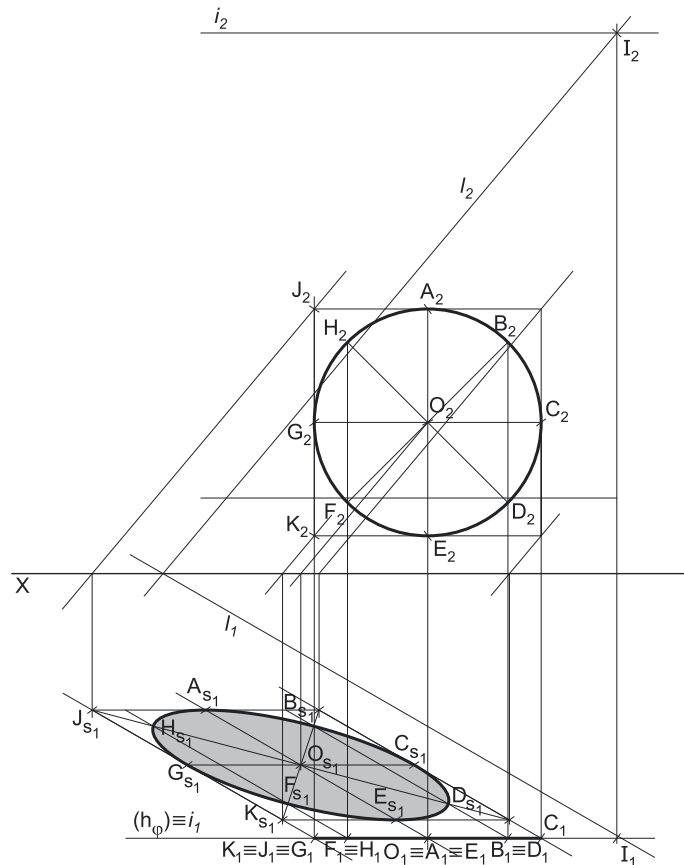
Determinação das projeções do círculo:

O plano que contém o círculo (o plano ϕ) é paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pelo que o círculo se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (a projeção frontal do círculo está em verdadeira grandeza). Assim, com o compasso, fazendo centro em **O**₂ (a projeção frontal do ponto **O**) e com 3 cm de raio, desenhou-se a projeção frontal da circunferência que delimita a figura, em verdadeira grandeza. O plano ϕ é um plano projetante horizontal, pelo que a projeção horizontal do círculo é um segmento de reta do traço horizontal do plano – a projeção horizontal do círculo corresponde à projeção horizontal do seu diâmetro fronto-horizontal.

Determinação da sombra do círculo nos planos de projeção:

O primeiro passo na determinação da sombra de um círculo consiste em averiguar a eventual existência de pontos de quebra, o que se processa com o recurso ao método do plano luz/sombra passante (recorde que o plano luz/sombra passante é o lugar geométrico dos pontos do espaço cuja sombra se situa no eixo **X**).

Nesse sentido, definiu-se o plano luz/sombra passante na presente situação. O plano luz/sombra passante está definido por duas retas concorrentes – o eixo **X** e o raio luminoso **l**, passante (concorrente com o eixo **X**). O raio luminoso **l** está definido por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo **X**, que não se identificou) e por uma direção (a direção luminosa dada no enunciado). Em seguida, determinou-se a reta de interseção do plano luz/sombra passante com o plano ϕ (o plano que contém a figura) – a reta **i**.



Para definir a reta **i** são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O plano luz/sombra passante e o plano ϕ são planos secantes, pelo que têm uma única «família» de retas em comum, sendo que a reta de interseção entre os dois planos é necessariamente uma reta dessa única «família» de retas que os dois planos têm em comum. O plano luz/sombra passante é um plano de rampa e o plano ϕ é um plano frontal (de frente), pelo que a única «família» de retas que os dois planos têm em comum é a «família» das retas fronto-horizontais – a reta **i**, assim, uma reta fronto-horizontal. Já temos uma direção para definir a reta **i**. Falta-nos um ponto. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano ϕ – o ponto **I**. O ponto **I** foi determinado diretamente, a partir da sua projeção horizontal, pois o plano ϕ é um plano projetante horizontal (trata-se da interseção entre uma reta não projetante com um plano projetante horizontal). Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta **i** – a reta **i** está definida por um ponto (o ponto **I**) e por uma direção (é fronto-horizontal).

A reta **i** é exterior ao círculo, pelo que a sombra da figura não apresenta pontos de quebra – a sombra do círculo situar-se-á na totalidade no **SPHA** ou no **SPFS**. Para saber em qual dos planos se situa a sombra da figura, é necessário determinar a sombra real do centro do círculo – o ponto **O**. Nesse sentido conduziu-se, pelo ponto **O**, o raio luminoso que por ele passa (e que não se identificou) – esse raio luminoso está definido por um ponto (o ponto **O**) e por uma direção (a direção luminosa dada no enunciado). **O**_{s1} é a sombra real do ponto **O** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que por ele passa.

O_{s1} situa-se no **SPHA**, o que nos permite concluir que a sombra do círculo (que não tem pontos de quebra) se situa, na totalidade, no **SPHA** – a sombra do círculo no Plano Horizontal de Projeção é uma **elipse** (um círculo com deformação), que é uma curva de erro. Assim, o desenho (à mão livre) da **elipse** requer um mínimo de **oito pontos** e, tanto quanto possível, o paralelogramo envolvente.

Nesse sentido, começemos por inscrever o círculo num quadrado de **lados paralelos ao eixo X**, desenhando em seguida as respetivas diagonais e medianas. Os pontos **A, C, E** e **G** são os pontos em que as medianas se apoiam nos lados do quadrado. Os pontos **B, D, F** e **H** são os pontos em que as diagonais do quadrado cortam a circunferência. Em seguida, há que determinar a sombra do quadrado no Plano Horizontal de Projeção, bem como das suas medianas e diagonais.

A sombra do quadrado no Plano Horizontal de Projeção é um paralelogramo – a elipse estará inscrita neste paralelogramo. A sombra do quadrado determinou-se a partir das sombras dos seus dois vértices mais à esquerda – os pontos **J** e **K**. **J**_{s1} e **K**_{s1} são as sombras reais dos vértices **J** e **K** e situam-se no **SPHA**. O lado **[JK]** é vertical e a sua sombra está contida no traço horizontal do plano luz/sombra que contém o segmento **[JK]** – trata-se de um plano vertical (projetante horizontal). Assim, e como é possível observar, a sombra do lado **[JK]** está sobre a projeção horizontal dos raios luminosos que passam pelos dois pontos (que não se identificaram) e que corresponde, na prática, à projeção horizontal da direção luminosa. De forma semelhante, a sombra do lado do quadrado que é paralelo a **[JK]** está igualmente sobre a projeção horizontal da direção luminosa. **J** é o vértice mais à esquerda de um lado fronto-horizontal do quadrado – a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção desse lado (o lado de maior cota do quadrado) é necessariamente paralela a esse lado, pelo que a sombra projetada desse lado é fronto-horizontal. Este raciocínio permitiu-nos desenhar a sombra projetada do lado de maior cota do quadrado e, dessa forma, determinar a sombra de mais um vértice do quadrado (o extremo direito do seu lado de maior cota), sobre a sombra do lado paralelo a **[JK]**. Repetiu-se o processo para o lado de menor cota do quadrado, que é igualmente fronto-horizontal, o que nos permitiu determinar a sombra do quarto vértice do quadrado e desenhar o paralelogramo que é a sombra do quadrado.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, desenharam-se as medianas do paralelogramo (que passam por O_{s_1} e são paralelas aos lados do paralelogramo) bem como as suas diagonais (que passam por O_{s_1} e têm extremos nos vértices do paralelogramo). As medianas do paralelogramo são, imediatamente, as sombras das medianas do quadrado. As diagonais do paralelogramo são, imediatamente, as sombras das diagonais do quadrado.

A_{s_1} , C_{s_1} , E_{s_1} e G_{s_1} são, imediatamente, os pontos em que as medianas do paralelogramo se apoiam nos lados do polígono – são os pontos em que elipse será tangente aos lados do paralelogramo (uma vez que o círculo é tangente aos lados do quadrado em que se inscreve nos pontos **A**, **C**, **E** e **G**).

Os pontos **B**, **D**, **F** e **H** são os pontos em que a circunferência que delimita o círculo corta as diagonais do quadrado – as suas sombras (B_{s_1} , D_{s_1} , F_{s_1} e H_{s_1}) situar-se-ão necessariamente sobre as diagonais do paralelogramo (que são as sombras das diagonais do quadrado). Assim, pelas projeções horizontais dos pontos **B**, **D**, **F** e **H** (B_1 , D_1 , F_1 e H_1) conduziram-se as projeções horizontais dos raios luminosos que por eles passam e determinaram-se os pontos em que aquelas intersectam as diagonais do paralelogramo – os pontos B_{s_1} , D_{s_1} , F_{s_1} e H_{s_1} .

Os **oito pontos** determinados permitem-nos um desenho relativamente preciso da elipse, que se efetuou, atendendo às situações de tangência da **elipse** aos lados do paralelogramo – a elipse é a sombra projetada do círculo nos planos de projeção. Nesta situação, a sombra do círculo é visível na sua totalidade, pois não existe qualquer sobreposição entre qualquer das projeções da figura e a sua sombra projetada. Assim, preencheu-se a **parte visível** (a totalidade) da sombra do círculo com uma mancha clara e uniforme – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o círculo e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). O traço horizontal do plano ϕ (o plano que contém a figura), apesar de integrar os dados, no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, da reta i e, ainda, de todos os traçados referentes à construção da elipse), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o círculo ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o círculo. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

210.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano ϕ (o plano frontal que contém a figura) pelo seu traço horizontal. O plano ϕ é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal (h_ϕ) passa por O_1 (a projeção horizontal do ponto **O**). O plano ϕ não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis. A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

Resolução:

Determinação das projeções do círculo:

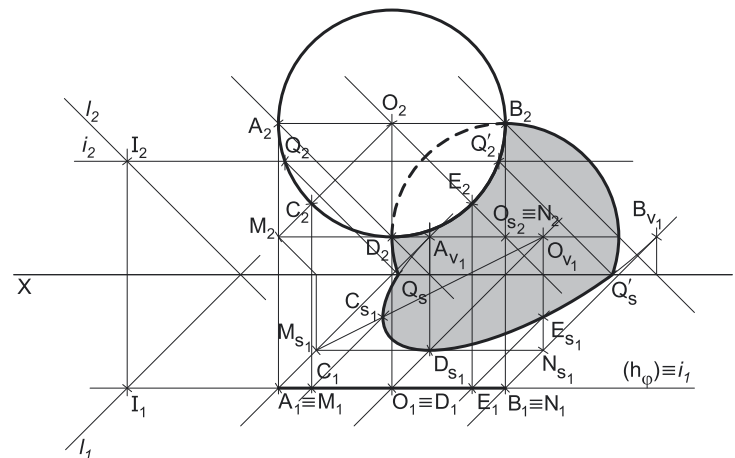
O plano que contém o círculo (o plano ϕ) é paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pelo que o círculo se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (a projeção frontal do círculo está em verdadeira grandeza). Assim, com o compasso, fazendo centro em O_2 (a projeção frontal do ponto **O**) e com 3 cm de raio, desenhou-se a projeção frontal da circunferência que delimita a figura, em verdadeira grandeza. O plano ϕ é um plano projetante horizontal, pelo que a projeção horizontal do círculo é um segmento de reta do traço horizontal do plano – a projeção horizontal do círculo corresponde à projeção horizontal do seu diâmetro fronto-horizontal.

Determinação da sombra do círculo nos planos de projeção:

O **primeiro passo** na determinação da sombra de um círculo consiste em averiguar a eventual existência de pontos de quebra, o que se processa com o recurso ao **método do plano luz/sombra passante** (recorde que o **plano luz/sombra passante** é o lugar geométrico dos pontos do espaço cuja sombra se situa no eixo **X**).

Nesse sentido, definiu-se o plano luz/sombra passante na presente situação. O **plano luz/sombra passante** está definido por duas retas concorrentes – o eixo **X** e o raio luminoso l , passante (concorrente com o eixo **X**). O raio luminoso l está definido por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo **X**, que não se identificou) e por uma direção (a direção luminosa convencional). Em seguida, determinou-se a reta de interseção do **plano luz/sombra passante** com o plano ϕ (o plano que contém a figura) – a reta i .

Para definir a reta i são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O **plano luz/sombra passante** e o plano ϕ são planos secantes, pelo que têm uma única «família» de retas em comum, sendo que a reta de interseção entre os dois planos é necessariamente uma reta dessa única «família» de retas que os dois planos têm em comum. O **plano luz/sombra passante** é um plano de rampa e o plano ϕ é um plano frontal (de frente), pelo que a única «família» de retas que os dois planos têm em comum é a «família» das retas fronto-horizontais – a reta i é, assim, uma reta fronto-horizontal. Já temos uma direção para definir a reta i . Falta-nos um ponto. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso l com plano ϕ – o ponto **I**. O ponto **I** foi determinado diretamente, a partir da sua projeção horizontal, pois o plano ϕ é um plano projetante horizontal (trata-se da interseção entre uma reta não projetante com um plano projetante horizontal). Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta i – a reta i está definida por um ponto (o ponto **I**) e por uma direção (é fronto-horizontal).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A reta i é **secante** ao círculo, pelo que a sombra da figura **admite a existência de pontos de quebra** – a reta i corta a circunferência que delimita o círculo nos pontos Q e Q' , cujas sombras que se situam no eixo X serão, precisamente, os pontos de quebra da circunferência que limita a figura. Note que não se determinaram as projeções horizontais dos pontos Q e Q' , por estas não serem necessárias. Em seguida, pelas projeções frontais dos pontos Q e Q' (Q_2 e Q'_2 , respetivamente), conduziram-se as projeções frontais dos raios luminosos que passam por aqueles pontos e determinaram-se as suas sombras, no eixo $X - Q_s$ e Q'_s . O segmento de reta $[Q_s Q'_s]$ é a linha de quebra da sombra do círculo.

Parte da sombra do círculo situa-se no **SPHA** e a outra parte da sua sombra situa-se no **SPFS** – a parte do círculo que se situa para cima da reta i produz sombra no **SPFS**, enquanto a parte do círculo que se situa para baixo da reta i produz sombra no **SPHA**.

Determinação da sombra projetada do círculo no Plano Frontal de Projeção:

A **sombra projetada do círculo no Plano Frontal de Projeção** (no **SPFS**) é um segmento de um círculo geometricamente igual ao círculo dado. Assim, determinou-se a sombra real do ponto $O - O_{s_2}$ é a sombra real do ponto O (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que por ele passa. Em seguida, com o compasso, fazendo centro em O_{s_2} e com 3 cm de raio (o raio do círculo dado) desenhou-se a parte do círculo que é a sombra projetada da figura no **SPFS** – trata-se de um segmento de círculo limitado, inferiormente, pelo segmento de reta $[Q_s Q'_s]$. Nesse sentido, a circunferência desenhada tem de ter extremos em Q_s e em Q'_s . Tenha em conta que a parte oculta (a parte invisível) da sombra se identificou a traço interrompido.

Determinação da sombra projetada do círculo no Plano Horizontal de Projeção:

A **sombra projetada do círculo no Plano Horizontal de Projeção** (no **SPHA**) é um segmento de uma **elipse**, que é uma curva de erro. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **elipse** requer um número significativo de pontos (dependendo, também, da dimensão da curva) e, além disso, um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício anterior (em que foi necessário desenhar uma **elipse** completa e não apenas uma **parte da elipse**). A parte do círculo que produz sombra no **SPHA** é o arco menor **QQ**.

Nesse sentido, comecemos por inscrever o arco **QQ** do círculo na parte correspondente de um quadrado de **lados paralelos ao eixo X** – note que, por uma questão de rigor (no desenho da curva), se inscreveu a semicircunferência que contém o arco **QQ** na parte correspondente do quadrado, o que significa que se inscreveu essa semicircunferência num «meio quadrado». O lado superior desse «meio quadrado» é o diâmetro **[AB]** do círculo e o seu lado inferior é o segmento **[MN]**. Em seguida, desenhou-se, em projeção frontal, as partes das medianas e das diagonais do quadrado que existem nesse «meio quadrado» – **[AB]** é a mediana fronto-horizontal do quadrado e **[OD]** é a parte da mediana vertical que está contida no «meio quadrado». Os segmentos **[OM]** e **[ON]** são as partes das diagonais do quadrado que existem no «meio quadrado».

Os pontos **A**, **D** e **B** são os pontos em que as medianas se apoiam nos lados do «meio quadrado». Os pontos **C** e **E** são os pontos em que as «meias diagonais» da figura cortam a semicircunferência. Em seguida, há que determinar a sombra do «meio quadrado» no Plano Horizontal de Projeção, bem como das partes correspondentes das medianas e diagonais atrás referidas.

Note que o «meio quadrado» a que se fez referência até agora é, na prática, um retângulo – o retângulo **[ABNM]**. A sombra do retângulo no Plano Horizontal de Projeção é um paralelogramo – o segmento da elipse estará inscrito neste paralelogramo. A sombra do retângulo determinou-se a partir das sombras dos seus quatro vértices, mas poder-se-ia ter recorrido a apenas dois vértices da figura, a semelhança do exposto no relatório do exercício anterior. A_{v_1} e B_{v_1} são as **sombras virtuais** dos vértices **A** e **B** do retângulo e situam-se no **SPHP**. M_{s_1} e N_{s_1} são as **sombras reais** dos vértices **M** e **N** do retângulo e situam-se no **SPHA**. Determinou-se, ainda a sombra do ponto O (o centro do círculo) no Plano Horizontal de Projeção – O_{v_1} é a sombra virtual do ponto O e situa-se no **SPHP**.

Em seguida, desenharam-se a mediana $[O_{v_1} D_{s_1}]$ do paralelogramo (que passa por O_{v_1} e é paralela a dois lados do paralelogramo e que é a sombra do segmento **[OD]**), bem como os segmentos $[O_{v_1} M_{s_1}]$ e $[O_{v_1} N_{s_1}]$ (que são as sombras dos segmentos **[OM]** e **[ON]**

A_{v_1} , B_{v_1} e D_{s_1} são, imediatamente, os pontos em que o segmento de elipse será tangente aos lados do paralelogramo (uma vez que a semicircunferência é tangente aos lados do quadrado em que se inscreve nos pontos **A**, **B** e **D**). Os pontos **C** e **E** são os pontos em que a circunferência que delimita o círculo corta os segmentos **[OM]** e **[ON]**, respetivamente – as suas sombras (C_{s_1} e E_{s_1}) situar-se-ão necessariamente sobre os segmentos $[O_{v_1} M_{s_1}]$ e $[O_{v_1} N_{s_1}]$, respetivamente. Assim, pelas projeções horizontais dos pontos **C** e **E** (C_1 e E_1) conduziram-se as projeções horizontais dos raios luminosos que por eles passam e determinaram-se os pontos em que aquelas intersejam os segmentos $[O_{v_1} M_{s_1}]$ e $[O_{v_1} N_{s_1}]$ – os pontos C_{s_1} e E_{s_1} .

Os **cinco pontos** determinados (a que acrescem os pontos de quebra, Q_s e Q'_s , perfazendo um total de **sete pontos**) permitem-nos um desenho relativamente preciso do segmento de elipse, que se efetuou, atendendo às situações de tangência da curva aos lados do paralelogramo. Tenha em conta que a parte do segmento de elipse que se situa para cima do eixo X (para cima do segmento $[Q_s Q'_s]$, que é a linha de quebra da sombra do círculo) é uma **sombra virtual** e a sua utilidade foi exclusivamente para um correto «lançamento» da curva à mão livre – é preciso ter a noção de como é que a curva continua (para lá do eixo X), para que a **parte real** da sombra (da **elipse**) tenha um desenho próximo da realidade.

A sombra projetada do círculo nos planos de projeção é, assim, uma figura com uma parte circular (a parte situada no **SPFS**) e uma parte elíptica (a parte situada no **SPHA**). Note que a parte oculta (a parte invisível) da sombra se identificou a traço interrompido. Em seguida, preencheu-se a **parte visível** da sombra do círculo com uma mancha clara e uniforme, em ambas as projeções – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Traçado:

O eixo X , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o círculo e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). O traço horizontal do plano φ (o plano que contém a figura), apesar de integrar os dados, no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, da reta i e, ainda, de todos os traçados referentes à construção do segmento de elipse), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o círculo ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o círculo. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

211.

Dados:

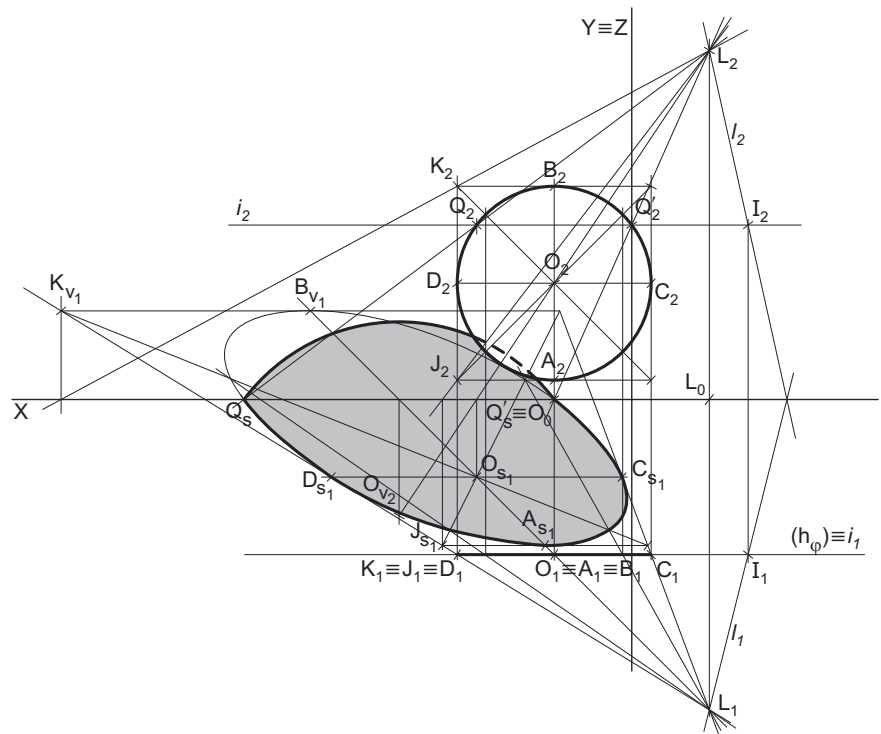
Em primeiro lugar, representou-se os pontos **O** e **L** (o foco luminoso), pelas respectivas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano φ (o plano frontal que contém a figura) pelo seu traço horizontal. O plano φ é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal (h_φ) passa por **O**₁ (a projeção horizontal do ponto **O**). O plano φ não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.

Resolução:*Determinação das projeções do círculo:*

O plano que contém o círculo (o plano φ) é paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pelo que o círculo se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção (a projeção frontal do círculo está em verdadeira grandeza). Assim, com o compasso, fazendo centro em **O**₂ (a projeção frontal do ponto **O**) e com 2,5 cm de raio, desenhou-se a projeção frontal da circunferência que delimita a figura, em verdadeira grandeza. O plano φ é um plano projetante horizontal, pelo que a projeção horizontal do círculo é um segmento de reta do traço horizontal do plano – a projeção horizontal do círculo corresponde à projeção horizontal do seu diâmetro fronto-horizontal.

Determinação da sombra do círculo nos planos de projeção:

O **primeiro passo** na determinação da sombra de um círculo consiste em averiguar a eventual existência de pontos de quebra, o que se processa com o recurso ao **método do plano luz/sombra passante** (recorde que o **plano luz/sombra passante** é o lugar geométrico dos pontos do espaço cuja sombra se situa no eixo **X**).



Nesse sentido, definiu-se o plano luz/sombra passante na presente situação. O **plano luz/sombra passante** está definido por duas retas concorrentes – o eixo **X** e o raio luminoso **l**, passante (concorrente com o eixo **X**). O raio luminoso **l** está definido por dois pontos – o ponto **L** (o foco luminoso) e o seu ponto de concorrência com o eixo **X** (que não se identificou). Em seguida, determinou-se a reta de interseção do **plano luz/sombra passante** com o plano φ (o plano que contém a figura) – a reta **i**.

Para definir a reta **i** são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O **plano luz/sombra passante** e o plano φ são planos secantes, pelo que têm uma única «família» de retas em comum, sendo que a reta de interseção entre os dois planos é necessariamente uma reta dessa única «família» de retas que os dois planos têm em comum. O **plano luz/sombra passante** é um plano de rampa e o plano φ é um plano frontal (de frente), pelo que a única «família» de retas que os dois planos têm em comum é a «família» das retas fronto-horizontais – a reta **i** é, assim, uma reta fronto-horizontal. Já temos uma direção para definir a reta **i**. Falta-nos um ponto. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com plano φ – o ponto **I**. O ponto **I** foi determinado diretamente, a partir da sua projeção horizontal, pois o plano φ é um plano projetante horizontal (trata-se da interseção entre uma reta não projetante com um plano projetante horizontal). Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta **i** – a reta **i** está definida por um ponto (o ponto **I**) e por uma direção (é fronto-horizontal).

A reta **i** é **secante** ao círculo, pelo que a sombra da figura **admite a existência de pontos de quebra** – a reta **i** corta a circunferência que delimita o círculo nos pontos **Q** e **Q'**, cujas sombras que se situam no eixo **X** serão, precisamente, os pontos de quebra da circunferência que limita a figura. Note que não se determinaram as projeções horizontais dos pontos **Q** e **Q'**, por estas não serem necessárias. Em seguida, pelas projeções frontais dos pontos **Q** e **Q'** (**Q**₂ e **Q'**₂, respetivamente), conduziram-se as projeções frontais dos raios luminosos que passam por aqueles pontos e determinaram-se as suas sombras, no eixo **X** – **Q**_s e **Q'**_s. O segmento de reta [**Q**_s**Q'**_s] é a linha de quebra da sombra do círculo.

Parte da sombra do círculo situa-se no **SPHA** e a outra parte da sua sombra situa-se no **SPFS** – a parte do círculo que se situa para cima da reta **i** produz sombra no **SPFS**, enquanto a parte do círculo que se situa para baixo da reta **i** produz sombra no **SPHA**.

Determinação da sombra projetada do círculo no Plano Frontal de Projeção:

A **sombra projetada do círculo no Plano Frontal de Projeção** (no **SPFS**) é um segmento de um círculo ampliado em relação ao círculo dado. Começemos por determinar o centro desse outro círculo, que é a sombra do ponto **O** no Plano Frontal de Projeção – **O**_{v2} é o traço frontal do raio luminoso que por passa pelo ponto **O** e situa-se no **SPFI**, pelo que é a sombra virtual do ponto **O**. Determinemos o raio desse círculo, recorrendo a um ponto desse círculo – esse ponto deverá ser a sombra de um ponto qualquer do círculo dado. Já temos dois pontos que são sombras de pontos do círculo – os pontos de quebra **Q**_s e **Q'**_s. Assim, com o compasso, fazendo centro em **O**_{v2} e com raio $\overline{O_{v2}Q_s} = \overline{O_{v2}Q'_s}$, desenhou-se a parte do círculo que é a sombra projetada da figura no **SPFS** – trata-se de um segmento de círculo limitado, inferiormente, pelo segmento de reta [**Q**_s**Q'**_s]. Tenha em conta que a parte oculta (a parte invisível) da sombra se identificou a traço interrompido.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Determinação da sombra projetada do círculo no Plano Horizontal de Projeção:

A **sombra projetada do círculo no Plano Horizontal de Projeção** (no **SPHA**) é um segmento de uma **oval**, que é uma curva de erro. Note que, nos dois exercícios anteriores, em que era dada uma **direção luminosa**, a sombra (com deformação) do círculo era uma **elipse**. Já nesta situação, em que é dado um **foco luminoso**, a sombra (com deformação) do círculo é uma **oval**.

Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **oval** requer um número significativo de pontos (dependendo, também, da dimensão da curva) e, além disso, um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **209**. (em que foi necessário desenhar uma **elipse**). A parte do círculo que produz sombra no **SPHA** é o **arco maior QQ**. Tendo em conta que a parte da circunferência que não integrará o segmento da oval é relativamente reduzida (o **arco menor QQ**), optou-se por desenhar a totalidade da oval, mesmo considerando que uma parte dessa curva será uma sombra virtual.

Nesse sentido, começou-se por inscrever o círculo num quadrado de **lados paralelos ao eixo X**, desenhando em seguida as respetivas diagonais e medianas. Os pontos **A, B, C e D** são os pontos em que as medianas se apoiam nos lados do quadrado – as sombras destes quatro pontos serão quatro pontos da **oval**. Os pontos em que as diagonais do quadrado cortam a circunferência serão outros quatro pontos da **oval**. Em seguida, há que determinar a sombra do quadrado no Plano Horizontal de Projeção, bem como das suas medianas e diagonais.

A sombra do quadrado no Plano Horizontal de Projeção é um trapézio – a **oval** estará inscrita nesse trapézio. A sombra do quadrado determinou-se a partir das sombras dos seus dois vértices mais à esquerda – os pontos **J e K**. J_{s_1} e K_{v_1} são as sombras reais dos vértices **J e K** – J_{s_1} situa-se no **SPHA** e K_{v_1} situa-se no **SPHP**. O lado **[JK]** é vertical e a sua sombra está contida no traço horizontal do plano luz/sombra que contém o segmento **[JK]** – trata-se de um plano vertical (projetante horizontal). Assim, e como é possível observar, a sombra do lado **[JK]** está sobre a projeção horizontal dos raios luminosos que passam pelos dois pontos (que não se identificaram). De forma semelhante, a sombra do outro lado vertical do quadrado (que é paralelo a **[JK]**) está igualmente sobre a projeção horizontal dos raios luminosos que passam pelos respetivos vértices. **J** é o vértice mais à esquerda de um lado fronto-horizontal do quadrado – a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção desse lado (o lado de menor cota do quadrado) é necessariamente paralela a esse lado, pelo que a sombra projetada desse lado é fronto-horizontal e passa por J_{s_1} . Este raciocínio permitiu-nos desenhar a sombra projetada do lado de menor cota do quadrado e, dessa forma, determinar a sombra de mais um vértice do quadrado (o extremo direito do seu lado de menor cota), sobre a sombra do lado paralelo a **[JK]**. Repetiu-se o processo para o lado de maior cota do quadrado, que é igualmente fronto-horizontal – a sua sombra é também fronto-horizontal e passa por K_{v_1} , o que nos permitiu determinar a sombra do quarto vértice do quadrado e desenhar o trapézio que é a sombra do quadrado no Plano Horizontal de Projeção.

Em seguida, determinou-se a sombra real do centro do círculo (O_{s_1}), que se situa no **SPHA** e é o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto **O**. Em seguida, desenharam-se as medianas do trapézio (que correspondem às sombras das medianas do quadrado) – uma delas passa por O_{s_1} e é paralela aos lados fronto-horizontais do trapézio e a outra está contida numa reta que passa por O_{s_1} e por L_1 . Esta última situa-se, na prática, sobre o traço horizontal do plano luz/sombra que contém a mediana vertical do quadrado (que é um plano vertical que passa pelo ponto **L** e pelo ponto **O**). A_{s_1} , B_{v_1} , C_{s_1} e D_{s_1} são, imediatamente, os pontos em que as medianas do trapézio se apoiam nos lados do polígono – são os pontos em que **oval** será tangente aos lados do trapézio (uma vez que o círculo é tangente aos lados do quadrado em que se inscreve nos pontos **A, B, C e D**).

Em seguida, desenharam-se as diagonais do trapézio, que correspondem às sombras das diagonais do quadrado. Em seguida, transportaram-se os pontos em que a circunferência (que delimita o círculo) corta as diagonais do quadrado para as diagonais do trapézio, com o recurso às projeções horizontais dos raios luminosos que passam pelos pontos (e que correspondem aos planos luz/sombra por esses pontos). Este procedimento permitiu-nos determinar mais quatro pontos da **oval**.

Aos **oito pontos** determinados acrescem os dois pontos de quebra (os pontos Q_s e Q'_s), pelo que já temos **dez pontos** da **oval** – estes pontos permitem-nos um desenho relativamente preciso da curva, que se efetuou, atendendo às situações de tangência da **oval** aos lados do trapézio – a **oval** é a sombra projetada do círculo no Plano Horizontal de Projeção. No entanto, a parte da **oval** que se situa para cima do eixo **X** é uma **sombra virtual**, pelo que a sombra do círculo nos planos de projeção (a **sombra real**) é formada pelo segmento de círculo que está para cima do eixo **X** (a sombra projetada do círculo dado no **SPFS**) e a parte da oval que está para baixo do eixo **X** (a sombra projetada do círculo dado no **SPHA**).

Em seguida, preencheu-se a **parte visível** da sombra do círculo com uma mancha clara e uniforme, em ambas as projeções – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o círculo e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). O traço horizontal do plano ϕ (o plano que contém a figura), apesar de integrar os dados, no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, da reta *i* e, ainda, de todos os traçados referentes à construção da oval), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o círculo ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o círculo. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

212.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano δ , pelos seus traços, em função dos dados. Em seguida, representou-se o ponto **A**, pelas suas projeções, pertencente ao plano δ e em função dos dados. O plano δ é um plano projetante horizontal, pelo que **A**₁ (a projeção horizontal do ponto **A**) se situa sobre o traço horizontal do plano δ (h_δ).

Resolução:*Determinação das projeções do quadrado [ABCD]:*

O plano que contém o quadrado [ABCD] (o plano δ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o quadrado não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do quadrado apresentam deformação), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Por outro lado, o ângulo que o lado [AB] faz com o Plano Horizontal de Projeção é um **ângulo real** e não um **ângulo em projeções** – o ângulo entre o lado [AB] e o Plano Horizontal de Projeção é o ângulo que o lado [AB] faz com o traço horizontal do plano δ (h_δ) e está contido no plano δ . O plano que contém o ângulo (o plano δ) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do ângulo estão deformadas), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano δ (o plano que contém a figura) para o Plano Frontal de Projeção. Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento, que é f_δ (o traço frontal do plano δ), que é uma reta vertical – os planos ortogonais à charneira (que contém os arcos do rebatimento) são planos horizontais (de nível). Assim, os pontos mantêm as suas cotas ao longo do rebatimento e os arcos do rebatimento, porque estão contidos em planos horizontais (paralelos ao Plano Horizontal de Projeção), projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção.

Em seguida, efetuou-se o rebatimento do ponto **A**, obtendo **A**_r. O ângulo que o lado [AB] faz com o Plano Horizontal de Projeção é o ângulo que o lado [AB] faz com h_δ (o traço horizontal do plano δ) – esse ângulo está em verdadeira grandeza em rebatimento, no ângulo entre a reta suporte de [AB] (em rebatimento) e h_δ . Assim, por **A**_r (o ponto **A** rebatido) conduziu-se uma reta (a reta suporte do lado [AB]) fazendo, com h_δ , um ângulo de 20° e garantindo-se, ainda, que o ponto **B** tem afastamento inferior a **A**. Note que, das duas possibilidades existentes para medir o ângulo a partir de **A**_r, a que a resolução apresenta é aquela que garante que o ponto **B** tem afastamento inferior a **A** e que o quadrado se situa no 1.^a Diedro. Sobre a reta suporte do lado [AB] mediram-se os 5 cm (o comprimento do lado do quadrado) e determinou-se **B**_r.

A partir de **A**_r e de **B**_r, construiu-se o quadrado em verdadeira grandeza, em rebatimento, o que nos permitiu determinar os outros dois vértices do polígono, em rebatimento – **C**_r e **D**_r. Em seguida, inverteu-se o rebatimento do plano δ , o que nos permitiu determinar as projeções dos pontos **B**, **C** e **D**. A partir das duas projeções dos quatro vértices do quadrado, desenharam-se as duas projeções do polígono. Sublinha-se que a projeção horizontal do quadrado se reduz a um segmento de reta, pois o plano que o contém (o plano δ) é projetante horizontal.

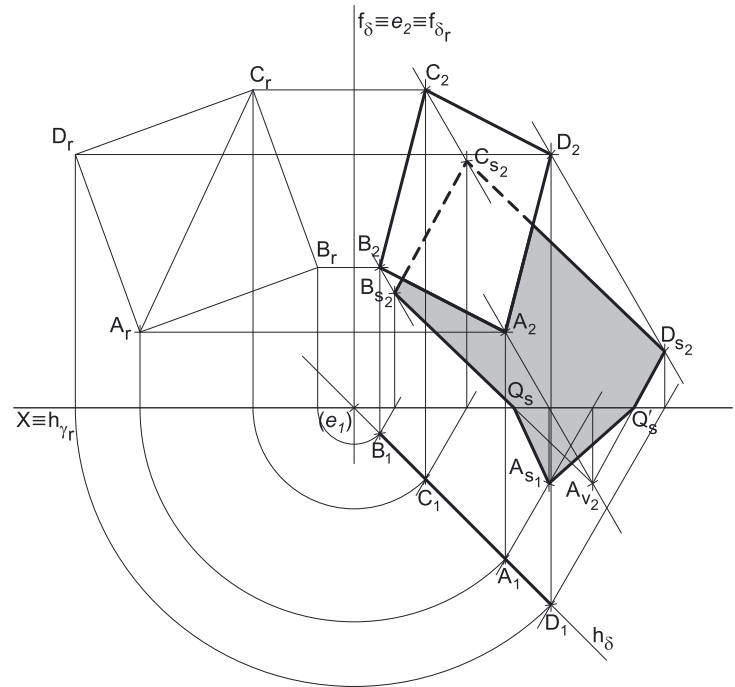
Determinação da sombra do quadrado [ABCD] nos planos de projeção:

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos quatro vértices do quadrado – os pontos **A**, **B**, **C** e **D**. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam, que não se identificaram (para evitar o excesso de notações no desenho e porque não é absolutamente necessária a sua identificação). Cada um dos raios luminosos está definido por um ponto (o respetivo vértice do quadrado) e por uma direção (a direção luminosa convencional).

A_{s1} é a sombra real do ponto **A** (situa-se no SPHA) e é o traço horizontal do raio luminoso que por ele passa. **B**_{s2} é a sombra real do ponto **B** (situa-se no SPFS) e é o traço frontal do raio luminoso que por ele passa. **C**_{s2} é a sombra real do ponto **C** (situa-se no SPFS) e é o traço frontal do raio luminoso que por ele passa. **D**_{s2} é a sombra real do ponto **D** (situa-se no SPFS) e é o traço frontal do raio luminoso que por ele passa.

As sombras reais dos quatro vértices da figura situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do quadrado **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

B_{s2} e **C**_{s2} situam-se, ambas, no SPFS, pelo que a sombra do lado [BC] do quadrado não admite a existência de pontos de quebra – o segmento [**B**_{s2}**C**_{s2}] é a sombra projetada do lado [BC] do quadrado (e situa-se, na totalidade, no SPFS). **C**_{s2} e **D**_{s2} situam-se, ambas, no SPFS, pelo que a sombra do lado [CD] do quadrado não admite a existência de pontos de quebra – o segmento [**C**_{s2}**D**_{s2}] é a sombra projetada do lado [CD] do quadrado (e situa-se, na totalidade, no SPFS). O mesmo já não acontece em relação aos lados [AB] e [AD] do quadrado – de facto, um ponto de quebra situa-se entre **A**_{s1} e **B**_{s2} (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre **A**_{s1} e **D**_{s2} (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Para determinar os pontos de quebra recorreu-se à sombra virtual do ponto **A** – A_{v_2} . A_{v_2} é a sombra virtual do ponto **A** – situa-se no **SPFI** e é o traço frontal do raio luminoso que passa pelo ponto **A**.

O segmento $[A_{v_2}B_{s_2}]$ é a sombra projetada do segmento $[AB]$ no Plano Frontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento $[A_{v_2}B_{s_2}]$ (a sombra do segmento no Plano Frontal de Projeção) com o eixo **X** é Q'_s (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta $[B_{s_2}Q_sA_{s_1}]$ é a **sombra real** do segmento $[AB]$ (a sombra projetada do segmento nas faces do 1^a Diedro).

O segmento $[A_{v_2}D_{s_2}]$ é a sombra projetada do segmento $[AD]$ no Plano Frontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento $[A_{v_2}D_{s_2}]$ (a sombra do segmento no Plano Frontal de Projeção) com o eixo **X** é Q'_s (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta $[A_{s_1}Q'_sD_{s_2}]$ é a **sombra real** do segmento $[AD]$ (a sombra projetada do segmento nas faces do 1^a Diedro).

A linha quebrada fechada $[A_{s_1}Q_sB_{s_2}C_{s_2}D_{s_2}Q'_s]$ é a **sombra real** do quadrado $[ABCD]$ nos planos de projeção. O segmento $[Q_sQ'_s]$ é a **linha de quebra** da sombra do quadrado. Note que a parte oculta (a parte invisível) da sombra se identificou a traço interrompido. Em seguida, preencheu-se a **parte visível** da sombra do quadrado com uma mancha clara e uniforme – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Identificação da eventual situação de sombra própria visível nas projeções do quadrado $[ABCD]$:

O quadrado, sendo uma figura plana, tem duas faces – quando exposto a uma situação luminosa, à partida uma das faces está iluminada e a outra face está sombreada ou em sombra própria (exceto em algumas situações articulares). Assim, é conveniente averiguar se, em algumas das projeções, a face visível é a face sombreada.

A projeção horizontal do quadrado $[ABCD]$ reduz-se a um segmento de reta, pelo que não é visível nenhuma das faces do polígono. Assim, em projeção horizontal não há qualquer hipótese de ser visível a face sombreada do quadrado.

Para averiguar se a face visível, em projeção frontal, está iluminada ou em sombra, considerou-se um movimento rotativo qualquer – o sentido dos ponteiros do relógio. A **sequência dos vértices da projeção frontal** do quadrado, a partir do ponto **A**, é: A_2, B_2, C_2 e D_2 . A **sequência dos vértices da sombra projetada** do quadrado, também a partir do vértice **A** (da sombra do vértice **A**), é: $A_{s_1}, B_{s_2}, C_{s_2}$ e D_{s_2} . As duas sequências apresentam os vértices pela mesma ordem, pelo que a face do quadrado que é visível em projeção frontal está **iluminada**.

Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o quadrado $[ABCD]$ e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços do plano δ (o plano que contém a figura), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos ou dos traçados referentes ao rebatimento do plano δ e necessários à construção das projeções do quadrado), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o quadrado $[ABCD]$ ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o quadrado. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

213.

Dados:

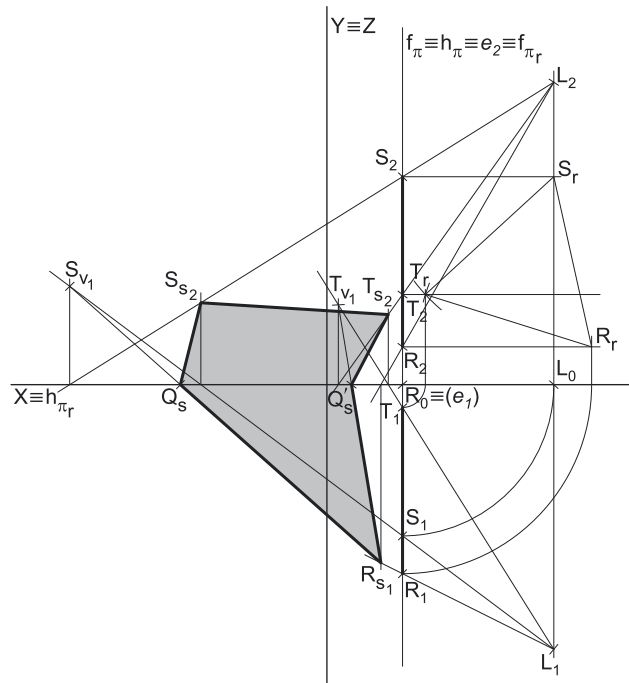
Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **R, S** e **L** (o foco luminoso) pelas respetivas projeções, em função dos dados. Os pontos **R** e **S** estão contidos num plano de perfil, pelo que os dois pontos têm necessariamente a mesma abcissa. Em seguida, representou-se o plano π (o plano de perfil que contém a figura) pelos seus traços, contendo os pontos **R** e **S** – o plano π é um plano duplamente projetante, pelo que o seu traço frontal contém as projeções frontais dos dois pontos, tal como o seu traço horizontal contém as projeções horizontais dos dois pontos.

Resolução:

Determinação das projeções do triângulo $[RST]$:

O plano que contém o triângulo $[ABC]$ (o plano π) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o triângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do triângulo apresentam deformação), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano π (o plano que contém o triângulo) para o Plano Frontal de Projeção. Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento, que é f_π (o traço frontal do plano π), que é uma reta vertical – os planos ortogonais à charneira (que contêm os arcos do rebatimento) são planos horizontais (de nível). Assim, os pontos mantêm as suas cotas ao longo do rebatimento e os arcos do rebatimento, porque estão contidos em planos horizontais (paralelos ao Plano Horizontal de Projeção), projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, efetuou-se o rebatimento dos pontos **R** e **S**, obtendo **R_r** e **S_r**. A partir de **R_r** e de **S_r**, construiu-se o triângulo em verdadeira grandeza, em rebatimento, o que nos permitiu determinar o terceiro vértice do polígono, em rebatimento – **T_r** (atendendo a que o ponto **R** é o ponto de maior afastamento do polígono, como o enunciado refere de forma expressa). Em seguida, inverteu-se o rebatimento do plano π , o que nos permitiu determinar as projeções do ponto **T** e desenhar as duas projeções do polígono. Sublinha-se que ambas as projeções do triângulo se reduzem a segmentos de reta, pois o plano que o contém (o plano π) é duplamente projetante.

Determinação da sombra do triângulo [RST] nos planos de projeção:

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos três vértices do triângulo – os pontos **R**, **S** e **T**. Para tal conduziram-se, pelos pontos, os raios luminosos que por eles passam, que não se identificaram (para evitar o excesso de notações no desenho e porque não é absolutamente necessária a sua identificação). Cada um dos raios luminosos está definido por dois pontos – o respetivo vértice do triângulo e o ponto **L** (o foco luminoso).

R_{s1} é a sombra real do ponto **R** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que por ele passa. **S_{s2}** é a sombra real do ponto **S** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que por ele passa. **T_{s2}** é a sombra real do ponto **T** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que por ele passa. As sombras reais dos três vértices da figura situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do quadrado **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

S_{s2} e **T_{s2}** situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra do lado **[ST]** do triângulo não admite a existência de pontos de quebra – o segmento **[S_{s2}T_{s2}]** é a sombra projetada do lado **[ST]** do triângulo (e situa-se, na totalidade, no **SPFS**). O mesmo já não acontece em relação aos lados **[RS]** e **[RT]** do triângulo – de facto, um ponto de quebra situa-se entre **R_{s1}** e **S_{s2}** (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre **R_{s1}** e **T_{s2}** (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar os pontos de quebra poder-se-ia ter recorrido à sombra virtual do ponto **R** (uma única sombra virtual permitir-nos-ia determinar os dois pontos de quebra (à semelhança do efetuado no exercício anterior). No entanto, a sombra virtual do ponto **R** (**R_{v2}**) situa-se fora dos limites do papel, pelo que se recorreu às sombras virtuais dos outros dois vértices do triângulo.

Assim, recorreu-se à sombra virtual do ponto **S** – **S_{v1}**. **S_{v1}** é a sombra virtual do ponto **S** – situa-se no **SPHA** e é o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto **S**. O segmento **[S_{v1}R_{s1}]** é a sombra projetada do segmento **[RS]** no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento **[S_{v1}R_{s1}]** (a sombra do segmento no Plano Horizontal de Projeção) com o eixo **X** é **Q_s** (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta **[S_{s2}Q_sR_{s1}]** é a **sombra real** do segmento **[RS]** (a sombra projetada do segmento nas faces do 1.^a Diedro).

Em seguida, recorreu-se à sombra virtual do ponto **T** – **T_{v1}**. **T_{v1}** é a sombra virtual do ponto **T** – situa-se no **SPHA** e é o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto **T**. O segmento **[R_{s1}T_{v1}]** é a sombra projetada do segmento **[RT]** no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento **[R_{s1}T_{v1}]** (a sombra do segmento no Plano Horizontal de Projeção) com o eixo **X** é **Q'_s** (o ponto de quebra da sombra do segmento). A linha quebrada aberta **[R_{s1}Q'_sT_{s2}]** é a **sombra real** do segmento **[RT]** (a sombra projetada do segmento nas faces do 1.^a Diedro).

A linha quebrada fechada **[R_{s1}Q_sS_{s2}T_{s2}Q'_s]** é a **sombra real** do triângulo **[RST]** nos planos de projeção. O segmento **[Q_sQ'_s]** é a **linha de quebra** da sombra do triângulo.

Nesta situação, a sombra do triângulo é visível na sua totalidade, pois não existe qualquer sobreposição entre qualquer das projeções da figura e a sua sombra projetada. Assim, preencheu-se a **parte visível** (a totalidade) da sombra do triângulo com uma mancha clara e uniforme – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Identificação da eventual situação de sombra própria visível nas projeções do triângulo [RST]:

O triângulo, sendo uma figura plana, tem duas faces – quando exposto a uma situação luminosa, à partida uma das faces está iluminada e a outra face está sombreada ou em sombra própria (exceto em algumas situações particulares). Assim, é conveniente averiguar se, em algumas das projeções, a face visível é a face sombreada.

A projeção horizontal do triângulo **[RST]** reduz-se a um segmento de reta, pelo que não é visível nenhuma das faces do polígono. Assim, em projeção horizontal não há qualquer hipótese de ser visível a face sombreada do triângulo. De forma semelhante, também a projeção frontal do triângulo **[RST]** se reduz a um segmento de reta, pelo que também não é visível nenhuma das faces do polígono em projeção frontal. Assim, em projeção frontal também não há qualquer hipótese de ser visível a face sombreada do triângulo.

Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y** = **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o triângulo **[RST]** e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços do plano π (o plano que contém a figura), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos ou dos traçados referentes ao rebatimento do plano π e necessários à construção das projeções do triângulo), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o triângulo **[RST]** ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o triângulo. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

214.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Em seguida, desenharam-se os traços do plano α . O ponto **A** tem afastamento nulo, pelo que o traço frontal do plano α (f_α) passa necessariamente pelo ponto **A**. O ponto **B** tem cota nula, pelo que o traço horizontal do plano α (h_α) passa necessariamente pelo ponto **B**. O plano α , porque é ortogonal ao $\beta_{2/4}$, tem os seus traços coincidentes (planos ortogonais ao $\beta_{2/4}$ têm os seus traços coincidentes) – assim, foi possível desenhar os dois traços do plano, que estão coincidentes numa única reta que passa por **A**₂ (a projeção frontal do ponto **A**) e por **B**₁ (a projeção horizontal do ponto **B**). A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

Resolução:

Determinação das projeções do triângulo [ABC]:

O plano que contém o triângulo [ABC] (o plano α) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o triângulo [ABC] não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se por recorrer ao rebatimento do plano α para o Plano Horizontal de Projeção (pelo rebatimento dos seus traços). Assim, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano – tem-se, imediatamente, $h_\alpha \equiv e_1 \equiv h_{\alpha_r}$. Em seguida, identificaram-se os planos ortogonais à charneira, que são planos verticais (ortogonais a h_α).

O ponto **B** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente **B**_r \equiv **B**₁. Em seguida, rebateu-se o traço frontal do plano α (f_α), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos um ponto para definir f_{α_r} – o ponto de concorrência dos dois traços do plano, que é um ponto fixo (pois pertence à charneira). Falta-nos outro ponto ou uma direção. Optou-se por se rebater o ponto **A**, que é um ponto de f_α e, simultaneamente, é um vértice do triângulo. Para rebater o ponto **A** conduziu-se, por **A**₁, uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano que contém o arco do rebatimento do ponto **A**). Com o compasso, fazendo centro no ponto de concorrência dos traços do plano e cm raio até **A**₂ (a projeção frontal do ponto **A**), desenhou-se um arco (de transporte) até à perpendicular à charneira que passa por **A**₁, determinando-se **A**_r (o ponto **A** rebatido). Em seguida, desenhou-se f_{α_r} (o traço frontal do plano α rebatido), passando por **A**_r e concorrente com h_{α_r} no eixo **X** (está definido por dois pontos).

A partir dos pontos **A**_r e **B**_r, construiu-se o triângulo [ABC] em verdadeira grandeza (em rebatimento), e determinou-se o ponto **C**_r. Para determinar as projeções do triângulo, inverteu-se o rebatimento do plano α , determinando-se as projeções do ponto **C**. A inversão do rebatimento do ponto **C** processou-se com o recurso à reta **f**, frontal (de frente), do plano α , a qual o ponto **C** pertence. A reta **f**_r (a reta **f** rebatida) está definida por um ponto (o ponto **C**_r) e por uma direção (é paralela a f_{α_r}). Em seguida, determinaram-se as projeções da reta **f**. O ponto **H** é o traço horizontal da reta **f** e é um ponto da charneira (que é h_α), pelo que roda sobre si próprio – tem-se imediatamente **H**_r \equiv **H**₁ (**H**₂ situa-se no eixo **X**). Já temos um ponto para definir a reta **f** em projeções – o ponto **H**. Já temos também a direção da reta **f** (que é a direção das retas frontais do plano α), o que nos permitiu desenhar as duas projeções da reta **f**.

Por fim, por **C**_r conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com **f**₁ (a projeção horizontal da reta **f**) é **C**₁ (a projeção horizontal do ponto **C**). A projeção frontal do ponto **C** (**C**₂) situa-se sobre **f**₂ (a projeção frontal da reta **f**).

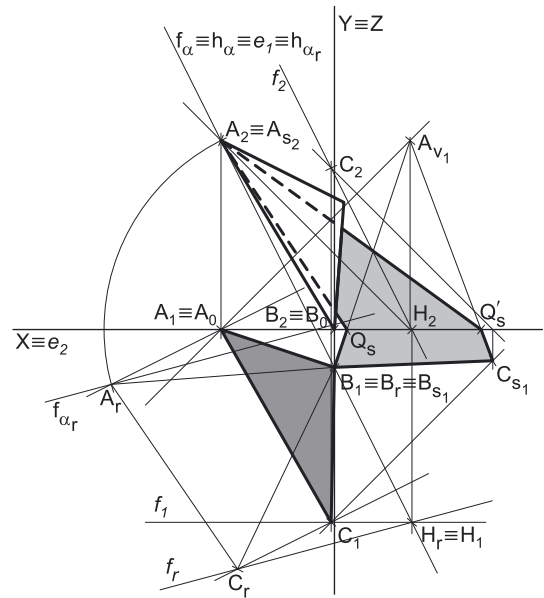
A partir das projeções dos três pontos (**A**, **B** e **C**), desenharam-se as projeções do triângulo [ABC].

Determinação da sombra do triângulo [ABC] nos planos de projeção:

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos três vértices do triângulo – os pontos **A**, **B** e **C**. O ponto **A** é um ponto do Plano Frontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente, **A**_{s2} \equiv **A**₂. O ponto **B** é um ponto do Plano Horizontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente, **B**_{s1} \equiv **B**₁. **C**_{s1} é a sombra real do ponto **C** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que por ele passa – esse raio luminoso está definido por um ponto (o ponto **C**) e por uma direção (a direção convencional da luz). As sombras reais dos quatro vértices da figura situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do quadrado **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

B_{s1} e **C**_{s1} situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra do lado [BC] do triângulo não admite ponto de quebra – o segmento [**B**_{s1}**C**_{s1}] é a sombra projetada do lado [BC] do triângulo (e situa-se, na totalidade, no **SPHA**). O mesmo já não acontece em relação aos lados [AB] e [AC] do triângulo – de facto, um ponto de quebra situa-se entre **A**_{s2} e **B**_{s1} (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre **A**_{s1} e **C**_{s1} (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar os pontos de quebra recorreu-se à sombra virtual do ponto **A** – **A**_{v1}. **A**_{v1} é a sombra virtual do ponto **A** – situa-se no **SPHP** e é o traço horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto **A**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O segmento $[A_v, B_{s_1}]$ é a sombra projetada do segmento $[AB]$ no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento $[A_v, B_{s_1}]$ (a sombra do segmento no Plano Horizontal de Projeção) com o eixo X é o ponto de quebra da sombra do segmento $[AB]$ (que não se identificou, por não ser necessário). O segmento $[A_v, C_{s_1}]$ é a sombra projetada do segmento $[AC]$ no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento $[A_v, C_{s_1}]$ (a sombra do segmento no Plano Horizontal de Projeção) com o eixo X é o ponto de quebra da sombra do segmento $[AC]$ (que não se identificou, por não ser necessário).

A linha quebrada fechada que tem vértices em B_{s_1} , C_{s_1} , A_{s_2} e nos dois pontos de quebra determinados é a **sombra real** do triângulo $[ABC]$ nos planos de projeção. Note que a parte oculta (a parte invisível) da sombra se identificou a traço interrompido. Em seguida, preencheu-se a **parte visível** da sombra do triângulo com uma mancha clara e uniforme – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Identificação da eventual situação de sombra própria visível nas projeções do triângulo $[ABC]$:

O triângulo, sendo uma figura plana, tem duas faces – quando exposto a uma situação luminosa, à partida uma das faces está iluminada e a outra face está sombreada ou em sombra própria (exceto em algumas situações articulares). Assim, é conveniente averiguar se, em algumas das projeções, a face visível é a face sombreada.

Para averiguar se a face visível, em projeção frontal, está iluminada ou em sombra, considerou-se um movimento rotativo qualquer – o sentido dos ponteiros do relógio. A **sequência dos vértices da projeção frontal** do triângulo, a partir do ponto A , é: A_2 , C_2 e B_2 . A **sequência dos vértices da sombra projetada** do triângulo, também a partir do vértice A (da sombra do vértice A), é: A_{s_2} , C_{s_1} e B_{s_1} . As duas sequências apresentam os vértices pela mesma ordem, pelo que a face do triângulo que é visível em projeção frontal está **iluminada**.

Para averiguar se a face visível, em projeção horizontal, está iluminada ou em sombra, considerou-se um movimento rotativo qualquer – mais uma vez considerou-se o sentido dos ponteiros do relógio. A **sequência dos vértices da projeção horizontal** do triângulo, a partir do ponto A , é: A_1 , B_1 e C_1 . A **sequência dos vértices da sombra projetada** do triângulo, também a partir do vértice A (da sombra do vértice A), é: A_{s_2} , C_{s_1} e B_{s_1} . As duas sequências apresentam os vértices por ordens diferentes, pelo que a face do triângulo que é visível em projeção horizontal está **sombreada** (em **sombra própria**). Nesse sentido, preencheu-se a **sombra própria** do triângulo (a projeção horizontal da figura) com uma mancha clara e uniforme – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Traçado:

O eixo X , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo $Y \equiv Z$ representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o triângulo $[ABC]$ e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços do plano α (o plano que contém a figura), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos ou dos traçados referentes ao rebatimento do plano α e necessários à construção das projeções do triângulo), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o triângulo $[ABC]$ ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o quadrado. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

215.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano π (o plano de perfil que contém a figura) pelos seus traços. O plano π é um plano duplamente projetante, pelo que os seus traços passam pelas projeções homónimas do ponto **O**. A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

Resolução:

Determinação das projeções do círculo:

O plano que contém o círculo (o plano π) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o círculo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções. No entanto, é possível desenhar imediatamente as duas projeções do círculo – tendo em conta que ambas as projeções sofrem a redução máxima, as duas projeções do círculo reduzem-se a segmentos de reta sobre os traços homónimos do plano π .

Assim, a projeção horizontal do círculo é um segmento de reta com 7 cm de comprimento (o comprimento do diâmetro) de que **O₁** (a projeção horizontal do ponto **O**) é o seu ponto médio – a projeção horizontal do círculo corresponde, na prática, à projeção horizontal do seu diâmetro de topo. De forma semelhante, a projeção frontal do círculo é um segmento de reta com 7 cm de comprimento (o comprimento do diâmetro) de que **O₂** (a projeção frontal do ponto **O**) é o seu ponto médio – a projeção frontal do círculo corresponde, na prática, à projeção frontal do seu diâmetro vertical.

Determinação da sombra do círculo nos planos de projeção:

O **primeiro passo** na determinação da sombra de um círculo consiste em averiguar a eventual existência de pontos de quebra, o que se processa com o recurso ao **método do plano luz/sombra passante** (recorde que o **plano luz/sombra passante** é o lugar geométrico dos pontos do espaço cuja sombra se situa no eixo **X**).

Nesse sentido, definiu-se o plano luz/sombra passante na presente situação. O **plano luz/sombra passante** está definido por duas retas concorrentes – o eixo **X** e o raio luminoso **l**, passante (concorrente com o eixo **X**). O raio luminoso **l** está definido por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo **X**, que não se identificou) e por uma direção (a direção luminosa convencional). Em seguida, determinou-se a reta de interseção do **plano luz/sombra passante** com o plano π (o plano que contém a figura) – a reta **i**.

Para definir a reta **i** são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. A reta **i** é necessariamente uma reta de perfil e é uma reta passante, pois pertence a um plano passante (o **plano luz/sombra passante**). Assim, já temos um ponto para definir a reta **i** – o seu ponto de concorrência com o eixo **X**, que não se identificou. Falta-nos outro ponto ou uma direção, para definir a reta **i**. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano π – o ponto **I**. Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta **i** – a reta **i** está definida por um ponto (o ponto **I**) e por uma direção (é fronto-horizontal).

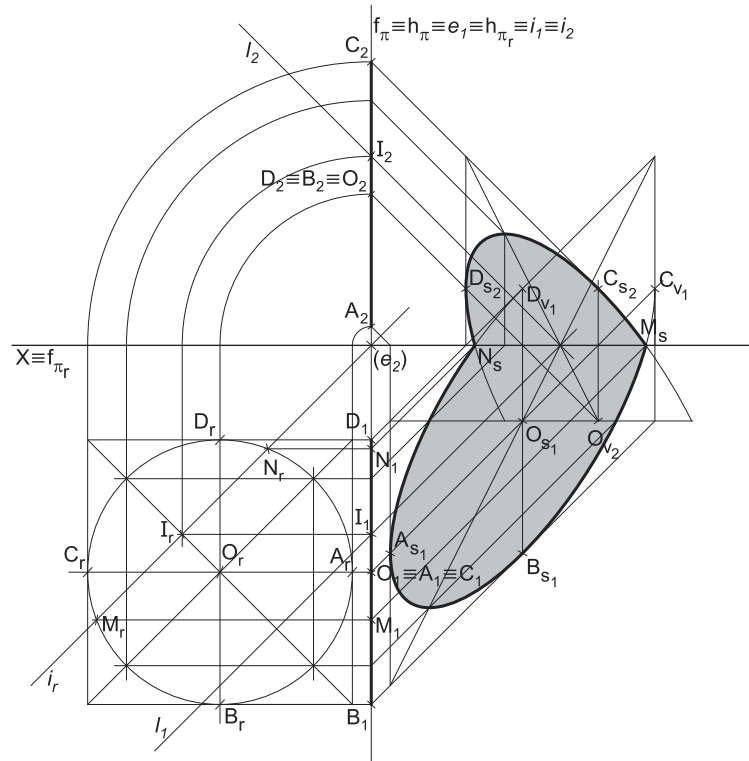
Tento em conta que tanto o círculo como a reta **i** estão contidos num plano de perfil, as projeções das duas figuras não verificam o **Critério de Reversibilidade** pelo que não é possível averiguar a posição da reta **i** em relação ao círculo. Assim, recorreu-se a um processo geométrico auxiliar – optou-se pelo rebatimento do plano π para o Plano Horizontal de Projeção. A charneira do rebatimento foi o traço horizontal do plano (**h_π**), que se identificou imediatamente. Os planos ortogonais à charneira (que contêm os arcos do rebatimento) são planos frontais (de frente), pelo que os pontos mantêm os seus afastamentos ao longo do rebatimento e os arcos do rebatimento projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção.

Em seguida, rebateram-se os pontos **O** e **I**, o que nos permitiu determinar **O_r** e **I_r**. Com o compasso, fazendo centro em **O_r** e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a circunferência que delimita o círculo em rebatimento, em verdadeira grandeza. Em seguida, desenhou-se a reta **i_r** (a reta **i** em rebatimento) – a reta **i_r** está definida por dois pontos (o ponto **I_r** e o seu ponto de concorrência com o eixo **X**, que é fixo).

A reta **i_r** é secante à circunferência nos pontos **M_r** e **N_r**, pelo que é possível concluir que o círculo produz sombra nos dois planos de projeção. O **arco maior MN** da circunferência produz sombra no Plano Horizontal de Projeção (no **SPHA**) – essa sombra é um segmento de elipse, pois o círculo não é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção. O **arco menor MN** da circunferência produz sombra no Plano Frontal de Projeção (no **SPFS**) – essa sombra é um segmento de elipse, pois o círculo não é paralelo ao Plano Frontal de Projeção. Para desenhar esses dois segmentos de elipse é necessário inscrever a circunferência num quadrado de lados paralelos aos planos de projeção – lados paralelos aos traços do plano π . Assim, efetuou-se a inscrição da circunferência num quadrado de lados paralelos aos traços do plano em rebatimento.

Em seguida, desenharam-se as medianas e as diagonais do quadrado, em rebatimento, e identificaram-se os pontos em que as medianas do quadrado se apoiam nos lados da figura – os pontos **A_r**, **B_r**, **C_r** e **D_r**. Inverteu-se o rebatimento e determinaram-se as projeções dos pontos **A**, **B**, **C** e **D**. Determinaram-se, ainda, as projeções horizontais dos pontos **M** e **N** (**M₁** e **N₁**, respetivamente), conduziram-se as projeções horizontais dos raios luminosos que passam por aqueles pontos e determinaram-se as suas sombras, no eixo **X** – **M_s** e **N_s**. O segmento de reta **[M_sN_s]** é a linha de quebra da sombra do círculo.

Pelas projeções horizontais dos pontos **M** e **N** (**M₁** e **N₁**, respetivamente), conduziram-se as projeções horizontais dos raios luminosos que passam por aqueles pontos e determinaram-se as suas sombras, no eixo **X** – **M_s** e **N_s**. O segmento de reta **[M_sN_s]** é a linha de quebra da sombra do círculo.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Determinação da sombra projetada do círculo no Plano Frontal de Projeção:

A **sombra projetada do círculo no Plano Frontal de Projeção** (no **SPFS**) é um segmento de uma **elipse**, que é uma curva de erro. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **elipse** requer um número significativo de pontos (dependendo, também, da dimensão da curva) e, além disso, um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **209**. (em que foi necessário desenhar uma **elipse** completa e não apenas uma **parte da elipse**). Como atrás se referiu, a parte do círculo que produz sombra no **SPFS** é o arco **MCN**.

Para determinar a sombra do arco **MCN**, determinaram-se as sombras reais dos pontos **C** e **D** (que pertencem àquele arco) – as suas sombras reais (**D_{s2}** e **C_{s2}**) situam-se no **SPFS**. Em seguida, determinou-se a sombra da parte correspondente do quadrado circunscrito à circunferência, bem como das partes correspondentes das medianas e das diagonais do quadrado. O quadrado tem lados (e uma mediana) de topo – as suas sombras no Plano Frontal de Projeção estão sobre as projeções frontais dos raios luminosos (têm a direção da direção convencional da luz, em projeção frontal). O quadrado tem lados (e uma mediana) verticais, que são paralelos ao Plano Frontal de Projeção – assim, as suas sombras no Plano Frontal de Projeção são igualmente verticais. Estes raciocínios permitiram-nos desenhar a sombra da parte do quadrado em que se inscreve o arco **MCN**, bem como das partes correspondentes das sombras das suas medianas e diagonais.

Os pontos **D_{s2}** e **C_{s2}** são imediatamente, **dois pontos** do segmento de elipse. Os dois pontos de quebra (**M_s** e **N_s**) são mais **dois pontos** do segmento da elipse. Por fim, transportaram-se, para a sombra do paralelogramo, os pontos em que a circunferência corta as diagonais do quadrado, a partir das suas projeções frontais, o que nos permitiu determinar mais **três pontos** do segmento de elipse.

Já temos um total de **sete pontos** para desenharmos o segmento de elipse – esses sete pontos permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva. Tenha em conta que os dois troços de elipse que se situam para baixo do eixo **X** (para baixo do segmento [**M_sN_s**]) se referem a uma **sombra virtual** – a necessidade destes dois troços foi apenas o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através deles é possível ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivessem desenhado estes dois pequenos troços, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afetada de erros de execução.

Determinação da sombra projetada do círculo no Plano Horizontal de Projeção:

A **sombra projetada do círculo no Plano Horizontal de Projeção** (no **SPHA**) é um segmento de uma **elipse**, que é uma curva de erro. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **elipse** requer, mais uma vez, um número significativo de pontos (dependendo, também, da dimensão da curva) e, além disso, um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **209**. (em que foi necessário desenhar uma **elipse** completa e não apenas uma **parte da elipse**). Como atrás se referiu, a parte do círculo que produz sombra no **SPHA** é o arco **MBN**.

Para determinar a sombra do arco **MBN**, determinaram-se as sombras reais dos pontos **A** e **B** (que pertencem àquele arco) – as suas sombras reais (**A_{s1}** e **B_{s1}**) situam-se no **SPHA**. Em seguida, determinou-se a sombra da parte correspondente do quadrado circunscrito à circunferência, bem como das partes correspondentes das medianas e das diagonais do quadrado. O quadrado tem lados (e uma mediana) verticais – as suas sombras no Plano Horizontal de Projeção estão sobre as projeções horizontais dos raios luminosos (têm a direção da direção convencional da luz, em projeção horizontal). O quadrado tem lados (e uma mediana) de topo, que são paralelos ao Plano Horizontal de Projeção – assim, as suas sombras no Plano Horizontal de Projeção são igualmente de topo. Estes raciocínios permitiram-nos desenhar a sombra da parte do quadrado em que se inscreve o arco **MBN**, bem como das partes correspondentes das sombras das suas medianas e diagonais.

Os pontos **A_{s1}** e **B_{s1}** são imediatamente, **dois pontos** do segmento de elipse. Os dois pontos de quebra (**M_s** e **N_s**) são mais **dois pontos** do segmento da elipse. Por fim, transportaram-se, para a sombra do paralelogramo, os pontos em que a circunferência corta as diagonais do quadrado, a partir das suas projeções horizontais, o que nos permitiu determinar mais **três pontos** do segmento de elipse. Por uma questão de aperfeiçoamento da curva, determinaram-se, ainda, as sombras virtuais dos pontos **C** e **D** – **C_{v1}** e **D_{v1}**. Estas duas sombras permitiram-nos, ainda, desenhar uma parte virtual do quadrado (à semelhança do efetuado para a sombra do círculo no Plano Frontal de Projeção).

Já temos um total de **nove pontos** para desenharmos o segmento de elipse – esses nove pontos permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva. Tenha em conta que os dois troços de elipse que se situam para cima do eixo **X** (para cima do segmento [**M_sN_s**]) e com extremos em **C_{v1}** e em **D_{v1}** se referem a uma **sombra virtual** – a necessidade destes dois troços foi apenas o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através deles é possível ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivessem desenhado estes dois pequenos troços, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afetada de erros de execução.

A sombra projetada do círculo nos planos de projeção é, assim, uma figura com duas partes elípticas. Uma vez que não existe qualquer invisibilidade (não há nenhuma parte da sombra que esteja oculta pelo círculo dado), preencheu-se a sombra do círculo com uma mancha clara e uniforme, em ambas as projeções – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o círculo e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços do plano π (o plano que contém a figura), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados referentes ao rebatimento do plano π e, ainda, de todos os traçados referentes à construção dos dois segmentos de elipse), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o círculo ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o círculo. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

216.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o plano ρ , pelos seus traços, em função dos dados. O plano ρ tem os seus traços simétricos em relação ao eixo X , pois é ortogonal a $\beta_{1/3}$ (planos ortogonais a $\beta_{1/3}$ têm os seus traços simétricos em relação ao eixo X). Em seguida, atendendo a que o círculo é tangente aos dois planos de projeção, o círculo tem necessariamente um diâmetro de perfil, cujos extremos se situarão sobre os traços do plano. Assim, representou-se o segmento $[AB]$, de perfil, sendo que A tem cota nula (situa-se sobre h_p , o traço horizontal do plano ρ) e B tem afastamento nulo (situa-se sobre f_p , o traço frontal do plano ρ). O segmento $[AB]$ é o diâmetro de perfil do círculo, sendo que A é o ponto em que o círculo é tangente ao Plano Horizontal de Projeção e B é o ponto em que o círculo é tangente ao Plano Frontal de Projeção. A partir das projeções do diâmetro $[AB]$, foi possível representar o ponto L (o foco luminoso), pelas suas projeções, em função dos dados (o centro do círculo é necessariamente um ponto do diâmetro $[AB]$).

Resolução:

Determinação das projeções do círculo:

O plano que contém o círculo (o plano ρ) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que o círculo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo rebatimento do plano ρ , pelo rebatimento dos seus traços.

Nesse sentido, optou-se por rebater o plano ρ para o Plano Horizontal de Projeção – identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano ρ (h_p), bem como os planos ortogonais à charneira, que são planos de perfil (ortogonais a f_p). o ponto A é um ponto da charneira, elo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se, imediatamente, $A_r \equiv A_1$.

Em seguida, rebateu-se o traço frontal do plano ρ (f_p), que é uma reta e para definirmos uma reta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. Já temos a direção – f_p é uma reta fronto-horizontal. Falta-nos um ponto para definir f_p em rebatimento. Esse ponto tem de ser um ponto qualquer de f_p – o ponto B , por exemplo. O ponto B tem de ser rebatido pelo triângulo do rebatimento.

Por B_1 (a projeção horizontal do ponto B) conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano de perfil que contém o arco do seu rebatimento) – o centro do arco do rebatimento do ponto B é o ponto de interseção da perpendicular à charneira com a charneira do rebatimento (h_p). Com o compasso, fazendo centro em B_1 e raio até B_2 (a projeção frontal do ponto B), transportou-se a cota do ponto B para o eixo X , o que nos permitiu construir o triângulo do rebatimento do ponto B , em verdadeira grandeza, em rebatimento (no rebatimento do plano de perfil). O raio do arco do rebatimento do ponto B é o comprimento da hipotenusa do triângulo do rebatimento – com o compasso, fazendo centro na charneira e raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, desenhou-se o arco do rebatimento do ponto B até à perpendicular à charneira, onde se situa B_r (o ponto B rebatido).

Pelo ponto B_r (o ponto B rebatido) conduziu-se f_{p_r} (o traço frontal do plano ρ , em rebatimento), paralelo ao eixo X – f_{p_r} está definido por um ponto (o ponto B_r) e por uma direção (é fronto-horizontal).

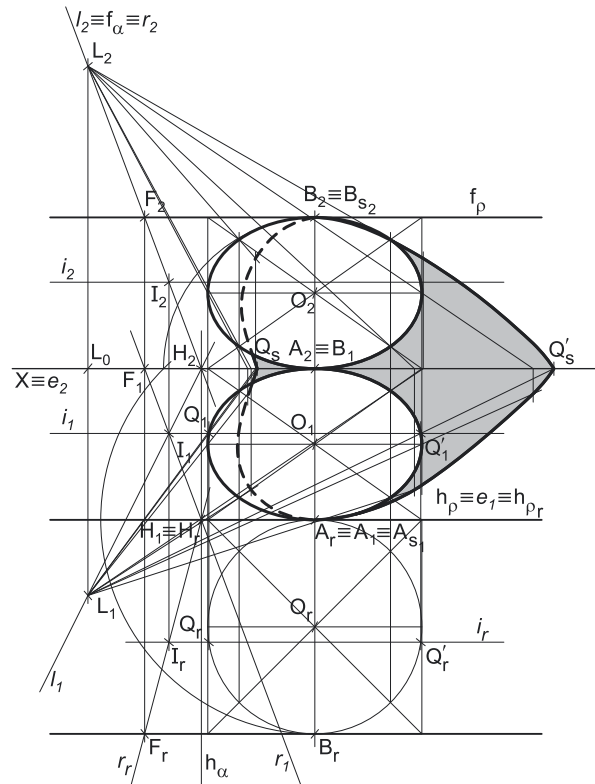
O segmento $[A_r B_r]$ é um diâmetro do círculo (o seu diâmetro de perfil). Nesse sentido, determinou-se o seu ponto médio (o ponto O_r) e, com o compasso, fazendo centro em O_r e com raio $\overline{O_r A_r} = \overline{O_r B_r}$, desenhou-se a circunferência que delimita o círculo em rebatimento, em verdadeira grandeza.

As duas projeções do círculo serão **elipses**. Assim, tratando-se de **duas elipses**, é necessário ter em conta que o desenho de cada uma requer alguns cuidados particulares, nomeadamente um mínimo de **oito pontos** e, se possível, os dois eixos (de cada uma) e o paralelogramo envolvente. Para tal, inscreveu-se a circunferência (em rebatimento) num quadrado de lados paralelos aos traços do plano (em rebatimento). Note que um dos lados do quadrado está contido em f_{p_r} e um outro lado está contido em h_{p_r} .

Em seguida, desenharam-se as medianas e as diagonais do quadrado (em rebatimento) – os pontos em que as medianas se apoiam nos lados do quadrado dão-nos, imediatamente, os extremos dos dois eixos das elipses – a mediana fronto-horizontal é o diâmetro cujas projeções são os eixos maiores das duas elipses, enquanto a mediana de perfil (o segmento $[A_r B_r]$) é o diâmetro cujas projeções são os eixos menores das duas elipses.

Para desenhar as duas projeções do círculo há, que, em primeiro lugar, determinar as duas projeções do quadrado. As duas projeções do quadrado determinam-se de forma direta, pois dois dos lados estão contidos nos traços do plano (os lados fronto-horizontais) e os outros dois lados estão necessariamente contidos em retas de perfil – as duas projeções do quadrado são dois retângulos. Em seguida, desenharam-se as diagonais dos dois retângulos que são as projeções correspondentes das diagonais do quadrado – os pontos em que as diagonais dos retângulos se bisseitam são as projeções homónimas da mediana do ponto O (o centro do círculo). Pelas projeções do ponto O conduziram-se, em seguida, as projeções homónimas da mediana fronto-horizontal do quadrado.

A_1 e B_1 (as projeções horizontais dos pontos A e B) e os pontos em que a projeção horizontal da mediana fronto-horizontal se apoia nos lados de perfil do retângulo (que é a projeção horizontal do quadrado) são, imediatamente, **quatro pontos** da elipse que é a projeção horizontal do círculo. As duas medianas do retângulo são, também, os dois eixos dessa elipse. A_2 e B_2 (as projeções frontais dos pontos A e B) e os pontos em que a projeção frontal da mediana fronto-horizontal se apoia nos lados de perfil do retângulo (que é a projeção frontal do quadrado) são, imediatamente, **quatro pontos** da elipse que é a projeção frontal do círculo. As duas medianas do retângulo são, também, os dois eixos dessa elipse.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por fim, transportaram-se, para as diagonais dos dois retângulos, os pontos em que a circunferência corta as diagonais do quadrado (através de perpendiculares à charneira), o que nos permitiu determinar mais **quatro pontos** de cada uma das duas elipses.

A partir dos **oito pontos** determinados, desenharam-se as duas elipses que são as projeções do círculo, atendendo às situações de tangência das elipses em relação aos lados dos retângulos.

Determinação da sombra do círculo nos planos de projeção:

O **primeiro passo** na determinação da sombra de um círculo consiste em averiguar a eventual existência de pontos de quebra, o que se processa com o recurso ao **método do plano luz/sombra passante** (recorde que o **plano luz/sombra passante** é o lugar geométrico dos pontos do espaço cuja sombra se situa no eixo X).

Nesse sentido, definiu-se o plano luz/sombra passante na presente situação. O **plano luz/sombra passante** está definido por duas retas concorrentes – o eixo X e o raio luminoso l , passante (concorrente com o eixo X). O raio luminoso l está definido por dois pontos – o ponto de concorrência com o eixo X (que não se identificou) e o ponto L (o foco luminoso). Em seguida, determinou-se a reta de interseção do **plano luz/sombra passante** com o plano ρ (o plano que contém a figura) – a reta i .

Para definir a reta i são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O **plano luz/sombra passante** e o plano ρ são planos secantes, pelo que têm uma única «família» de retas em comum, sendo que a reta de interseção entre os dois planos é necessariamente uma reta dessa única «família» de retas que os dois planos têm em comum. O **plano luz/sombra passante** é um plano de rampa e o plano ρ é outro plano de rampa, pelo que a única «família» de retas que os dois planos têm em comum é a «família» das retas fronto-horizontais – a reta i é, assim, uma reta fronto-horizantal. Já temos uma direção para definir a reta i . Falta-nos um ponto. Nesse sentido, há que determinar o ponto de interseção do raio luminoso l com plano ρ .

Nem a reta l (o raio luminoso) nem o plano ρ são projetantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da interseção entre retas e planos** que se executa em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano auxiliar que a contenha; **2.** determina-se a reta de interseção do plano auxiliar com o plano dado; **3.** o ponto de concorrência das duas retas é o ponto de interseção da reta dada com o plano dado.

1. Assim, conduziu-se, pelo raio luminoso l , o plano α , que é o plano projetante frontal do raio luminoso l .
2. Em seguida, determinou-se a reta de interseção do plano α (o plano auxiliar) com o plano ρ – a reta r . A reta r é a reta de interseção entre os dois planos e está definida por dois pontos – os pontos F e H (os seus traços nos planos de projeção).
3. O ponto de concorrência das retas l e r é o ponto de interseção do raio luminoso l com o plano ρ – o ponto I .

Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta i – a reta i está definida por um ponto (o ponto I) e por uma direção (é fronto-horizantal).

É possível constatar que a reta i é secante ao círculo, pelo que a sombra do círculo admite a existência de pontos de quebra. Estes, no entanto, não podem ser determinados diretamente em projeções, pois não é possível determinar pontos sobre uma curva de erro (uma elipse), que foi desenhada à mão livre. Tendo em conta que tanto o círculo como a reta i estão contidos num plano de rampa, há que recorrer a um processo geométrico auxiliar – optou-se por rebater a reta i para rebatimento previamente efetuado do plano ρ .

Nesse sentido, rebate-se a reta r . O ponto H (o traço horizontal da reta r) é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente $H_r \equiv H_p$. Em seguida, conduziu-se, pelo ponto F , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano de perfil que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se F_r sobre f_{p_r} . A reta r_r (a reta r rebatida) está definida por dois pontos – os pontos F_r e H_r . Em seguida, conduziu-se, pelo ponto I , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano de perfil que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se I_r (o ponto I rebatido) sobre a reta r_r . Pelo ponto I_r conduziu-se a reta i_r (a reta i rebatida), fronto-horizantal e determinaram-se os pontos em que a reta i_r corta a circunferência, em rebatimento – os pontos Q_r e Q'_r .

Por fim, inverteu-se o rebatimento dos pontos Q_r e Q'_r , recorrendo às perpendiculares à charneira que por eles passam (e que correspondem aos planos de perfil que contêm os respetivos arcos do rebatimento) – as projeções horizontais dos pontos Q e Q' estão sobre a projeção horizontal da reta i (não se determinaram as projeções frontais daqueles pontos, porque não são necessárias). Em seguida, pelas projeções horizontais dos pontos Q e Q' (Q_1 e Q'_1), conduziram-se as projeções horizontais dos raios luminosos que por eles passam e determinaram-se as suas sombras, no eixo X – Q_s e Q'_s são os pontos de quebra da sombra da circunferência. O segmento $[Q_s Q'_s]$ e a linha de quebra da sombra do círculo.

A parte do círculo que se situa entre a reta i e o traço frontal do plano ρ (f_{p_r}) produz sombra no **SPFS**. A parte do círculo que se situa entre a reta i e o traço horizontal do plano ρ (h_{p_r}) produz sombra no **SPHA**.

Determinação da sombra projetada do círculo no Plano Frontal de Projeção:

A **sombra projetada do círculo no Plano Frontal de Projeção** (no **SPFS**) é um segmento de uma **elipse**, que é uma curva de erro. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **elipse** requer um número significativo de pontos (dependendo, também, da dimensão da curva) e, além disso, um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **209**. No entanto, para evitar uma resolução gráfica demasiado densa, optou-se por se simplificar a determinação da sombra do círculo no Plano Frontal de Projeção, recorrendo, apenas, às sombras dos pontos que nos permitiram desenhar as projeções da figura.

O ponto B situa-se no Plano Frontal de Projeção, pelo que a sua sombra está coincidente com o próprio ponto – tem-se imediatamente $B_2 \equiv B_{s_2}$. Em seguida, determinaram-se as sombras reais (no **SPFS**) dos pontos em que circunferência corta as diagonais do quadrado (os pontos que se situam entre a reta i e o traço frontal do plano ρ) – as sombras destes dois pontos, a sombra do ponto B (B_{s_2}) e os dois pontos de quebra perfazem um total de **cinco pontos**, o que, ainda assim, se considerou permitir-nos um desenho relativamente preciso da curva que é a sombra do círculo no Plano Frontal de Projeção (no **SPFS**).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Determinação da sombra projetada do círculo no Plano Horizontal de Projeção:

A **sombra projetada do círculo no Plano Horizontal de Projeção** (no **SPHA**) é outro segmento de uma **elipse**, que é, mais uma vez, uma curva de erro. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da **elipse** requer um número significativo de pontos (dependendo, também, da dimensão da curva) e, além disso, um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **209**. No entanto, para evitar uma resolução gráfica demasiado densa, optou-se, de novo, por simplificar a determinação da sombra do círculo no Plano Horizontal de Projeção, recorrendo, apenas, às sombras dos pontos que nos permitiram desenhar as projeções da figura.

O ponto **A** situa-se no Plano Horizontal de Projeção, pelo que a sua sombra está coincidente com o próprio ponto – tem-se imediatamente $A_1 \equiv A_{s1}$. Em seguida, determinaram-se as sombras reais (no **SPHA**) de mais quatro pontos da circunferência – as sombras dos pontos em que a mediana fronto-horizontal do quadrado se apoia nos lados de perfil do polígono e, ainda, as sombras dos pontos em que a circunferência corta as diagonais do quadrado (os pontos que se situam entre a reta i e o traço horizontal do plano ρ). As sombras destes quatro pontos, a sombra do ponto **A** (A_s) e os dois pontos de quebra perfazem um total de **sete pontos**, o que, ainda assim, se considerou permitir-nos um desenho relativamente preciso da curva que é a sombra do círculo no Plano Horizontal de Projeção (no **SPHA**).

A sombra projetada do círculo nos planos de projeção é, assim, uma figura com duas partes elípticas – note que, no contorno da sombra, se atendeu às situações de invisibilidades da sombra (as partes da sombra que estão ocultas pelo próprio círculo). Em seguida, preencheu-se a **parte visível** da sombra do círculo com uma mancha clara e uniforme, em ambas as projeções – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o círculo e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços do plano ρ (o plano que contém a figura), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos) dos traçados referentes ao rebatimento do plano ρ e, ainda, de todos os traçados referentes à construção dos dois segmentos de elipse), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o círculo ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o círculo. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

217.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respetivas projeções, em função dos dados.

Resolução:

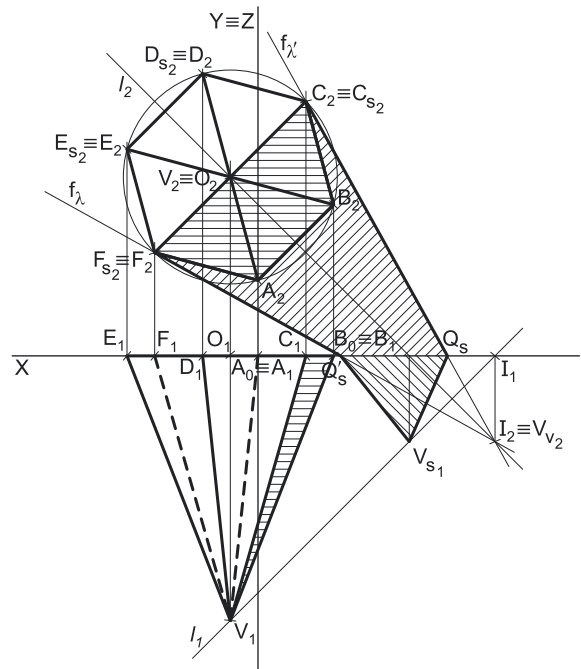
Determinação das projeções da pirâmide:

A base da pirâmide (o hexágono **[ABCDEF]**) está contida no Plano Frontal de Projeção, pelo que está em verdadeira grandeza em projeção frontal. Assim, a partir de A_2 e B_2 (as projeções frontais dos pontos **A** e **B**), efetuou-se a construção da figura, em projeção frontal, o que nos permitiu determinar as projeções frontais dos restantes quatro vértices do hexágono, bem como do seu centro (o ponto **O**). As projeções horizontais de todos aqueles pontos situam-se no eixo **X**, pois o hexágono tem afastamento nulo. A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

Trata-se de uma **pirâmide regular**, pelo que o seu eixo está contido numa reta ortogonal ao plano da base, que é uma reta de topo (projetante frontal) – tem-se, imediatamente, $O_2 \equiv V_2$. Por outro lado, a altura de uma pirâmide é a distância do seu vértice ao plano da base. Uma vez que a pirâmide tem 7 cm de altura e que o plano da base tem afastamento nulo, o vértice **V** tem 7 cm de afastamento ($0 + 7 = 7$), o que nos permitiu determinar V_1 (a projeção horizontal do vértice **V**). Em seguida, a partir das projeções de todos os seis vértices da pirâmide, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é o hexágono **[ABCDEF]**, cuja projeção frontal é o pentágono **[A₂B₂C₂D₂E₂F₂]**. Em projeção frontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **V**. Este vértice, por ser o vértice de **maior afastamento** da pirâmide, é **visível**, bem como todas as arestas que neles convergem, que são todas as arestas laterais do sólido – todas as arestas laterais do sólido são visíveis, em projeção frontal.

O contorno aparente horizontal é a linha fechada **[BCDEV]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[B₁C₁D₁E₁V₁]**. Em projeção horizontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices **A** e **F**. Estes dois vértices, por serem os vértices de **menor cota** da pirâmide, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[AB]**, **[AF]** e **[EF]**, da base (que estão ocultas por arestas visíveis), e as arestas laterais **[AV]** e **[FV]**. As arestas laterais **[CV]** e **[DV]** são visíveis, por se situarem na parte visível do sólido (os vértices **C** e **D** são os vértices de maior cota da pirâmide).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria da pirâmide:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice da pirâmide, um raio luminoso l ; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso l com o plano da base – ponto **I**; **3.** pelo ponto **I** conduzem-se as retas tangentes (ou rasantes) à base da pirâmide; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes (ou rasantes) à base da pirâmide permitem-nos identificar, de forma imediata, as arestas laterais que integram a linha separatriz luz/sombra.

1. Conduziu-se, pelo vértice da pirâmide (o ponto **V**), um raio luminoso l – o raio luminoso l está definido por um ponto (o ponto **V**) e por uma direção (a direção convencional da luz).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso l com o plano da base – o ponto **I**. O ponto **I** é, imediatamente, o traço frontal do raio luminoso l , pois a base da pirâmide está contida no Plano Frontal de Projeção.
3. Pelo ponto **I** conduziram-se as retas rasantes à base da pirâmide – as retas f_λ e $f_{\lambda'}$, que são, imediatamente, os traços frontais dos dois **planos tangentes luz/sombra**.
4. As retas f_λ e $f_{\lambda'}$ são rasantes à base da pirâmide nos pontos **F** e **C**, respetivamente. Assim, as arestas laterais **[FV]** e **[CV]** são, imediatamente, duas arestas da **linha separatriz luz/sombra** (as arestas laterais **[CV]** e **[FV]** são as arestas segundo as quais os planos λ e λ' são rasantes ao sólido).

As arestas **[CV]** e **[FV]** separam a parte da superfície lateral da pirâmide que está iluminada da que está em sombra – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), as faces **[CDV]**, **[DEV]** e **[EFV]** estão iluminadas enquanto as faces **[AFV]**, **[ABV]** e **[CDV]** estão em sombra. A base da pirâmide também está em sombra, pelo que a **linha separatriz luz/sombra** é a **linha quebrada fechada [CVFED]**.

A **sombra própria** da pirâmide integra as faces laterais **[AFV]**, **[ABV]** e **[CDV]** e a base da pirâmide. Em projeção frontal, as faces laterais **[AFV]**, **[ABV]** e **[CDV]** são visíveis e a base é invisível, pelo que, em projeção frontal, a sombra própria a assinalar refere-se às faces laterais **[AFV]**, **[ABV]** e **[CDV]**. Já em projeção horizontal, de todas as faces em sombra apenas a face lateral **[BCV]** é visível, pelo que a única sombra própria a assinalar, em projeção horizontal, é a da face lateral **[BCV]**.

A **sombra própria** da pirâmide foi assinalada com tracejado, que se efetuou paralelamente ao eixo **X**, em ambas as projeções.

Determinação da sombra projetada da pirâmide:

A **sombra projetada** da pirâmide é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada da pirâmide** nos planos de projeção.

Assim, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**. Os pontos **C**, **D**, **E** e **F** situam-se no Plano Frontal de Projeção, pelo que as suas sombras estão coincidentes com os próprios pontos – tem-se imediatamente $C_2 \equiv C_{s_2}$, $D_2 \equiv D_{s_2}$, $E_2 \equiv E_{s_2}$ e $F_2 \equiv F_{s_2}$. V_{s_1} é a sombra real do ponto **V** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que por ele passa. As sombras reais dos vértices da pirâmide (da linha separatriz luz/sombra) situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) da pirâmide **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

C_{s_2} , D_{s_2} , E_{s_2} e F_{s_2} situam-se, todas, no **SPFS**, pelo que as sombras das arestas **[CD]**, **[DE]** e **[EF]** da base não admitem a existência de pontos de quebra. O mesmo já não acontece em relação às arestas laterais **[CV]** e **[FV]** – de facto, um ponto de quebra situa-se entre V_{s_1} e C_{s_2} (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre V_{s_1} e F_{s_2} (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar os pontos de quebra recorreu-se à sombra virtual do ponto **V** – V_{v_2} . V_{v_2} é a sombra virtual do ponto **V** – situa-se no **SPFI** e é o traço frontal do raio luminoso l (note que V_{v_2} é o próprio ponto **I**, nesta situação). O segmento $[C_{s_2}V_{v_2}]$ é a sombra projetada da aresta **[CV]** no Plano Frontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento $[C_{s_2}V_{v_2}]$ com o eixo **X** é Q_s (o ponto de quebra da sombra da aresta **[CV]**). A linha quebrada aberta $[C_{s_2}Q_sV_{s_1}]$ é a **sombra real** da aresta **[CV]** (a sombra projetada da aresta nas faces do 1^{a} Diedro). O segmento $[F_{s_2}V_{v_2}]$ é a sombra projetada da aresta **[FV]** no Plano Frontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento $[F_{s_2}V_{v_2}]$ com o eixo **X** é Q'_s (o ponto de quebra da sombra da aresta **[FV]**). A linha quebrada aberta $[F_{s_2}Q'_sV_{s_1}]$ é a **sombra real** da aresta **[FV]** (a sombra projetada da aresta nas faces do 1^{a} Diedro).

A linha quebrada fechada $[V_{s_1}Q_sC_{s_2}D_{s_2}E_{s_2}F_{s_2}Q'_s]$ é a **sombra projetada** da pirâmide nos planos de projeção. O segmento $[Q_sQ'_s]$ é a **linha de quebra** da sombra da pirâmide. Após o desenho do contorno da sombra, tracejou-se a área visível da sombra projetada da pirâmide perpendicularmente à direção luminosa (em ambas as projeções). Note que a porção de sombra que está por baixo da base está oculta pelo sólido, pelo que é **invisível** (não há lugar à representação a tracejado, pois a sombra é **invisível**).

Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y** \equiv **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – a pirâmide e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à construção do hexágono ou, ainda, das retas f_λ e $f_{\lambda'}$), representaram-se a **leve**. O tracejado executou-se a **leve**, pois os tracejados são sempre a **leve**.

Note que, apesar de a pirâmide ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem a pirâmide. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

218.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A**, **B**, **V** e **L** (o foco luminoso), pelas respectivas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano φ (o plano frontal que contém a base da pirâmide) pelo seu traço horizontal. O plano φ é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal (h_φ) passa por **A**₁ e por **B**₁ (as projeções horizontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente). O plano φ não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis.

Resolução:

Determinação das projeções da pirâmide:

A base da pirâmide (o triângulo **[ABC]**) está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção. Assim, a partir de **A**₂ e **B**₂ (as projeções frontais dos pontos **A** e **B**), efetuou-se a construção da figura, em projeção frontal, o que nos permitiu determinar as projeções frontais do terceiro vértice do triângulo. A projeção horizontal da figura reduz-se a um segmento de reta do traço horizontal do plano φ , pois o plano φ é um plano projetante horizontal. Em seguida, a partir das projeções de todos os seis vértices da pirâmide, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é a linha fechada **[ABVC]**, cuja projeção frontal é o polígono **[A₂B₂V₂C₂]**. Todos os vértices da pirâmide integram o contorno aparente frontal. No entanto, a aresta **[BC]** da base é **invisível**, em projeção frontal, porque separa duas faces invisíveis em projeção frontal – a base **[ABC]** e a face lateral **[BCV]**. Já a aresta lateral **[AV]** é **visível**, em projeção frontal, porque separa duas faces visíveis em projeção frontal – as faces laterais **[ABV]** e **[ACV]**.

O contorno aparente horizontal é o triângulo **[BCV]**, cuja projeção horizontal é o triângulo **[B₁C₁V₁]**. Em projeção horizontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **A**. Este vértice, por ser o vértice de **menor cota** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[AB]** e **[AC]**, da base (que estão ocultas pela aresta **[C]**, que é visível em projeção horizontal), e a aresta lateral **[AV]**.

Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria da pirâmide:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice da pirâmide, um raio luminoso **l**; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano da base – ponto **I**; **3.** pelo ponto **I** conduzem-se as retas tangentes (ou rasantes) à base da pirâmide; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes (ou rasantes) à base da pirâmide permitem-nos identificar, de forma imediata, as arestas laterais que integram a linha separatriz luz/sombra.

1. Conduziu-se, pelo vértice da pirâmide (o ponto **V**), um raio luminoso **l** – o raio luminoso **l** está definido por dois pontos (o ponto **V** e o foco luminoso **L**).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano da base – o ponto **I**. A determinação do ponto **I** é direta, a partir da sua projeção horizontal, pois o plano φ é um plano projetante horizontal (trata-se da interseção entre uma reta não projetante e um plano projetante horizontal).
3. Pelo ponto **I** conduziram-se as retas rasantes à base da pirâmide – as retas **t** e **t'** (que são as retas de interseção dos dois **planos tangentes luz/sombra** com o plano que contém a base – o plano φ).
4. As retas **t** e **t'** são rasantes à base da pirâmide nos pontos **A** e **C**, respetivamente. Assim, as arestas laterais **[AV]** e **[CV]** são, imediatamente, duas arestas da **linha separatriz luz/sombra** (as arestas laterais **[AV]** e **[CV]** são as arestas segundo as quais os planos λ e λ' são rasantes ao sólido).

As arestas **[AV]** e **[CV]** separam a parte da superfície lateral da pirâmide que está iluminada da que está em sombra – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da direita, onde se situa o foco luminoso), as faces laterais **[ABV]** e **[BCV]** estão iluminadas enquanto a face **[ACV]** está em sombra. A base da pirâmide também está em sombra, pelo que a **linha separatriz luz/sombra** é a **linha quebrada fechada [ABCV]**.

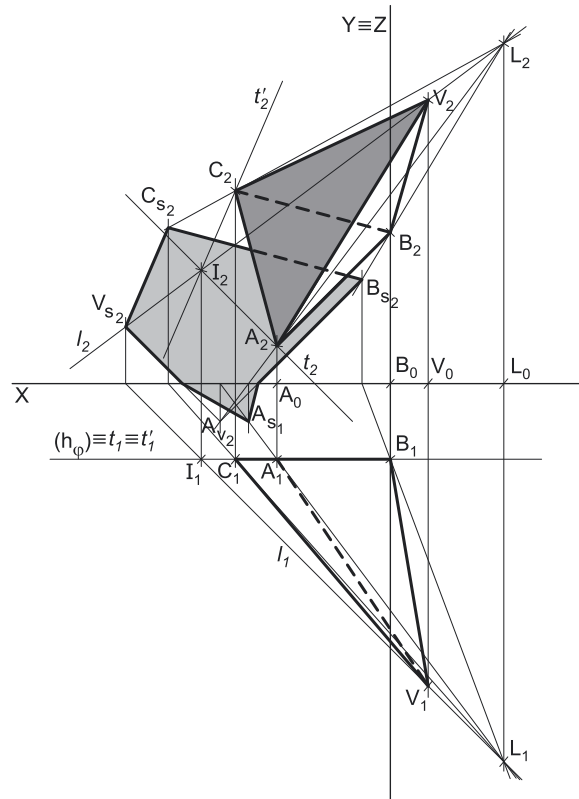
A **sombra própria** da pirâmide integra a face lateral **[ACV]** e a base da pirâmide. Em projeção frontal, a face lateral **[ACV]** é visível e a base é invisível, pelo que, em projeção frontal, a sombra própria a assinalar refere-se à face lateral **[ACV]**. Já em projeção horizontal, todas as faces em sombra (a face lateral **[ACV]** e a base) são invisíveis, pelo que não existe qualquer sombra própria a assinalar, em projeção horizontal.

A **sombra própria** da pirâmide foi assinalada com uma mancha clara e uniforme – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Determinação da sombra projetada da pirâmide:

A **sombra projetada** da pirâmide é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada da pirâmide** nos planos de projeção.

Assim, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A_{s_1} é a sombra real do ponto **A** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que por ele passa. V_{s_2} é a sombra real do ponto **V** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que por ele passa. B_{s_2} é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que por ele passa. C_{s_2} é a sombra real do ponto **C** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que por ele passa. As sombras reais dos vértices da pirâmide (da linha separatriz luz/sombra) situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) da pirâmide **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

B_{s_2} , C_{s_2} e V_{s_2} situam-se, todas, no **SPFS**, pelo que as sombras das arestas **[BC]**, **[BV]** e **[CV]** não admitem a existência de pontos de quebra. O mesmo já não acontece em relação às arestas laterais **[AB]** e **[AV]** – de facto, um ponto de quebra situa-se entre A_{s_1} e B_{s_2} (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre A_{s_1} e V_{s_2} (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar os pontos de quebra recorreu-se à sombra virtual do ponto **A** – A_{v_2} . A_{v_2} é a sombra virtual do ponto **A** – situa-se no **SPFI** e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **A**. O segmento $[V_{s_2}A_{v_2}]$ é a sombra projetada da aresta **[AV]** no Plano Frontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**) e que nos permitiu determinar o ponto de quebra, que é o ponto de interseção do segmento $[V_{s_2}A_{v_2}]$ com o eixo **X**. O segmento $[B_{s_2}A_{v_2}]$ é a sombra projetada da aresta **[AB]** no Plano Frontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**) e que nos permitiu determinar o ponto de quebra, que é o ponto de interseção do segmento $[B_{s_2}A_{v_2}]$ com o eixo **X**. Note que não se identificaram os dois pontos de quebra pois, na realidade, a sua identificação é desnecessária.

Em seguida, desenhou-se o contorno da **sombra projetada** da pirâmide nos planos de projeção, que tem vértices em A_{s_1} , V_{s_2} , B_{s_2} , C_{s_2} e nos dois pontos de quebra determinados, atendendo às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada da pirâmide é invisível, pois está oculta pela própria pirâmide. Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra com uma mancha clara e uniforme – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pela pirâmide) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo $Y \equiv Z$ representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – a pirâmide e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). O traço horizontal do plano φ (o plano que contém a base), apesar de integrar os dados, no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à construção do triângulo ou, ainda, das retas t e t'), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de a pirâmide ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem a pirâmide. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

219.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A**, **B** e **L** (o foco luminoso), pelas respetivas projeções, em função dos dados.

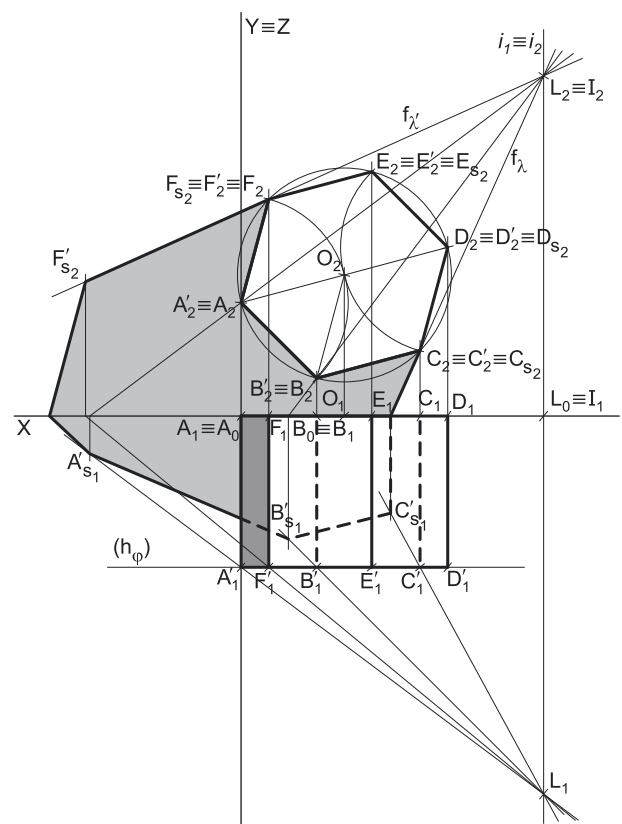
Resolução:

Determinação das projeções do prisma:

A base de menor afastamento do prisma (o hexágono **[ABCDEF]**) está contida no Plano Frontal de Projeção, pelo que está em verdadeira grandeza em projeção frontal. Assim, a partir de A_2 e B_2 (as projeções frontais dos pontos **A** e **B**), efetuou-se a construção da figura, em projeção frontal, o que nos permitiu determinar as projeções frontais dos restantes vértices do hexágono. A projeção horizontal da figura reduz-se a um segmento de reta no eixo **X** (pois todos os seus vértices têm afastamento nulo).

A altura de um prisma é a distância entre os planos das duas bases. Assim, porque o prisma tem 4 cm de altura e a sua base de menor afastamento está contida no Plano Frontal de Projeção, o plano φ (o plano que contém a base de maior afastamento do sólido) tem 4 cm de afastamento ($0 + 4 = 4$). Nesse sentido, representou-se o plano φ (o plano frontal que contém a outra base do sólido) pelo seu traço horizontal. O plano φ não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal se representou entre parêntesis.

Trata-se de um **prisma regular**, pelo que as suas arestas laterais são ortogonais aos planos das bases, ou seja, estão contidas em retas de topo (projetantes frontais). Assim, pelas projeções dos vértices do hexágono **[ABCDEF]** conduziram-se as projeções homónimas das retas suporte das respetivas arestas laterais (que não se identificaram) e determinaram-se os pontos de interseção dessas retas com o plano φ – esses pontos são os vértices do hexágono **[A'B'C'D'E'F']**, que é a base de maior afastamento do sólido. Note que se trata da interseção entre retas projetantes frontais (as retas suporte das arestas laterais do sólido) com um plano projetante horizontal (o plano φ).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A partir das projeções dos doze vértices do prisma, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é o hexágono $[A'B'C'D'E'F']$, cuja projeção frontal é o hexágono $[A'_2B'_2C'_2D'_2E'_2F'_2]$. Em projeção frontal existem seis vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – todos os vértices da base $[ABCDEF]$. Estes, por serem os vértices de **menor afastamento** do prisma, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem. No entanto, todas as arestas que convergem naqueles vértices ou são projetantes frontais ou estão ocultas por arestas visíveis, pelo que não há quaisquer invisibilidades a assinalar em projeção frontal.

O contorno aparente horizontal é a linha fechada $[DEFAA'F'E'D']$, cuja projeção horizontal é o polígono $[D_1E_1F_1A_1A'_1F'_1E'_1D'_1]$. Em projeção horizontal existem quatro vértices que não pertencem ao contorno aparente horizontal – os vértices **B**, **C**, **B'** e **C'**, que são os vértices de **menor cota** do prisma. Por isso mesmo, aqueles vértices são **invisíveis** (em projeção horizontal), bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas $[AB]$, $[BC]$ e $[CD]$ (da base $[ABCDEF]$) as arestas $[A'B']$, $[B'C']$ e $[C'D']$ (da base $[A'B'C'D'E'F']$) e ainda as arestas laterais $[BB']$ e $[CC']$. As arestas $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[A'B']$, $[B'C']$ e $[C'D']$ estão ocultas por arestas visíveis, pelo que as arestas $[BB']$ e $[CC']$ consistem na invisibilidade a assinalar, em projeção horizontal. Já as arestas laterais $[EE']$ e $[FF']$ são visíveis (em projeção horizontal), pois os vértices que as definem (os vértices **E**, **F**, **E'** e **F'**) são os vértices de maior cota do prisma.

Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do prisma:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo foco luminoso, uma reta paralela às arestas laterais do prisma – a reta i ; **2.** determina-se o ponto de interseção da reta i com o plano da base (de referência) – o ponto **I**; **3.** pelo ponto **I** conduzem-se as retas tangentes (ou rasantes) à base (de referência) do prisma; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes (ou rasantes) à base (de referência) do prisma permitem-nos identificar, de forma imediata, as arestas laterais que integram a linha separatriz luz/sombra.

1. Conduziu-se, pelo foco luminoso (o ponto **L**), uma reta paralela às arestas laterais do sólido – a reta i , que está definida por um ponto (o ponto **L**) e por uma direção (a direção das arestas laterais do prisma – é uma reta de topo).
2. Determinou-se o ponto de interseção a reta i com o plano da base (de referência) – o ponto **I**. Considerou-se que a base de referência é a base de menor afastamento do prisma. Assim, o ponto **I** é, imediatamente, o traço frontal da reta i .
3. Pelo ponto **I** conduziram-se as retas rasantes à base (de referência) do prisma – as retas f_λ e $f_{\lambda'}$, que são, imediatamente, os traços frontais dos dois **planos tangentes luz/sombra**.
4. As retas f_λ e $f_{\lambda'}$ são rasantes à base (de referência) do prisma nos pontos **C** e **F**, respetivamente. Assim, as arestas laterais $[CC']$ e $[FF']$ são, imediatamente, duas arestas da **linha separatriz luz/sombra** (as arestas laterais $[CC']$ e $[FF']$ são as arestas segundo as quais os planos λ e λ' são rasantes ao sólido).

As arestas $[CC']$ e $[FF']$ separam a parte da superfície lateral do prisma que está iluminada da que está em sombra – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da direita, onde se situa o foco luminoso), as faces laterais $[CC'D'D]$, $[DD'E'E]$ e $[EE'F'F]$ estão iluminadas, bem como a base de maior afastamento (a base $[A'B'C'D'E'F']$) enquanto as faces laterais $[AA'F'F]$, $[AA'B'B]$ e $[BB'C'C]$ estão em sombra, tal como a base de menor afastamento do prisma (a base $[ABCDEF]$). Assim, a **linha separatriz luz/sombra** é a **linha quebrada fechada** $[CC'B'A'F'FED]$.

A **sombra própria** do prisma integra as faces laterais $[AA'F'F]$, $[AA'B'B]$ e $[BB'C'C]$, bem como a base de menor afastamento (a base $[ABCDEF]$). Em projeção horizontal, a face lateral $[AA'F'F]$ é visível e as restantes faces em sombra são invisíveis, pelo que, em projeção horizontal, a única sombra própria a assinalar refere-se à face lateral $[AA'F'F]$. Já em projeção frontal, todas as faces em sombra (as faces laterais $[AA'F'F]$, $[AA'B'B]$ e $[BB'C'C]$ e a base de menor afastamento do prisma – a base $[ABCDEF]$) são invisíveis, pelo que não existe qualquer sombra própria a assinalar, em projeção frontal.

A **sombra própria** da pirâmide foi assinalada com uma mancha clara e uniforme – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Determinação da sombra projetada do prisma:

A **sombra projetada** do prisma é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do prisma** nos planos de projeção.

Assim, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**. Os pontos **C**, **D**, **E** e **F** situam-se no Plano Frontal de Projeção, pelo que as suas sombras estão coincidentes com os próprios pontos – tem-se imediatamente $C_2 \equiv C_{s_2}$, $D_2 \equiv D_{s_2}$, $E_2 \equiv E_{s_2}$ e $F_2 \equiv F_{s_2}$. F'_{s_2} é a sombra real do ponto **F'** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que por ele passa. A'_{s_1} é a sombra real do ponto **A'** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que por ele passa. B'_{s_1} é a sombra real do ponto **B'** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que por ele passa. C'_{s_1} é a sombra real do ponto **C'** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que por ele passa. As sombras reais dos vértices do prisma (da linha separatriz luz/sombra) situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do prisma **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

C_{s_2} , D_{s_2} , E_{s_2} e F_{s_2} situam-se, todas, no **SPFS**, pelo que as sombras das arestas $[CD]$, $[DE]$ e $[EF]$ da base de menor afastamento não admitem pontos de quebra. F_{s_2} e F'_{s_2} situam-se no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta lateral $[FF']$ não admite ponto de quebra. A'_{s_1} , B'_{s_1} e C'_{s_1} situam-se, todas, no **SPHA**, pelo que as sombras das arestas $[A'B']$ e $[B'C']$ da base de maior afastamento não admitem pontos de quebra. O mesmo já não acontece em relação à aresta $[A'F']$ (da base de maior afastamento) e à aresta lateral $[CC']$ – de facto, um ponto de quebra situa-se entre F'_{s_2} e A'_{s_1} (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre C'_{s_1} e C_{s_2} (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Os pontos de quebra determinaram-se atendendo às situações de paralelismo entre as arestas e os planos nos quais aquelas produzem sombra.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A aresta lateral $[CC']$ é de topo (é paralela ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção da aresta $[CC']$ é paralela à própria aresta. Assim, por C'_{s_1} conduziu-se uma paralela a $[C_1C'_1]$ (que é perpendicular ao eixo X), até ao eixo X , onde se situa o ponto de quebra da sombra da aresta $[CC']$. Após a determinação do ponto de quebra, foi possível desenhar a sombra projetada da aresta $[CC']$ – é a linha quebrada que tem um extremo em C'_{s_1} , o outro extremo em C_{s_2} e um vértice no ponto de quebra.

A aresta lateral $[A'F']$ é frontal (é paralela ao Plano Frontal de Projeção), pelo que a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção da aresta $[A'F']$ é paralela à própria aresta. Assim, por F'_{s_2} conduziu-se uma paralela a $[A'_2F'_2]$, até ao eixo X , onde se situa o ponto de quebra da sombra da aresta $[A'F']$. Após a determinação do ponto de quebra, foi possível desenhar a sombra projetada da aresta $[A'F']$ – é a linha quebrada que tem um extremo em A'_{s_1} , o outro extremo em F'_{s_2} e um vértice no ponto de quebra.

Em seguida, desenhou-se o contorno da **sombra projetada** do prisma nos planos de projeção, que tem vértices em $C_{s_2}, D_{s_2}, E_{s_2}, F_{s_2}, F'_{s_2}, A'_{s_1}, B'_{s_1}, C'_{s_1}$ e nos dois pontos de quebra determinados, atendendo às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada do prisma é invisível, pois está oculta pelo próprio prisma. Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra com uma mancha clara e uniforme – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo prisma) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

Traçado:

O eixo X , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo $Y \equiv Z$ representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o prisma e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). O traço horizontal do plano φ (o plano que contém a base de maior afastamento), no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à construção do hexágono ou, ainda, das retas f_x e f_x'), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o prisma ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o prisma. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objeto e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

220.

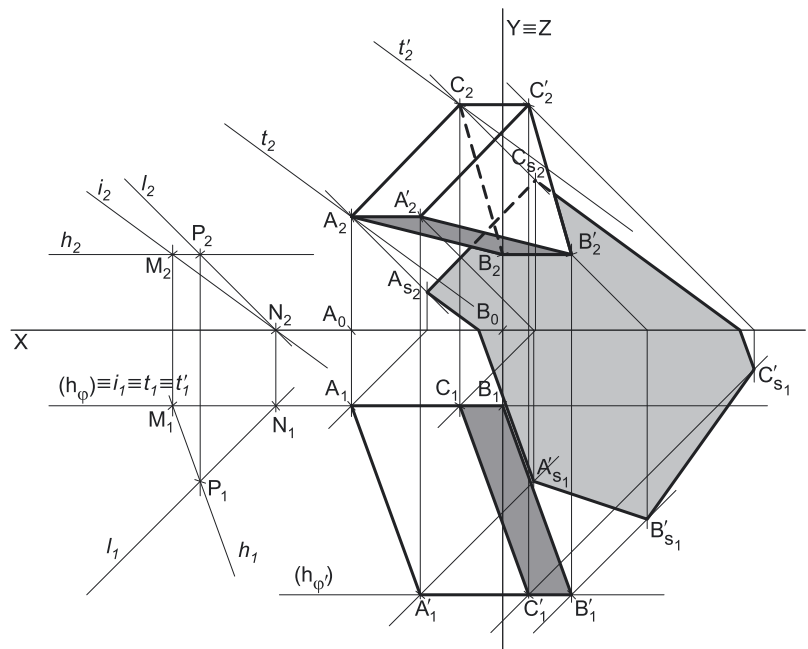
Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respetivas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano φ (o plano frontal que contém a base da pirâmide) pelo seu traço horizontal. O plano φ é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal (h_φ) passa por A_1 e por B_1 (as projeções horizontais dos pontos **A** e **B**, respetivamente). O plano φ não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis. A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo X , em ambas as projeções.

Resolução:

Determinação das projeções do prisma:

A base de menor afastamento do prisma (o triângulo $[ABC]$) está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção. Assim, a partir de A_2 e B_2 (as projeções frontais dos pontos **A** e B), efetuou-se a construção da figura, em projeção frontal, o que nos permitiu determinar a projeção frontal do terceiro vértice do triângulo. A projeção horizontal da figura reduz-se a um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano φ (h_φ), pois o plano é um plano projetante horizontal.



A altura de um prisma é a distância entre os planos das duas bases. Assim, porque o prisma tem 5 cm de altura e a sua base de menor afastamento tem 2 cm de afastamento, o plano φ' (o plano que contém a base de maior afastamento do sólido) tem 7 cm de afastamento ($2 + 5 = 7$). Nesse sentido, representou-se o plano φ' (o plano frontal que contém a outra base do sólido) pelo seu traço horizontal. O plano φ não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal se representou entre parêntesis.

Em seguida, pelas projeções dos vértices do triângulo $[ABC]$ conduziram-se as projeções homónimas das retas suporte das respetivas arestas laterais (que não se identificaram), com a direção dada no enunciado, e determinaram-se os pontos de interseção dessas retas com o plano φ' – esses pontos são os vértices do triângulo $[A'B'C']$, que é a base de maior afastamento do sólido. Note que se trata da interseção entre retas não projetantes (as retas suporte das arestas laterais do sólido) com um plano projetante horizontal (o plano φ').

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A partir das projeções dos seis vértices do prisma, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é a linha fechada $[ABB'C'C]$, cuja projeção frontal é o polígono $[A_2B_2B'_2C'_2C_2]$. Em projeção frontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice A' . Este, por ser um dos vértices de **maior afastamento** do prisma, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas $[A'B']$ e $[A'C']$, da base $[A'B'C']$, e a aresta lateral $[AA']$. Já a aresta $[BC]$, da base $[ABC]$, é invisível, pois separa duas faces invisíveis em projeção frontal.

O contorno aparente horizontal é a linha fechada $[ACBB'C'A']$, cuja projeção horizontal é o polígono $[A_1C_1B_1B'_1C'_1A'_1]$. Todos os vértices do prisma pertencem ao contorno aparente horizontal. No entanto, as arestas $[AB]$ (da base $[ABC]$) e $[A'B']$ (da base $[A'B'C']$) são invisíveis, mas como estão ocultas por arestas visíveis (em projeção horizontal), não há qualquer invisibilidade a assinalar em projeção horizontal. Já a aresta lateral $[BB']$ é visível (em projeção horizontal), pois separa duas faces visíveis em projeção horizontal.

Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do prisma:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** por um ponto P qualquer, exterior ao sólido, conduzir duas retas – uma reta paralela às arestas laterais do sólido e uma outra reta paralela à direção luminosa; **2.** determinar a reta i , a reta de interseção do plano definido pelas duas retas com o plano da base (de referência) do prisma; **3.** conduzir as retas tangentes (ou rasantes) à base (de referência) do prisma que são paralelas à reta i ; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes (ou rasantes) à base (de referência) do prisma permitem-nos identificar, de forma imediata, as arestas laterais que integram a linha separatriz luz/sombra.

1. Por um ponto P qualquer, exterior ao sólido, conduziram-se duas retas – a reta h , paralela às arestas laterais do sólido, e a reta l (um raio luminoso). Estas duas retas, porque são concorrentes, definem um plano (o plano λ) – esse plano tem a orientação dos planos tangentes luz/sombra
2. Determinou-se a reta i , a reta de interseção do plano definido pelas retas h e l , com o plano da base (de referência) do prisma (considerou-se que a base de referência do prisma é a sua base de menor afastamento). A reta i está definida por dois pontos – o ponto M (o ponto de interseção da reta h com o plano φ) e o ponto N (o ponto de interseção da reta l com o plano φ).
3. Conduziram-se as retas rasantes à base (de referência) do prisma que são paralelas à reta i – as retas t e t' .
4. As retas t e t' são rasantes à base (de referência) do prisma nos pontos A e C , respetivamente. Assim, as arestas laterais $[AA']$ e $[CC']$ são, imediatamente, duas arestas da **linha separatriz luz/sombra** (as arestas laterais $[AA']$ e $[CC']$ são as arestas segundo as quais os planos λ' e λ'' são rasantes ao sólido).

As arestas $[AA']$ e $[CC']$ separam a parte da superfície lateral do prisma que está iluminada da que está em sombra – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), a face lateral $[AA'C'C]$ é a única face lateral iluminada, sendo que a base de maior afastamento (a base $[A'B'C']$) também está iluminada. Já as faces laterais $[BB'C'C]$ e $[AA'C'C]$ estão em sombra, tal como a base de menor afastamento do prisma (a base $[ABC]$). Assim, a **linha separatriz luz/sombra** é a **linha quebrada fechada** $[ACCB'A']$.

A **sombra própria** do prisma integra as faces laterais $[BB'C'C]$ e $[AA'B'B]$, bem como a base de menor afastamento (a base $[ABC]$). Em projeção horizontal, a face lateral $[BB'C'C]$ é visível e as restantes faces em sombra são invisíveis, pelo que, em projeção horizontal, a única sombra própria a assinalar refere-se à face lateral $[BB'C'C]$. Já em projeção frontal, de todas as faces em sombra (as faces laterais $[AA'B'B]$ e $[BB'C'C]$ e a base de menor afastamento do prisma – a base $[ABC]$), a única que é visível é a face lateral $[AA'B'B]$, pelo que esta é a única sombra própria a assinalar, em projeção frontal.

A **sombra própria** da pirâmide foi assinalada com uma mancha clara e uniforme – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Determinação da sombra projetada do prisma:

A **sombra projetada** do prisma é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do prisma** nos planos de projeção.

Assim, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**. A_{s_2} é a sombra real do ponto A (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que por ele passa. C_{s_2} é a sombra real do ponto C (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que por ele passa. A'_{s_1} é a sombra real do ponto A' (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que por ele passa. B'_{s_1} é a sombra real do ponto B' (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que por ele passa. C'_{s_1} é a sombra real do ponto C' (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que por ele passa. As sombras reais dos vértices do prisma (da linha separatriz luz/sombra) situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do prisma **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

A_{s_2} e C_{s_2} situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta $[AC]$ (da base de menor afastamento) não admite ponto de quebra. A'_{s_1} , B'_{s_1} e C'_{s_1} situam-se, todas, no **SPHA**, pelo que as sombras das arestas $[A'B']$ e $[B'C']$ (da base de maior afastamento) não admitem pontos de quebra. O mesmo já não acontece em relação às arestas laterais $[AA']$ e $[CC']$ – de facto, um ponto de quebra situa-se entre A_{s_2} e A'_{s_1} (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre C_{s_2} e C'_{s_1} (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Os pontos de quebra determinaram-se atendendo às situações de paralelismo entre as arestas laterais e o Plano Horizontal de Projeção.

A aresta lateral $[AA']$ é horizontal (é paralela ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção da aresta $[AA']$ é paralela à própria aresta. Assim, por A'_{s_1} conduziu-se uma paralela a $[A_1A'_1]$, até ao eixo X , onde se situa o ponto de quebra da sombra da aresta $[AA']$. Após a determinação do ponto de quebra, foi possível desenhar a sombra projetada da aresta $[AA']$ – é a linha quebrada que tem um extremo em A'_{s_1} , o outro extremo em A_{s_2} e um vértice no ponto de quebra.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A aresta lateral **[CC']** é horizontal (é paralela ao Plano Horizontal de Projeção), pelo que a sombra projetada no Plano Horizontal de Projeção da aresta **[CC']** é paralela à própria aresta. Assim, por C'_{s_1} conduziu-se uma paralela a $[C_1C'_1]$, até ao eixo **X**, onde se situa o ponto de quebra da sombra da aresta **[CC']**. Após a determinação do ponto de quebra, foi possível desenhar a sombra projetada da aresta **[CC']** – é a linha quebrada que tem um extremo em C'_{s_1} , o outro extremo em C_{s_2} e um vértice no ponto de quebra.

Em seguida, desenhou-se o contorno da **sombra projetada** do prisma nos planos de projeção, que tem vértices em A_{s_2} , C_{s_2} , C'_{s_1} , B'_{s_1} , A'_{s_1} e nos dois pontos de quebra determinados, atendendo às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada do prisma é invisível, pois está oculta pelo próprio prisma. Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra com uma mancha clara e uniforme – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo prisma) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y = Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o prisma e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços horizontais dos planos que contêm as bases do sólido, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à determinação da orientação dos planos tangentes ou, ainda, das retas l , t , e t'), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o prisma ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o prisma. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

221.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **O** e **L** (o foco luminoso), pelas respetivas projeções, em função dos dados.

Resolução:

Determinação das projeções do cone:

A base do cone está contida no Plano Horizontal de Projeção, pelo que está em verdadeira grandeza em projeção horizontal. Assim, com o compasso, fazendo centro em O_1 (a projeção horizontal do ponto **O**) e com 3 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal da base do sólido. A projeção frontal da base situa-se no eixo **X** (é um segmento de reta sobre o eixo **X**).

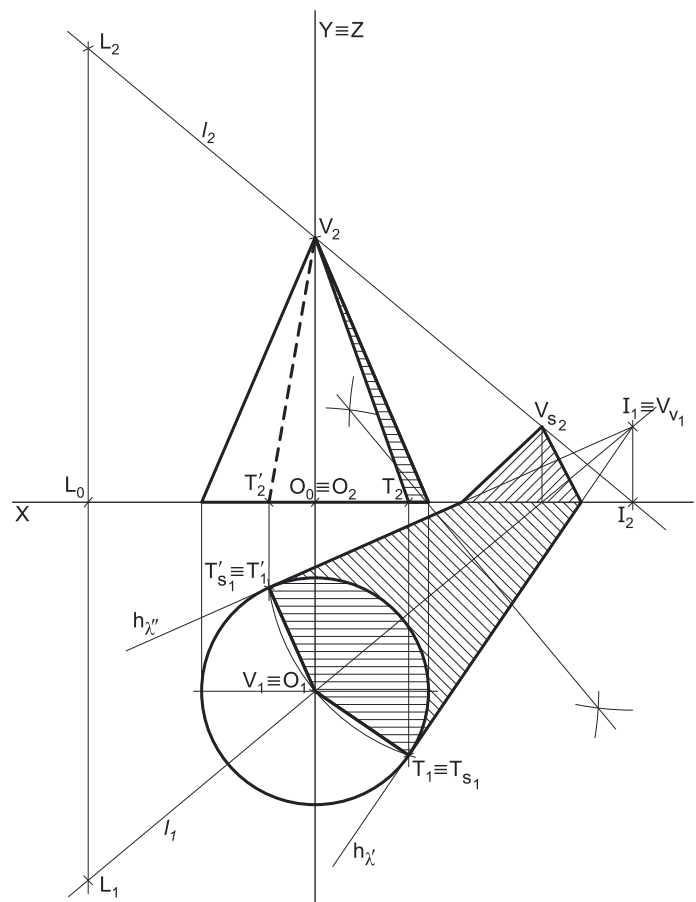
Trata-se de um **cone de revolução**, pelo que o eixo do cone está contido numa reta ortogonal ao plano da base, ou seja, numa reta vertical (uma reta projetante horizontal) – assim, tem-se imediatamente $V_1 \equiv O_1$ (os dois pontos situam-se na mesma projetante horizontal). Por outro lado, a altura do cone é a distância do seu vértice ao plano da base. Uma vez que o cone tem 7 cm de altura e que o plano da base tem cota nula, o vértice **V** tem 7 cm de cota ($0 + 7 = 7$), o que nos permitiu determinar V_2 (a projeção frontal do vértice **V**).

Em seguida, desenharam-se a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido (que é um triângulo com um vértice em V_2 e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor abscissa da projeção frontal da base) e a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do cone (que é a própria circunferência que delimita a base).

Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cone:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduziu-se, pelo vértice do cone, um raio luminoso l ; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso l com o plano da base – o ponto **I**; **3.** pelo ponto **I** conduzem-se as retas tangentes à base do cone; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes à base do cone permitem-nos identificar, de forma imediata, as geratrizes que integram a linha separatriz luz/sombra (as **geratrizes separatrizes luz/sombra**).

1. Conduziu-se, pelo vértice da pirâmide (o ponto **V**), um raio luminoso l – o raio luminoso l está definido por dois pontos (o ponto **V** e o ponto **L** – o foco luminoso).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso l com o plano da base – o ponto **I**. O ponto **I** é, imediatamente, o traço horizontal do raio luminoso l , pois a base do cone está contida no Plano Horizontal de Projeção.
3. Pelo ponto **I** conduziram-se as retas tangentes à base do cone – as retas h_x e h'_x , que são, imediatamente, os traços horizontais dos dois **planos tangentes luz/sombra**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Tenha em conta que a determinação das retas h_{λ} e $h_{\lambda'}$ se processou com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência que delimita a projeção horizontal da base) que passam por um ponto exterior (o ponto I_1 , que é a projeção horizontal do ponto I). Esse processo fez-nos determinar, em primeiro lugar, os pontos de tangência – os pontos T_1 e T'_1 (as projeções horizontais dos pontos T e T').

4. As retas h_{λ} e $h_{\lambda'}$ são tangentes à base do cone nos pontos T e T' , respetivamente. Assim, as geratrizes $[TV]$ e $[T'V]$ são, imediatamente, as **geratrizes separatrizes luz/sombra** (as geratrizes de contacto ou de tangência, segundo as quais os planos λ e λ' são tangentes à superfície lateral do sólido).

Nesse sentido, desenharam-se as duas projeções das geratrizes $[TV]$ e $[T'V]$ – note que a geratriz $[T'V]$ é invisível em projeção frontal, por se situar na parte invisível da superfície lateral do cone).

As geratrizes $[TV]$ e $[T'V]$ separam a parte da superfície lateral do cone que está **iluminada** da parte que está **em sombra** – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), a parte **iluminada** da superfície lateral do sólido é a parte correspondente ao **arco maior $\overline{TT'}$** . A base do cone e a parte da superfície lateral do cone que corresponde ao **arco menor $\overline{TT'}$** estão **em sombra**. Assim, a linha separatriz luz/sombra é a linha mista fechada $[TV \overline{TT'}]$, que integra as geratrizes $[TV]$ e $[T'V]$, bem como o **arco maior $\overline{TT'}$** .

Em projeção frontal, a parte da superfície lateral do cone que está em sombra e que é visível é a parte compreendida entre a projeção frontal da geratriz $[TV]$ e a geratriz mais à direita do contorno aparente frontal do cone. A base é invisível (em projeção frontal), pelo que não é possível assinalar a sombra própria da base (em projeção frontal). Assim, a **sombra própria** a assinalar, **em projeção frontal**, é a parte compreendida entre a projeção frontal da geratriz $[TV]$ e a geratriz mais à direita do contorno aparente frontal do cone.

Em projeção horizontal, a base é igualmente invisível, mas a parte da superfície lateral do cone que está em sombra é visível na sua totalidade (a parte compreendida entre as projeções horizontais das geratrizes $[TV]$ e $[T'V]$ e que corresponde ao **arco menor $\overline{TT'}$**) – essa é, assim, a **sombra própria** a assinalar, **em projeção horizontal**.

A **sombra própria** do cone foi assinalada com tracejado, que se efetuou paralelamente ao eixo X , em ambas as projeções.

Determinação da sombra projetada do cone:

A **sombra projetada** do cone é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cone** nos planos de projeção.

Nesse sentido, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**. Os pontos T e T' situam-se no Plano Horizontal de Projeção, pelo que as suas sombras estão coincidentes com os próprios pontos – tem-se imediatamente $T_1 \equiv T_{s1}$ e $T'_1 \equiv T'_{s1}$. V_{s2} é a sombra real do ponto V (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que por ele passa. As sombras reais dos vértices da linha separatriz luz/sombra do cone situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do cone **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

Os pontos T e T' situam-se no **SPHA** (tal como as suas sombras – T_{s1} e T'_{s1}) tal como a própria base do cone se situa no **SPHA** – assim, a sombra do arco maior $\overline{TT'}$ está coincidente com o próprio arco. No entanto, a sombra do ponto V (V_{s2}) situa-se no **SPFS** – assim, existe um ponto de quebra entre V_{s2} e T_{s1} (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra entre V_{s2} e T'_{s1} (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar os pontos de quebra recorreu-se à sombra virtual do ponto V – V_{v1} , V_{v1} é a sombra virtual do ponto V – situa-se no **SPHP** e é o traço horizontal do raio luminoso l (note que V_{v1} é o próprio ponto I , nesta situação).

O segmento $[T_{s1}V_{v1}]$ é a sombra projetada da geratriz $[TV]$ no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento $[T_{s1}V_{v1}]$ com o eixo X é o ponto de quebra da sombra da geratriz $[TV]$ (que não se identificou). Após a determinação do ponto de quebra, foi possível desenhar a sombra projetada da geratriz $[TV]$ – é a linha quebrada que tem um extremo em T_{s1} , o outro extremo em V_{s2} e um vértice no ponto de quebra.

O segmento $[T'_{s1}V_{v1}]$ é a sombra projetada da geratriz $[T'V]$ no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento $[T'_{s1}V_{v1}]$ com o eixo X é o ponto de quebra da sombra da geratriz $[T'V]$ (que também não se identificou). Após a determinação do ponto de quebra, foi possível desenhar a sombra projetada da geratriz $[T'V]$ – é a linha quebrada que tem um extremo em T'_{s1} , o outro extremo em V_{s2} e um vértice no ponto de quebra.

Em seguida, desenhou-se o contorno da **sombra projetada** do cone nos planos de projeção, que é composta pelo arco maior $\overline{T_{s1}T'_{s1}}$ e pela linha quebrada que tem vértices em T_{s1} , T'_{s1} , V_{s2} e nos dois pontos de quebra determinados. Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra com tracejado. Tendo em conta que **não se trata de uma direção luminosa**, o tracejado foi executado perpendicularmente à direção luminosa convencional, em ambas as projeções – o tracejado faz ângulos de 45° (de abertura para a **direita**) com o eixo X , em ambas as projeções.

Traçado:

O eixo X , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo $Y \equiv Z$ representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o cone e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos ou das retas h_{λ} e $h_{\lambda'}$), representaram-se a **leve**. O tracejado executou-se a **leve**, pois os tracejados são sempre a **leve**.

Note que, apesar de o cone ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cone. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

222.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **O** e **V**, pelas respectivas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano v (o plano horizontal que contém a base do cone) pelo seu traço frontal. O plano v é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal (f_v) passa por O_2 (a projeção frontal do ponto **O**). O plano v não tem traço horizontal, pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

Resolução:*Determinação das projeções do cone:*

A base do cone está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção. Assim, com o compasso, fazendo centro em O_1 (a projeção horizontal do ponto **O**) e com 3 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal da base do sólido. A projeção frontal da base é um segmento de reta sobre o traço frontal do plano v – corresponde à projeção frontal do seu diâmetro fronto-horizontal.

Em seguida, desenharam-se a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido (que é um triângulo com um vértice em V_2 e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor abscissa da projeção frontal da base) e a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do cone (que é a própria circunferência que delimita a base).

Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cone:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice do cone, um raio luminoso l ; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso l com o plano da base – o ponto **I**; **3.** pelo ponto **I** conduzem-se as retas tangentes à base do cone; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes à base do cone permitem-nos identificar, de forma imediata, as geratrizes que integram a linha separatriz luz/sombra (as **geratrizes separatrizes luz/sombra**).

1. Conduziu-se, pelo vértice da pirâmide (o ponto **V**), um raio luminoso l – o raio luminoso l está definido por um ponto (o ponto **V**) e por uma direção (a direção luminosa dada no enunciado).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso l com o plano da base – o ponto **I**. O ponto **I** teve determinação imediata, a partir da sua projeção frontal, pois trata-se da interseção entre uma reta não projetante (o raio luminoso l) com um plano projetante frontal (o plano v).
3. Pelo ponto **I** conduziram-se as retas tangentes à base do cone – as retas t e t' . As retas t e t' são as retas de interseção dos dois **planos tangentes luz/sombra** com o plano v (o plano que contém a base do cone).

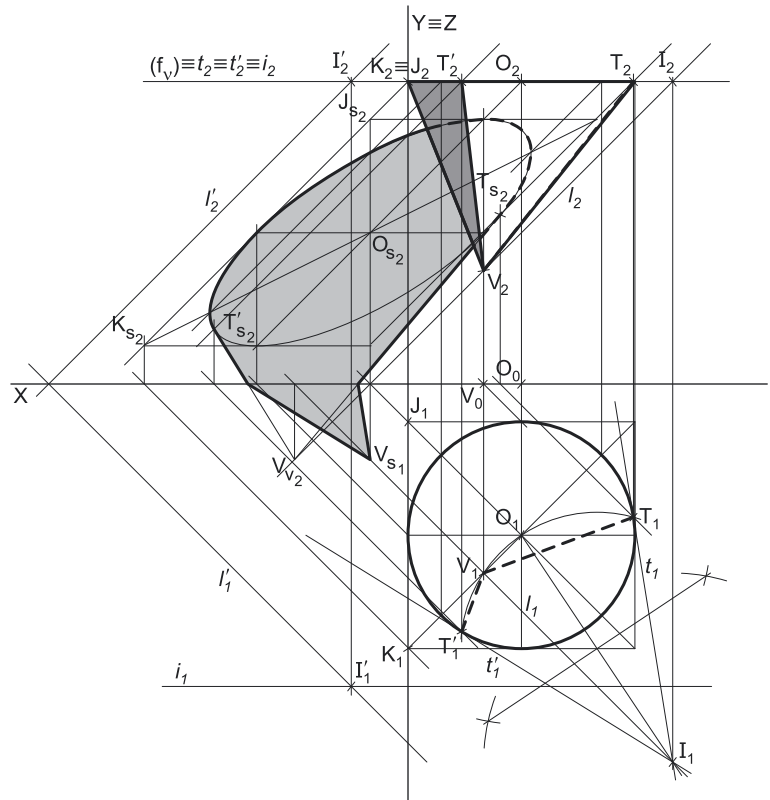
Tenha em conta que a determinação das retas t e t' se processou com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência que delimita a projeção horizontal da base) que passam por um ponto exterior (o ponto I_1 , que é a projeção horizontal do ponto **I**). Esse processo fez-nos determinar, em primeiro lugar, os pontos de tangência – os pontos T_1 e T'_1 (as projeções horizontais dos pontos **T** e **T'**).

4. As retas t e t' são tangentes à base do cone nos pontos **T** e **T'**, respetivamente. Assim, as geratrizes $[TV]$ e $[T'V]$ são, imediatamente, as **geratrizes separatrizes luz/sombra** (as geratrizes de contacto ou de tangência, segundo as quais os planos λ e λ' são tangentes à superfície lateral do sólido).

Nesse sentido, desenharam-se as duas projeções das geratrizes $[TV]$ e $[T'V]$. As duas geratrizes são invisíveis em projeção horizontal (a superfície lateral do cone é invisível, na sua totalidade, em projeção horizontal) e a geratriz $[TV]$ é invisível em projeção frontal, por se situar na parte invisível da superfície lateral do cone.

As geratrizes $[TV]$ e $[T'V]$ separam a parte da superfície lateral do cone que está **iluminada** da parte que está **em sombra** – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da direita), a parte **iluminada** da superfície lateral do sólido é a parte correspondente ao **arco menor $\overline{TT'}$** . A base do cone está também iluminada. A parte da superfície lateral do cone que corresponde ao **arco maior $\overline{TT'}$** está **em sombra**. Assim, a linha separatriz luz/sombra é a linha mista fechada $[TV\overline{TT'}]$, que integra as geratrizes $[TV]$ e $[T'V]$, bem como o **arco maior $\overline{TT'}$** .

Em projeção frontal, a parte da superfície lateral do cone que está em sombra e que é visível é a parte compreendida entre a projeção frontal da geratriz $[T'V]$ e a geratriz mais à esquerda do contorno aparente frontal do cone – assim, essa é a **sombra própria** a assinalar, **em projeção frontal**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em projeção horizontal, a superfície lateral do cone é invisível na sua totalidade, pelo que a parte dessa superfície que está em sombra é igualmente invisível na sua totalidade (a parte compreendida entre as projeções horizontais das geratrizes $[TV]$ e $[T'V]$ e que corresponde ao **arco maior $\overline{TT'}$**). Tendo em conta que a base (que é visível em projeção horizontal) está iluminada, em projeção horizontal não há qualquer **sombra própria** a assinalar.

A **sombra própria** do cone foi assinalada com uma mancha clara e uniforme – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Determinação da sombra projetada do cone:

A **sombra projetada** do cone é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cone** nos planos de projeção.

Nesse sentido, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**. T_{s_2} é a sombra real do ponto **T** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que por ele passa. T'_{s_2} é a sombra real do ponto **T'** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que por ele passa. V_{s_1} é a sombra real do ponto **V** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que por ele passa. As sombras reais dos vértices da linha separatriz luz/sombra do cone situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do cone **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

T_{s_2} e T'_{s_2} situam-se no **SPFS** e V_{s_1} situa-se no **SPHA** – assim, existe um ponto de quebra entre T_{s_2} e V_{s_1} (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra entre T'_{s_2} e V_{s_1} (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos). Para determinar os pontos de quebra recorreu-se à sombra virtual do ponto **V** – V_{v_2} . V_{v_2} é a sombra virtual do ponto **V** – situa-se no **SPFI** e é o traço frontal do raio luminoso **l**.

O segmento $[T_{s_2}V_{v_2}]$ é a sombra projetada da geratriz $[TV]$ no Plano Frontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento $[T_{s_2}V_{v_2}]$ com o eixo **X** é o ponto de quebra da sombra da geratriz $[TV]$ (que não se identificou). Após a determinação do ponto de quebra, foi possível desenhar a sombra projetada da geratriz $[TV]$ – é a linha quebrada que tem um extremo em T_{s_2} , o outro extremo em V_{s_1} e um vértice no ponto de quebra.

O segmento $[T'_{s_2}V_{v_2}]$ é a sombra projetada da geratriz $[T'V]$ no Plano Frontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento $[T'_{s_2}V_{v_2}]$ com o eixo **X** é o ponto de quebra da sombra da geratriz $[T'V]$ (que também não se identificou). Após a determinação do ponto de quebra, foi possível desenhar a sombra projetada da geratriz $[T'V]$ – é a linha quebrada que tem um extremo em T'_{s_2} , o outro extremo em V_{s_1} e um vértice no ponto de quebra.

Após os procedimentos expostos, foi possível desenhar as sombras projetadas das duas geratrizes, atendendo às invisibilidades existentes (arte da sombra é invisível, pois está oculta pelo cone). No entanto, há que desenhar a sombra do arco maior $\overline{TT'}$, que é um arco de circunferência. Como em situações semelhantes, o **primeiro passo** na determinação da sombra de um círculo (ou circunferência ou arco de circunferência) consiste em averiguar a eventual existência de pontos de quebra, o que se processa com o recurso ao **método do plano luz/sombra passante**.

Nesse sentido, definiu-se o plano luz/sombra passante na presente situação. O **plano luz/sombra passante** está definido por duas retas concorrentes – o eixo **X** e o raio luminoso **l'**, passante (concorrente com o eixo **X**). O raio luminoso **l'** está definido por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo **X**, que não se identificou) e por uma direção (a direção luminosa dada no enunciado). Em seguida, determinou-se a reta de interseção do **plano luz/sombra passante** com o plano **v** (o plano que contém a base do cone) – a reta **i**.

Para definir a reta **i** são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O **plano luz/sombra passante** e o plano **v** são planos secantes, pelo que têm uma única «família» de retas em comum, sendo que a reta de interseção entre os dois planos é necessariamente uma reta dessa única «família» de retas que os dois planos têm em comum. O **plano luz/sombra passante** é um plano de rampa e o plano **v** é um plano horizontal (de nível), pelo que a única «família» de retas que os dois planos têm em comum é a «família» das retas fronto-horizontais – a reta **i** é, assim, uma reta fronto-horizonta. Já temos uma direção para definir a reta **i**. Falta-nos um ponto. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso **l'** com o plano **v** – o ponto **I'**. Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta **i** – a reta **i** está definida por um ponto (o ponto **I'**) e por uma direção (é fronto-horizonta).

A reta **i** é exterior ao **arco maior $\overline{TT'}$** , pelo que a sombra do arco não apresenta pontos de quebra – a sombra do arco situar-se-á na totalidade no **SPHA** ou no **SPFS**. Tendo em conta que as sombras reais dos pontos **T** e **T'** (os extremos do arco) se situam, ambas, no **SPFS**, conclui-se que o **arco maior $\overline{TT'}$** produz sombra no **SPFS**, ou seja, a sua sombra será um **segmento de elipse** – o desenho desta curva requer um mínimo de **oito pontos** (dependendo das dimensões da figura) e, sempre que possível, o paralelogramo envolvente.

Nesse sentido, começou-se por inscrever arco maior $\overline{TT'}$ na parte correspondente de um quadrado de **lados paralelos ao eixo X**, desenhando em seguida as respetivas diagonais e medianas – a parte do quadrado que tem interesse para a determinação da sombra do arco maior $\overline{TT'}$ corresponde a 3/4 do quadrado total (os 3/4 que a figura apresenta e que englobam o arco $\overline{TT'}$ na sua totalidade). Os pontos em que as medianas se apoiam nos lados do quadrado permitem-nos determinar **quatro pontos do segmento de elipse**. Os pontos em que as diagonais do quadrado cortam o arco maior $\overline{TT'}$ permitem-nos determinar mais **três pontos do segmento de elipse**. Em seguida, há que determinar a sombra do quadrado no Plano Frontal de Projeção, bem como das suas medianas e diagonais.

Em primeiro lugar, determinou-se a sombra real do centro do círculo (o ponto **O**) – O_{s_2} é a sombra real do ponto **O** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que por ele passa. A sombra dos 3/4 do quadrado no Plano Frontal de Projeção corresponde a 3/4 de um paralelogramo – o **segmento de elipse** estará inscrita nesses 3/4 de paralelogramo.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A sombra dos 3/4 do quadrado determinou-se a partir das sombras dos seus dois vértices mais à esquerda – os pontos **J** e **K**. J_{s_2} e K_{s_2} são as sombras reais dos vértices **J** e **K** e situam-se no **SPFS**. O lado **[JK]** é de topo e a sua sombra está contida no traço frontal do plano luz/sombra que contém o segmento **[JK]** – trata-se de um plano de topo (projetante frontal). Assim, e como é possível observar, a sombra do lado **[JK]** está sobre a projeção frontal dos raios luminosos que passam pelos dois pontos (que não se identificaram) e que corresponde, na prática, à projeção frontal da direção luminosa. De forma semelhante, a sombra do lado da figura que é paralelo a **[JK]** está igualmente sobre a projeção frontal da direção luminosa. **J** é o vértice mais à esquerda de um lado fronto-horizontal do quadrado – a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção desse lado (o lado de menor afastamento do quadrado) é necessariamente paralela a esse lado, pelo que a sombra projetada desse lado é fronto-horizontal e passa por J_{s_2} . Este raciocínio permitiu-nos desenhar a sombra projetada do lado de menor afastamento do quadrado e, dessa forma, determinar a sombra de mais um vértice do quadrado (o extremo direito do seu lado de menor afastamento), sobre a sombra do lado paralelo a **[JK]**. Repetiu-se o processo para o lado de maior afastamento do quadrado, que é igualmente fronto-horizontal (e passa por K_{s_2}), o que nos permitiu determinar a sombra do quarto vértice do quadrado e desenhar a parte correspondente do paralelogramo que é a sombra da figura.

Em seguida, desenharam-se as medianas do paralelogramo (que passam por O_{s_2} e são paralelas aos lados do paralelogramo) bem como as suas diagonais (que passam por O_{s_2} e têm extremos nos vértices do paralelogramo). As medianas do paralelogramo são, imediatamente, as sombras das medianas do quadrado e permitem-nos determinar, imediatamente, **quatro pontos do segmento de elipse** – os pontos em que as medianas do paralelogramo se apoiam nos lados do paralelogramo. Estes pontos são, ainda, os pontos em que o segmento de elipse será tangente aos lados correspondentes do paralelogramo envolvente.

Em seguida, desenharam-se as diagonais do paralelogramo que são, imediatamente, as sombras das diagonais do quadrado. Os pontos em que a circunferência (que delimita a base) corta as diagonais do quadrado situar-se-ão necessariamente sobre as diagonais do paralelogramo (que são as sombras das diagonais do quadrado). Assim, pelas projeções horizontais daqueles pontos conduziram-se as projeções horizontais dos raios luminosos que por eles passam e determinaram-se os pontos em que aquelas intersectam as diagonais dos 3/4 de paralelogramo, o que nos permitiu determinar mais **três pontos do segmento de elipse**.

Aos **sete pontos** determinados acrescem, ainda, as sombras dos pontos **T** e **T'** (T_{s_2} e T'_{s_2}), o que perfaz um total de **nove pontos** – estes nove pontos permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva. Note que a curva tem de ser **concordante** com a sombra da geratriz **[TV]** em T_{s_2} , tal como também tem de ser **concordante** com a sombra da geratriz **[T'V]** em T'_{s_2} .

Note ainda que existem dois pequenos troços da curva desenhada que não fazem parte da sombra do arco $\widehat{TT'}$. Esses troços são os dois troços que se situam para baixo de T_{s_2} (um deles) e para baixo de T'_{s_2} (o outro). A necessidade destes dois troços foi apenas o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através deles é possível ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivessem desenhado estes dois pequenos troços, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afetada de erros de execução.

O desenho da curva permitiu concluir o desenho do contorno da **sombra projetada** do cone nos planos de projeção, que é composta pelo segmento de elipse desenhado (e que tem uma parte invisível) e pela linha quebrada que tem vértices em T_{s_2} , T'_{s_2} , V_{s_1} e nos dois pontos de quebra atrás determinados. Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra com uma mancha clara e uniforme – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo cone) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y** \equiv **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o cone e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, das retas **i**, **t** e **t'** e, ainda, de todos os traçados referentes à construção do segmento de elipse), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o cone ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cone. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

223.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **O** e **L** (o foco luminoso), pelas respectivas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano v (o plano horizontal que contém a base inferior do cilindro) pelo seu traço frontal. O plano v é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal (f_v) passa por O_2 (a projeção frontal do ponto **O**). O plano v não tem traço horizontal, pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis.

Resolução:

Determinação das projeções do cilindro:

A base inferior do cilindro está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção. Assim, com o compasso, fazendo centro em O_1 (a projeção horizontal do ponto **O**) e com 2,5 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal da base do sólido. A projeção frontal da base é um segmento de reta sobre o traço frontal do plano v – corresponde à projeção frontal do seu diâmetro fronto-horizontal.

A altura de um cilindro é a distância entre os planos das duas bases. Assim, porque o cilindro tem 5 cm de altura e a sua base inferior está contida num plano horizontal (de nível) com 2 cm de cota, o plano v' (o plano que contém a base superior do sólido) tem 7 cm de cota ($2 + 5 = 7$). Nesse sentido, representou-se o plano v' (o plano horizontal que contém a outra base do sólido) pelo seu traço frontal. O plano v' não tem traço horizontal, pelo que o seu traço frontal se representou entre parêntesis.

Em seguida, determinaram-se as projeções do ponto **O'**, o centro da base superior do sólido. Trata-se de um **cilindro de revolução**, pelo que o seu eixo está contido numa reta ortogonal aos planos das bases – trata-se de uma reta vertical (projetante horizontal). Assim, os pontos **O** (o centro da base inferior) e o ponto **O'** (o centro da base superior) situam-se na mesma reta projetante horizontal, pelo que se tem imediatamente $O_1 \equiv O'_1$. Por outro lado, o ponto **O'** é um ponto do plano v' (que é um plano projetante frontal), pelo que O'_2 (a projeção frontal do ponto **O'**) se situa necessariamente sobre o traço frontal do plano v' ($f_{v'}$).

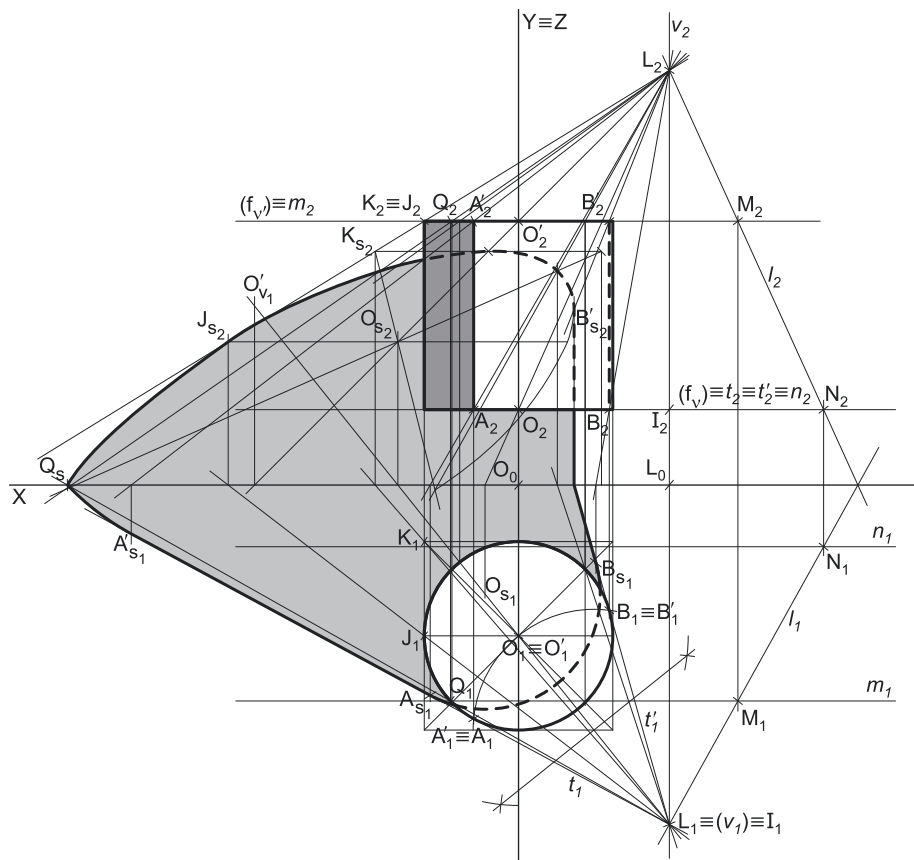
Tendo em conta que as geratrizes do cilindro são projetantes horizontais, a projeção horizontal da base superior do sólido está coincidente com a projeção horizontal da sua base inferior. A projeção frontal desta base é um segmento de reta sobre o traço frontal do plano v' ($f_{v'}$), pois o plano v' é um plano projetante frontal (corresponde à projeção frontal do seu diâmetro fronto-horizontal).

Por fim, desenharam-se a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido (que é a circunferência que delimita a projeção horizontal da base superior do sólido) e a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do cilindro (que é um retângulo cujos vértices são os pontos de maior de menor abscissa das projeções frontais das duas bases).

Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cilindro:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo foco luminoso, uma reta paralela às geratrizes do cilindro – a reta i ; **2.** determina-se o ponto de interseção da reta i com o plano da base (de referência) – o ponto **I**; **3.** pelo ponto **I** conduzem-se as retas tangentes à base (de referência) do cilindro; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes à base (de referência) do cilindro permitem-nos identificar, de forma imediata, as geratrizes que integram a linha separatriz luz/sombra.

1. Conduziu-se, pelo foco luminoso (o ponto **L**), uma reta paralela às arestas laterais do sólido – a reta i , que está definida por um ponto (o ponto **L**) e por uma direção (a direção das geratrizes do cilindro – é uma reta vertical).
2. Determinou-se o ponto de interseção a reta i com o plano da base (de referência) – o ponto **I**. Considerou-se que a base de referência é a base inferior do cilindro. O ponto **I** teve determinação imediata, a partir da sua projeção frontal, pois trata-se da interseção entre uma reta projetante horizontal (a reta i) com um plano projetante frontal (o plano v).
3. Pelo ponto **I** conduziram-se as retas tangentes à base (de referência) do cilindro – as retas t e t' . As retas t e t' são as retas de interseção dos dois **planos tangentes luz/sombra** com o plano v (o plano que contém a base inferior do cilindro).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Tenha em conta que a determinação das retas t e t' se processou com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência que delimita a projeção horizontal da base) que passam por um ponto exterior (o ponto I_1 , que é a projeção horizontal do ponto I). Esse processo fez-nos determinar, em primeiro lugar, os pontos de tangência – os pontos A_1 e B_1 (as projeções horizontais dos pontos A e B).

4. As retas t e t' são tangentes à base inferior do cilindro nos pontos A e B , respetivamente. Assim, as geratrizes $[AA']$ e $[BB']$ são, imediatamente, as **geratrizes separatrizes luz/sombra** (as geratrizes de contacto ou de tangência, segundo as quais os planos λ e λ' são tangentes à superfície lateral do sólido).

Nesse sentido, desenharam-se as duas projeções das geratrizes $[AA']$ e $[BB']$ – note que o ponto A' é o extremo da geratriz $[AA']$ que se situa na base superior do cilindro, tal como o ponto B' é o extremo da geratriz $[BB']$ que se situa na base superior do cilindro. As duas geratrizes são invisíveis em projeção horizontal (são projetantes horizontais) e a geratriz $[BB']$ é invisível em projeção frontal, por se situar na parte invisível da superfície lateral do cilindro.

As geratrizes $[AA']$ e $[BB']$ separam a parte da superfície lateral do cilindro que está **iluminada** da parte que está **em sombra** – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da direita), a parte **iluminada** da superfície lateral do sólido é a parte correspondente ao **arco menor \widehat{AB}** (da base inferior). A base superior do cilindro está também iluminada. A parte da superfície lateral do cilindro que corresponde ao **arco maior \widehat{AB}** da base inferior está **em sombra**, assim, como a base inferior do sólido. Desta forma, a linha separatriz luz/sombra é a linha mista fechada $[AB B'A']$, que integra as geratrizes $[AA']$ e $[BB']$, bem como o **arco menor \widehat{AB}** (da base inferior) e o **arco maior $\widehat{B'A'}$** (da base superior).

Em projeção frontal, a parte da superfície lateral do cilindro que está em sombra e que é visível é a parte compreendida entre a projeção frontal da geratriz $[AA']$ e a geratriz mais à esquerda do contorno aparente frontal do cilindro – assim, essa é a **sombra própria** a assinalar, **em projeção frontal**. Note que a base inferior (que está em sombra) é invisível em projeção frontal (por ser projetante frontal).

Em projeção horizontal, a superfície lateral do cilindro é invisível na sua totalidade (pois é uma superfície projetante horizontal), pelo que a parte dessa superfície que está em sombra é igualmente invisível na sua totalidade (a parte compreendida entre as projeções horizontais das geratrizes $[AA']$ e $[BB']$ e que corresponde ao **arco maior \widehat{AB}**). A base inferior está em sombra, mas é invisível em projeção horizontal. Tendo em conta que a base superior (que é visível em projeção horizontal) está iluminada, em projeção horizontal não há qualquer **sombra própria** a assinalar.

A **sombra própria** do cilindro foi assinalada com uma mancha clara e uniforme – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Determinação da sombra projetada do cilindro:

A **sombra projetada** do cilindro é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cilindro** nos planos de projeção.

Nesse sentido, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**. A_{s1} é a sombra real do ponto A (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que por ele passa. B_{s1} é a sombra real do ponto B (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que por ele passa. A'_{s1} é a sombra real do ponto A' (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que por ele passa. B'_{s2} é a sombra real do ponto B' (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que por ele passa. As sombras reais dos vértices da linha separatriz luz/sombra do cilindro situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do cone **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

B'_{s2} situa-se no **SPFS** e B_{s1} situa-se no **SPHA** – assim, existe um ponto de quebra entre B'_{s2} e B_{s1} (que se situam em Planos de Projeção distintos). O ponto de quebra determinou-se atendendo à situação de paralelismo entre a geratriz $[BB']$ e o Plano Frontal de Projeção. A geratriz $[BB']$ é vertical (é paralela ao Plano Frontal de Projeção), pelo que a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção da geratriz $[BB']$ é paralela à própria geratriz. Assim, por B'_{s2} conduziu-se uma paralela a $[B_2B'_2]$ (que é perpendicular ao eixo X), até ao eixo X , onde se situa o ponto de quebra da sombra da geratriz $[BB']$. Após a determinação do ponto de quebra, foi possível desenhar a sombra projetada da geratriz $[BB']$ – é a linha quebrada que tem um extremo em B'_{s2} , o outro extremo em B_{s1} e um vértice no ponto de quebra.

A_{s1} e A'_{s1} situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da geratriz $[AA']$ não admite ponto de quebra.

Após os procedimentos expostos, foi possível desenhar as sombras projetadas das duas geratrizes. No entanto, há que desenhar a sombra dos dois arcos que integram a **linha separatriz luz/sombra** – o **arco menor \widehat{AB}** (da base inferior) e o **arco maior $\widehat{B'A'}$** (da base superior).

Para desenhar a sombra do **arco menor \widehat{AB}** (que é um arco de circunferência), e tal como referido em situações semelhantes, o **primeiro passo** na determinação da sombra de um círculo (ou circunferência ou arco de circunferência) consiste em averiguar a eventual existência de pontos de quebra, o que se processa com o recurso ao **método do plano luz/sombra passante**.

Nesse sentido, definiu-se o plano luz/sombra passante na presente situação. O **plano luz/sombra passante** está definido por duas retas concorrentes – o eixo X e o raio luminoso l , passante (concorrente com o eixo X). O raio luminoso l está definido por dois pontos – o foco luminoso L e o seu ponto de concorrência com o eixo X (que não se identificou). Em seguida, determinou-se a reta de interseção do **plano luz/sombra passante** com o plano v (o plano que contém o **arco menor \widehat{AB}**) – a reta n .

Para definir a reta n são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O **plano luz/sombra passante** e o plano v são planos secantes, pelo que têm uma única «família» de retas em comum, sendo que a reta de interseção entre os dois planos é necessariamente uma reta dessa única «família» de retas que os dois planos têm em comum. O **plano luz/sombra passante** é um plano de rampa e o plano v é um plano horizontal (de nível), pelo que a única «família» de retas que os dois planos têm em comum é a «família» das retas fronto-horizontais – a reta n é, assim, uma reta fronto-horizonta. Já temos uma direção para definir a reta n . Falta-nos um ponto. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso l com plano v – o ponto N . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta n – a reta n está definida por um ponto (o ponto N) e por uma direção (é fronto-horizonta).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A reta n é exterior ao arco menor \widehat{AB} , pelo que a sombra do arco não apresenta pontos de quebra – uma vez que as sombras dos extremos do arco se situam no SPHA, a sombra do arco situa-se, na totalidade, no SPHA. Tendo em conta que o plano que contém o arco menor \widehat{AB} é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, a sombra projetada deste arco no SPHA é necessariamente um outro arco de circunferência, ampliado em relação ao arco \widehat{AB} . Começemos por determinar o centro desse outro arco, que é a sombra do ponto O no Plano Horizontal de Projeção – O_{s_1} é o traço horizontal do raio luminoso que por passa pelo ponto O e situa-se no SPHA, pelo que é a sombra real do ponto O . Determinemos o raio desse outro arco, recorrendo a um ponto do arco \widehat{AB} . Já temos dois pontos que são sombras de pontos do arco – as sombras dos seus extremos (A_{s_1} e B_{s_1}).

Assim, com o compasso, fazendo centro em O_{s_1} e com raio $\overline{O_{s_1}A_{s_1}} = \overline{O_{s_1}B_{s_1}}$, desenhou-se um arco de circunferência, que é a sombra do arco menor \widehat{AB} . Note que o arco $A_{s_1}B_{s_1}$ é concordante com $[A_{s_1}A'_{s_1}]$ (a sombra da geratriz $[AA']$) em A_{s_1} , tal como também é concordante com a sombra da geratriz $[BB']$ em B_{s_1} . Tenha ainda em conta que a parte oculta (a parte invisível) da sombra se identificou a traço interrompido.

Para desenhar a sombra do arco maior $\widehat{A'B'}$ (que é um arco de circunferência), e tal como referido em situações semelhantes, o primeiro passo na determinação da sombra de um círculo (ou circunferência ou arco de circunferência) consiste em averiguar a eventual existência de pontos de quebra, o que se processa com o recurso ao método do plano luz/sombra passante. O plano luz/sombra passante já havia sido definido previamente. Assim, determinou-se a reta de interseção do plano luz/sombra passante com o plano v' (o plano que contém o arco maior $\widehat{A'B'}$) – a reta m . De forma semelhante à reta n , também a reta m ficou definida por um ponto (o ponto M) e por uma direção (é fronto-horizontal). O ponto M é o ponto de interseção do raio luminoso l com o plano v' .

A reta m é secante ao arco maior $\widehat{A'B'}$, pelo que a sombra do arco admite a existência de pontos de quebra. A reta m corta o arco maior $\widehat{A'B'}$ no ponto Q – a sombra do ponto Q será, assim, o ponto de quebra da sombra do arco maior $\widehat{A'B'}$. O arco QA' produz sombra no SPHA e o arco QB' produz sombra no SPFS. A sombra que o arco QA' produz no SPHA é um arco de circunferência. A sombra que o arco QB' produz no SPHA é um segmento de uma oval. Em seguida, conduziu-se, pela projeção horizontal do ponto Q (Q_1) a projeção horizontal do raio luminoso que por ele passa e determinou-se a sombra do ponto Q (Q_s), no eixo X .

A sombra projetada do arco QA' no SPHA é necessariamente um outro arco de circunferência, ampliado em relação ao arco QA' . Começemos por determinar o centro desse outro arco, que é a sombra do ponto O' no Plano Horizontal de Projeção – O'_{v_1} é o traço horizontal do raio luminoso que por passa pelo ponto O' e situa-se no SPHP, pelo que é a sombra virtual do ponto O' . Determinemos o raio desse outro arco, recorrendo a um ponto do arco QA' . Já temos dois pontos que são sombras de pontos do arco – as sombras dos seus extremos (Q_s e A'_{s_1}). Assim, com o compasso, fazendo centro em O'_{v_1} e com raio $\overline{O'_{v_1}A'_{s_1}} = \overline{O'_{v_1}Q_s}$, desenhou-se um arco de circunferência, que é a sombra do arco QA' . Note que o arco $Q_sA'_{s_1}$ é concordante com $[A_{s_1}A'_{s_1}]$ (a sombra da geratriz $[AA']$) em A'_{s_1} .

A sombra projetada do arco QB' no SPFS é um segmento de uma oval, que é uma curva de erro. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento da oval requer um número significativo de pontos (dependendo, também, da dimensão da curva) e, além disso, um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício 211. No entanto, ao contrário da situação no exercício 211., nesta situação optou-se por se inscrever apenas a semicircunferência de menor afastamento (e de diâmetro fronto-horizontal) num «meio quadrado», de forma a ser possível a determinação de um conjunto suficiente de elementos que nos permitam desenhar a curva com alguma precisão.

Nesse sentido, começou-se por inscrever a semicircunferência num «meio quadrado» de lados paralelos ao eixo X , desenhando em seguida as partes correspondentes das diagonais e medianas do quadrado. A semicircunferência interseção aquelas linhas (as partes das diagonais e das medianas do quadrado que estão dentro do «meio quadrado») em cinco pontos, pontos esses cujas sombras serão, imediatamente, cinco pontos da oval. Em seguida, há que determinar a sombra do «meio quadrado» no Plano Frontal de Projeção, bem como das linhas atrás referidas.

A sombra do «meio quadrado» (que é um retângulo) no Plano Horizontal de Projeção é um trapézio. A sombra do «meio quadrado» determinou-se a partir das sombras dos seus dois vértices mais à esquerda – os pontos J (o extremo esquerdo do diâmetro fronto-horizontal da semicircunferência) e K (o vértice de menor afastamento e menor abcissa do polígono). J_{s_2} e K_{s_2} são as sombras reais dos vértices J e K – J_{s_2} e K_{s_2} situam-se no SPHP. O lado $[JK]$ é de topo e a sua sombra está contida no traço frontal do plano luz/sombra que contém o segmento $[JK]$ – trata-se de um plano de topo (projetante frontal). Assim, e como é possível observar, a sombra do lado $[JK]$ está sobre a projeção frontal dos raios luminosos que passam pelos dois pontos (que não se identificaram). De forma semelhante, a sombra do outro lado de topo do quadrado (que é paralelo a $[JK]$) está igualmente sobre a projeção frontal dos raios luminosos que passam pelos respetivos vértices. J é o vértice mais à esquerda de um lado fronto-horizontal do «meio quadrado» – a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção desse lado (o lado de maior afastamento do «meio quadrado») é necessariamente paralela a esse lado, pelo que a sombra projetada desse lado é fronto-horizontal e passa por J_{s_2} . Este raciocínio permitiu-nos desenhar a sombra projetada do lado de maior afastamento do «meio quadrado» e, dessa forma, determinar a sombra de mais um vértice do quadrado (o extremo direito do seu lado de maior afastamento), sobre a sombra do lado paralelo a $[JK]$. Note que J_{s_2} e o outro extremo do lado fronto-horizontal que passa por J_{s_2} serão, imediatamente, dois pontos do segmento da oval. Repetiu-se o processo para o lado de menor afastamento do «meio quadrado», que é igualmente fronto-horizontal – a sua sombra é também fronto-horizontal e passa por K_{s_2} , o que nos permitiu determinar a sombra do quarto vértice do «meio quadrado» e desenhar o trapézio que é a sombra do «meio quadrado» no Plano Frontal de Projeção.

Em seguida, determinou-se a sombra real do centro do círculo (O_{s_2}), que se situa no SPFS e é o traço frontal do raio luminoso que passa pelo ponto O – note que O_{s_2} se situa necessariamente sobre a sombra do lado de maior afastamento do «meio quadrado». Em seguida, desenhou-se a mediana do trapézio que passa por O_{s_2} (e que corresponde à sombra da mediana de topo do «meio quadrado»). Essa mediana está contida numa reta que passa por O_{s_2} e por L_2 – na prática, essa mediana situa-se sobre o traço frontal do plano luz/sombra que contém a mediana de topo do quadrado (que é um plano de topo que passa pelo ponto L e pelo ponto O). O ponto em que esta mediana se apoia no lado superior do trapézio é imediatamente um ponto do segmento da oval. Os dois vértices inferiores do trapézio são mais dois pontos do segmento da oval (como acima se referiu), pelo que já temos três pontos do segmento da oval. Estes três pontos são os pontos em que o segmento da oval será tangente aos lados correspondentes do trapézio (são as sombras dos pontos em que o círculo é tangente aos lados correspondentes do «meio quadrado»).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, desenharam-se os dois segmentos de reta que têm um extremo em O_{s_2} e o outro extremo nos vértices superiores do trapézio – esses segmentos de reta são as sombras das partes das diagonais do quadrado que se situam no «meio quadrado». Em seguida, transportaram-se os dois pontos em que a circunferência (que delimita o círculo) corta essas linhas do «meio quadrado» para as respectivas sombras no trapézio, com o recurso às projeções frontais dos raios luminosos que passam pelos pontos (e que correspondem aos planos luz/sombra por esses pontos). Este procedimento permitiu-nos determinar mais **dois pontos** do segmento da oval.

Aos **cinco pontos** determinados acresce o ponto de quebra (o ponto Q_s), bem como a sombra do ponto B' (B'_{ds_2}), o que perfaz um total de **dez pontos** do segmento da oval – estes pontos permitem-nos um desenho relativamente preciso da curva, que se efetuou, atendendo às situações de tangência da oval aos lados do trapézio – o segmento da oval é a sombra projetada da semicircunferência no Plano Frontal de Projeção. Note que o segmento da oval é necessariamente **concordante** com a sombra da geratriz (BB') em B'_{s_2} . Tenha em conta que o troço da oval que se situa entre J_{s_2} e Q_s foi desenhado sem o auxílio de quaisquer outros elementos.

Tenha ainda em conta que existe um troço da oval que se situa para baixo de B'_{s_2} (ate ao lado inferior do trapézio) que se desenhou a **leve** e que, na prática, não integra a sombra do arco QB' . A necessidade deste troço foi apenas o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através dele é possível ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivesse desenhado este pequeno troço, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afetada de erros de execução.

Após o desenho do contorno da sombra (no qual se atendeu às situações de invisibilidades da sombra), preencheu-se a área **visível** da sombra com uma mancha clara e uniforme – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo prisma) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

Traçado:

O eixo X , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo $Y \equiv Z$ representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o cilindro e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços frontais dos planos v e v' (os planos que contêm as bases do sólido), no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, das retas i , t e t' e, ainda, de todos os traçados referentes à construção do segmento de oval), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o cilindro ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cilindro. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objeto e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

224.

Dados:

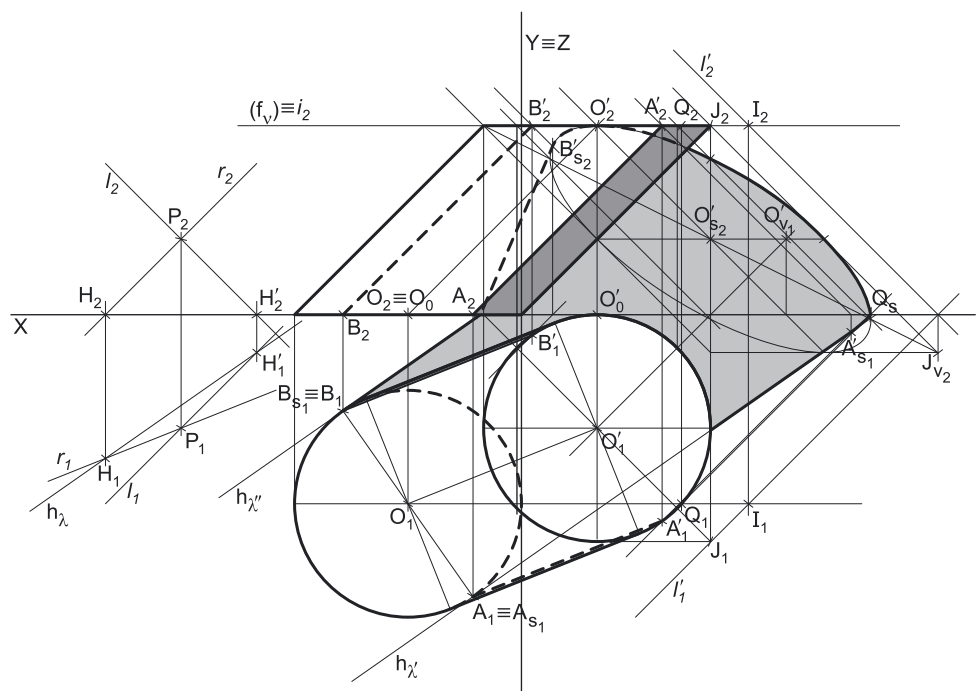
Em primeiro lugar, representaram-se os pontos O e O' , pelas respectivas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se, também, o plano v (o plano que contém a base superior), pelo seu traço frontal. O plano v é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal (f_v) passa pela projeção frontal do ponto O' (O'_2). O plano v não tem traço horizontal, pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis. A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo X , em ambas as projeções.

Resolução:

Determinação das projeções do cilindro:

A base superior do cilindro é tangente ao Plano Frontal de Projeção e o seu centro tem 3 m de afastamento, pelo que a base superior do sólido tem 3 cm de raio. Essa base está contida num plano horizontal (de nível), que é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que a base se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção. Assim, com o compasso, fazendo centro em O'_1

(a projeção horizontal do ponto O') e com 3 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal da base superior do cilindro (que é tangente ao eixo X). A projeção frontal da base é um segmento de reta sobre o traço frontal do plano v (f_v), pois o plano v é um plano projetante frontal – corresponde à projeção frontal do seu diâmetro fronto-horizontal.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A base inferior do cilindro está contida no Plano Horizontal de Projeção, pelo que está em verdadeira grandeza em projeção horizontal. Assim, com o compasso, fazendo centro em O_1 (a projeção horizontal do ponto O) e com 3 cm de raio (as duas bases têm o mesmo raio), desenharam-se a projeção horizontal da base do sólido. A projeção frontal da base é um segmento de reta sobre o eixo X (a base tem cota nula) – corresponde à projeção frontal do seu diâmetro fronto-horizontal.

Em seguida, desenharam-se a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido (que é um paralelogramo cujos vértices são os pontos de maior e de menor abscissa das projeções frontais das duas bases) e a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do cilindro. O desenho da **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido processou-se com o recurso à construção necessária para determinar as retas tangentes a uma circunferência (as projeções horizontais das duas bases) que são paralelas a uma reta (a projeção horizontal do eixo do cilindro – o segmento $[O_1O'_1]$). O arco mais à direita da circunferência que delimita a base inferior (e que está compreendido entre as duas geratrizes do contorno aparente horizontal) é **invisível** em projeção horizontal, o que se assinalou devidamente no desenho.

Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cilindro:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** por um ponto P qualquer, exterior ao sólido, conduzir duas retas – uma reta paralela às geratrizes do cilindro e uma outra reta paralela à direção luminosa; **2.** determinar a reta i , a reta de interseção do plano definido pelas duas retas com o plano da base (de referência) do cilindro; **3.** conduzir as retas tangentes à base (de referência) do cilindro que são paralelas à reta i ; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes à base (de referência) do cilindro permitem-nos determinar, de forma imediata, as geratrizes que integram a linha separatriz luz/sombra.

1. Por um ponto P qualquer, exterior ao sólido, conduziram-se duas retas – a reta r , paralela às geratrizes do cilindro, e a reta l (um raio luminoso). Estas duas retas, porque são concorrentes, definem um plano (o plano λ) – esse plano tem a orientação dos planos tangentes luz/sombra.
2. Determinou-se a reta h_λ , que é a reta de interseção do plano definido pelas retas r e l (o plano λ) com o plano da base (de referência) do cilindro (considerou-se que a base de referência do cilindro é a sua base inferior, que está contida no Plano Horizontal de Projeção). A reta h_λ está definida por dois pontos – o ponto H (o traço horizontal da reta r) e o ponto H' (o traço horizontal da reta l).
3. Conduziram-se as retas tangentes à base (de referência) do cilindro que são paralelas à reta h_λ – as retas $h_{\lambda'}$ e $h_{\lambda''}$. As retas $h_{\lambda'}$ e $h_{\lambda''}$ são, imediatamente, os traços horizontais dos dois **planos tangentes luz/sombra**, pois o plano que contém a base inferior do cilindro é o Plano Horizontal de Projeção.

Tenha em conta que a determinação das retas $h_{\lambda'}$ e $h_{\lambda''}$ se processou com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência que delimita a projeção horizontal da base) que são paralelas a uma reta dada (que é h_λ). Esse processo fez-nos determinar, em primeiro lugar, os pontos de tangência – os pontos A_1 e B_1 (as projeções horizontais dos pontos A e B).

4. As retas $h_{\lambda'}$ e $h_{\lambda''}$ são tangentes à base (de referência) do cilindro nos pontos A e B , respetivamente. Assim, as geratrizes $[AA']$ e $[BB']$ são, imediatamente, as **geratrizes separatrizes luz/sombra** (as geratrizes de contacto ou de tangência, segundo as quais os planos λ e λ' são tangentes à superfície lateral do sólido).

Nesse sentido, desenharam-se as duas projeções das geratrizes $[AA']$ e $[BB']$ – note que o ponto A' é o extremo da geratriz $[AA']$ que se situa na base superior do cilindro, tal como o ponto B' é o extremo da geratriz $[BB']$ que se situa na base superior do cilindro. A geratriz $[AA']$ é invisível em projeção horizontal (por se situar na parte invisível, em projeção frontal, da superfície lateral do cilindro) e a geratriz $[BB']$ é invisível em projeção frontal (por se situar na parte invisível, em projeção frontal, da superfície lateral do cilindro).

As geratrizes $[AA']$ e $[BB']$ separam a parte da superfície lateral do cilindro que está **iluminada** da parte que está **em sombra** – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), a parte **iluminada** da superfície lateral do sólido é a parte correspondente à semicircunferência \widehat{AB} de maior abscissa. A base superior do cilindro está também iluminada. A parte da superfície lateral do cilindro que corresponde à semicircunferência $\widehat{A'B'}$ de menor abscissa está **em sombra**, assim, como a base inferior do sólido. Desta forma, a linha separatriz luz/sombra é a linha mista fechada $[\widehat{AB} B' A']$, que integra as geratrizes $[AA']$ e $[BB']$, bem como a **semicircunferência \widehat{AB} de maior abscissa** (da base inferior) e a **semicircunferência $\widehat{A'B'}$ de menor abscissa** (da base superior).

Em projeção frontal, a parte da superfície lateral do cilindro que está em sombra e que é visível é a parte compreendida entre a projeção frontal da geratriz $[AA']$ e a geratriz mais à direita do contorno aparente frontal do cilindro – assim, essa é a **sombra própria** a assinalar, **em projeção frontal**. Note que a base inferior (que está em sombra) é invisível em projeção frontal (por ser projetante frontal).

Em projeção horizontal, a parte da superfície lateral do cilindro que está em sombra e que é visível é a parte compreendida entre a projeção horizontal da geratriz $[BB']$ e a geratriz de menor afastamento do contorno aparente horizontal do cilindro – assim, essa é a **sombra própria** a assinalar, **em projeção horizontal**. Note que a base inferior (que está em sombra) é invisível em projeção horizontal.

A **sombra própria** do cilindro foi assinalada com uma mancha clara e uniforme – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Determinação da sombra projetada do cilindro:

A **sombra projetada** do cilindro é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cilindro** nos planos de projeção.

Nesse sentido, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**. Os pontos A e B situam-se no Plano Horizontal de Projeção, pelo que as suas sombras estão coincidentes com os próprios pontos – tem-se imediatamente $A_1 \equiv A_{s_1}$ e $B_1 \equiv B_{s_1}$. A'_{s_1} é a sombra real do ponto A' (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que por ele passa. B'_{s_2} é a sombra real do ponto B' (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que por ele passa. As sombras reais dos vértices da linha separatriz luz/sombra do cilindro situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do cilindro **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Os pontos **A** e **B** situam-se no **SPHA** (tal como as suas sombras – A_{s_1} e B_{s_1}) e tal como a própria base inferior do cilindro se situa no **SPHA** – assim, a sombra da semicircunferência \widehat{AB} de maior abcissa (da base inferior) está coincidente com o próprio arco \widehat{AB} . A_{s_1} e A'_{s_1} situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da geratriz $[AA']$ não admite ponto de quebra.

B'_{s_2} situa-se no **SPFS** e B_{s_1} situa-se no **SPHA** – assim, existe um ponto de quebra entre B'_{s_2} e B_{s_1} (que se situam em Planos de Projeção distintos).

O ponto de quebra determinou-se atendendo ao facto de que a sombra projetada de um sólido nos planos de projeção está limitada pelos traços dos **planos tangentes luz/sombra** nesses planos de projeção. Assim, a sombra projetada da geratriz $[BB']$ no Plano Horizontal de Projeção está necessariamente sobre o traço horizontal do plano λ'' ($h_{\lambda''}$), que é o **plano tangente luz/sombra** que é tangente à superfície do cilindro ao longo da geratriz $[BB']$. O ponto de concorrência de $h_{\lambda''}$ com o eixo **X** é o ponto de quebra da sombra da geratriz $[BB']$. Assim, a sombra projetada da geratriz $[BB']$ é a linha quebrada que tem um extremo em B'_{s_2} , o outro extremo em B_{s_1} e um vértice no ponto de quebra.

Para concluir o desenho do contorno da sombra projetada do cilindro nos planos de projeção, falta-nos determinar a sombra projetada da semicircunferência $\widehat{A'B'}$ de menor abcissa (da base superior) nos planos de projeção. Tal como referido em situações semelhantes, o **primeiro passo** na determinação da sombra de um círculo (ou circunferência ou arco de circunferência) consiste em averiguar a eventual existência de pontos de quebra, o que se processa com o recurso ao **método do plano luz/sombra passante**.

Nesse sentido, definiu-se o plano luz/sombra passante na presente situação. O **plano luz/sombra passante** está definido por duas retas concorrentes – o eixo **X** e o raio luminoso **l**, passante (concorrente com o eixo **X**). O raio luminoso **l** está definido por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo **X**, que não se identificou) e por uma direção (a direção convencional da luz). Em seguida, determinou-se a reta de interseção do **plano luz/sombra passante** com o plano v' (o plano que contém a semicircunferência $\widehat{A'B'}$) – a reta **i**.

Para definir a reta **i** são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O **plano luz/sombra passante** e o plano v' são planos secantes, pelo que têm uma única «família» de retas em comum, sendo que a reta de interseção entre os dois planos é necessariamente uma reta dessa única «família» de retas que os dois planos têm em comum. O **plano luz/sombra passante** é um plano de rampa e o plano v' é um plano horizontal (de nível), pelo que a única «família» de retas que os dois planos têm em comum é a «família» das retas fronto-horizontais – a reta **i** é, assim, uma reta fronto-horizantal. Já temos uma direção para definir a reta **i**. Falta-nos um ponto. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano v' – o ponto **I**. Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta **i** – a reta **i** está definida por um ponto (o ponto **I**) e por uma direção (é fronto-horizantal).

A reta **i** é secante à semicircunferência $\widehat{A'B'}$ de maior abcissa, pelo que a sombra da curva admite a existência de pontos de quebra. A reta **i** corta a semicircunferência $\widehat{A'B'}$ no ponto **Q** – a sombra do ponto **Q** será, assim, o ponto de quebra da sombra da semicircunferência $\widehat{A'B'}$. O arco $\widehat{A'Q}$ produz sombra no **SPHA** e o arco $\widehat{B'Q}$ produz sombra no **SPFS**. A sombra que o arco $\widehat{A'Q}$ produz no **SPHA** é um arco de circunferência. A sombra que o arco $\widehat{B'Q}$ produz no **SPHA** é um segmento de elipse. Em seguida, conduziu-se, pela projeção horizontal do ponto **Q** (Q_1) a projeção horizontal do raio luminoso que por ele passa e determinou-se a sombra do ponto **Q** (Q_s), no eixo **X**.

A sombra projetada do arco $\widehat{A'Q}$ no **SPHA** é necessariamente um arco de circunferência, geometricamente igual ao arco $\widehat{QA'}$. Começemos por determinar o centro desse outro arco, que é a sombra do ponto **O'** no Plano Horizontal de Projeção – O'_{v_1} é o traço horizontal do raio luminoso que por passa pelo ponto **O'** e situa-se no **SPHP**, pelo que é a sombra virtual do ponto **O'**. Com o compasso, fazendo centro em O'_{v_1} e com 3 cm de raio, desenhou-se o arco de circunferência que começa em A'_{s_1} e termina em Q_s – note que se tem necessariamente $\overline{O'_{v_1}A'_{s_1}} = \overline{O'_{v_1}Q_s} = 3$ cm. Note ainda que o arco $\widehat{Q_sA'_{s_1}}$ é **concordante** com $[A_{s_1}A'_{s_1}]$ (a sombra da geratriz $[AA']$) em A'_{s_1} .

A sombra projetada do arco $\widehat{B'Q}$ no **SPFS** é um segmento de elipse, que é uma curva de erro. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento de elipse requer um número significativo de pontos (dependendo, também, da dimensão da curva) e, além disso, um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício 209.

Nesse sentido, começou-se por inscrever o arco $\widehat{B'Q}$ na parte correspondente de um quadrado de **lados paralelos ao eixo X**, desenhando em seguida as respetivas diagonais e medianas – a parte do quadrado que tem interesse para a determinação da sombra do arco $\widehat{B'Q}$ corresponde a 3/4 do quadrado total (os 3/4 que a figura apresenta e que englobam o arco $\widehat{B'Q}$ na sua totalidade). Os pontos em que as medianas se apoiam nos lados do quadrado permitem-nos determinar **quatro pontos do segmento de elipse**. Os pontos em que as diagonais do quadrado cortam o arco $\widehat{B'Q}$ permitem-nos determinar mais **três pontos do segmento de elipse**. Em seguida, há que determinar a sombra do quadrado no Plano Frontal de Projeção, bem como das suas medianas e diagonais.

Em primeiro lugar, determinou-se a sombra real do centro do círculo (o ponto **O'**) – O'_{s_2} é a sombra real do ponto **O'** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que por ele passa. A sombra dos 3/4 do quadrado no Plano Frontal de Projeção corresponde a 3/4 de um paralelogramo – o **segmento de elipse** estará inscrita nesses 3/4 de paralelogramo.

Note que o lado de menor afastamento do quadrado tem afastamento nulo, pelo que a sua sombra está coincidente com esse mesmo lado, pelo que já temos, também, as sombras de dois vértices do polígono – as sombras dos seus vértices de menor afastamento. Falta-nos determinar a sombra do seu lado de maior afastamento, o que se processa a partir da sombra do seu vértice de maior afastamento e mais à direita – o ponto **J**.

J_{v_2} é a sombra projetada do ponto **J** no Plano Frontal de Projeção – situa-se no **SPFS** e é a sombra virtual do ponto **J** (é o traço frontal do raio luminoso que por ele passa). O ponto **J** é um extremo de um lado fronto-horizantal da figura, pelo que, por J_{v_2} se conduziu uma fronto-horizantal, que nos permitiu determinar a sombra de mais um lado da figura. A sombra do restante da figura (dos 3/4 do quadrado) processou-se com o recurso às sombras das suas medianas e das partes correspondentes das suas diagonais, que passam todas em O'_{s_2} (a sombra real do ponto **O'**).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Note que as medianas do paralelogramo são, imediatamente, as sombras das medianas do quadrado e permitem-nos determinar, imediatamente, **quatro pontos do segmento de elipse** – os pontos em que as medianas do paralelogramo se apoiam nos lados da figura. Estes pontos são, ainda, os pontos em que o segmento de elipse será tangente aos lados correspondentes do paralelogramo envolvente.

Os pontos em que o arco da base superior corta as diagonais dos 3/4 do quadrado situar-se-ão necessariamente sobre as diagonais do paralelogramo (as sombras das diagonais do quadrado). Assim, pelas projeções frontais daqueles pontos conduziram-se as projeções frontais dos raios luminosos que por eles passam e determinaram-se os pontos em que aquelas intersejam as diagonais dos 3/4 de paralelogramo, o que nos permitiu determinar mais **três pontos do segmento de elipse**.

Aos **sete pontos** determinados acrescem, ainda, a sombra do ponto **B'** (B'_{s_2}) e o ponto de quebra (Q_s), o que perfaz um total de **nove pontos** – estes nove pontos permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva. Note que a curva tem de ser **concordante** com a sombra da geratriz $[BB']$ em B'_{s_2} .

Note ainda que existem dois pequenos troços da curva desenhada que não fazem parte da sombra do arco $\widehat{B'Q}$. Esses troços são os dois troços que se situam para baixo de B'_{s_2} (um deles) e para baixo de Q_s (o outro) – este último é uma **sombra virtual**, pois situa-se no **SPFI**. A necessidade destes dois troços foi apenas o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através deles é possível ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivessem desenhado estes dois pequenos troços, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afetada de erros de execução.

O desenho da curva permitiu concluir o desenho do contorno da **sombra projetada** do cilindro nos planos de projeção, que é composta pelo segmento de elipse desenhado (e que tem uma parte invisível) e pelas sombras das duas geratrizes (já explicadas mais atrás) e, ainda, pela sombra da semicircunferência \widehat{AB} de maior abscissa (da base inferior) e que também já foi devidamente referida mais atrás, neste relatório.

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra com uma mancha clara e uniforme – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo cilindro) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O eixo **Y** \equiv **Z** representou-se a **leve**, pois é meramente auxiliar (é uma linha de referência). O pedido representou-se a **forte** – o cilindro e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). O traço frontal do plano v (o plano que contém a base superior do sólido), no contexto do exercício é meramente auxiliar, pelo que se representou a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à determinação da orientação dos planos tangentes, das retas h_{λ} , $h_{\lambda'}$, l' e i e, ainda, de todos os traçados referentes à construção do segmento de elipse), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o cilindro ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cilindro. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

225.

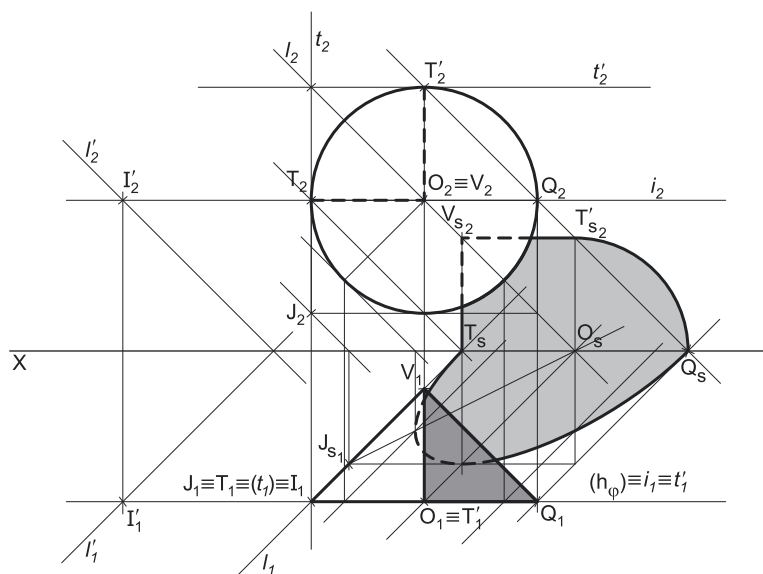
Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano φ (o plano frontal que contém a base do cone) pelo seu traço horizontal. O plano φ é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal (h_{φ}) passa por **O** (a projeção horizontal do ponto **O**). O plano φ não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis. A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

Resolução:

Determinação das projeções do cone:

A base do cone está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção. Assim, com o compasso, fazendo centro em O_2 (a projeção frontal do ponto **O**) e com 3 cm de raio, desenhou-se a projeção frontal da base do sólido. A projeção horizontal da base é um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano φ – corresponde à projeção horizontal do seu diâmetro fronto-horizontal.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Trata-se de um **cone de revolução**, pelo que o seu eixo está contido numa reta ortogonal ao plano da base (que é um plano frontal) – o eixo do cone está, assim, contido numa reta de topo (uma reta projetante frontal). Dessa forma, os pontos **O** e **V** (o vértice do cone) situam-se na mesma projetante frontal, pelo que se tem imediatamente $V_2 \equiv O_2$. Por outro lado, uma vez que o vértice do cone é invisível em projeção frontal (como o enunciado refere expressamente), sabe-se que o vértice **V**, do cone, tem afastamento inferior à base.

As geratrizes do cone fazem ângulos de 45° com o plano da base. No entanto, a única situação em que esse ângulo se projeta em verdadeira grandeza num dos planos de projeção, é a situação em que as geratrizes são horizontais (de nível) – trata-se, portanto, das geratrizes do contorno aparente horizontal. Considerou-se a geratriz mais à esquerda do contorno aparente horizontal – mediu-se o ângulo de 45° com h_ϕ (de abertura para a direita), a partir do ponto mais à esquerda da projeção horizontal da base, e determinou-se **V₁** (a projeção horizontal do ponto **V**), sobre a linha de chamada de **V₂**.

Em seguida, desenharam-se a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido (que é um triângulo com um vértice em **V₁** e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor abscissa da projeção horizontal da base) e a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do cone (que é a própria circunferência que delimita a base).

Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cone:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice do cone, um raio luminoso **l**; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano da base – o ponto **I**; **3.** pelo ponto **I** conduzem-se as retas tangentes à base do cone; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes à base do cone permitem-nos identificar, de forma imediata, as geratrizes que integram a linha separatriz luz/sombra (as **geratrizes separatrizes luz/sombra**).

1. Conduziu-se, pelo vértice da pirâmide (o ponto **V**), um raio luminoso **l** – o raio luminoso **l** está definido por um ponto (o ponto **V**) e por uma direção (a direção luminosa convencional).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano da base – o ponto **I**. O ponto **I** teve determinação imediata, a partir da sua projeção horizontal, pois trata-se da interseção entre uma reta não projetante (o raio luminoso **l**) com um plano projetante horizontal (o plano ϕ).
3. Pelo ponto **I** conduziram-se as retas tangentes à base do cone – as retas **t** e **t'**. As retas **t** e **t'** são as retas de interseção dos dois **planos tangentes luz/sombra** com o plano ϕ (o plano que contém a base do cone).

Tenha em conta que a determinação das retas **t** e **t'** se processou com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência que delimita a projeção horizontal da base) que passam por um ponto exterior (o ponto **I₂**, que é a projeção frontal do ponto **I**). Esse processo fez-nos determinar, em primeiro lugar, os pontos de tangência – os pontos **T₂** e **T'₂** (as projeções frontais dos pontos **T** e **T'**). Sublinha-se que, nesta situação particular, a reta **t** é uma reta vertical e a reta **t'** é uma reta fronto-horizontal.

4. As retas **t** e **t'** são tangentes à base do cone nos pontos **T** e **T'**, respetivamente. Assim, as geratrizes **[TV]** e **[T'V]** são, imediatamente, as **geratrizes separatrizes luz/sombra** (as geratrizes de contacto ou de tangência, segundo as quais os planos λ e λ' são tangentes à superfície lateral do sólido).

Nesse sentido, desenharam-se as duas projeções das geratrizes **[TV]** e **[T'V]**. As duas geratrizes são invisíveis em projeção frontal (a superfície lateral do cone é invisível, na sua totalidade, em projeção frontal) e a geratriz **[TV]** é, na prática, a geratriz mais à esquerda do contorno aparente horizontal.

As geratrizes **[TV]** e **[T'V]** separam a parte da superfície lateral do cone que está **iluminada** da parte que está **em sombra** – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), a parte **iluminada** da superfície lateral do sólido é a parte correspondente ao **arco menor TT'** (e que é, precisamente, **1/4 da superfície lateral** do cone). A base do cone está também **iluminada**. A parte da superfície lateral do cone que corresponde ao **arco maior TT'** está **em sombra** (e que é, precisamente, **3/4 da superfície lateral** do cone). Assim, a linha separatriz luz/sombra é a linha mista fechada **[TVT'T']**, que integra as geratrizes **[TV]** e **[T'V]**, bem como o **arco maior TT'**.

Em projeção horizontal, a parte da superfície lateral do cone que está em sombra e que é visível é a parte compreendida entre a projeção horizontal da geratriz **[T'V]** e a geratriz mais à direita do contorno aparente horizontal do cone – assim, essa é a **sombra própria** a assinalar, **em projeção horizontal**.

Em projeção frontal, a superfície lateral do cone é invisível na sua totalidade, pelo que a parte dessa superfície que está em sombra é igualmente invisível na sua totalidade (a parte compreendida entre as projeções frontais das geratrizes **[TV]** e **[T'V]** e que corresponde ao **arco maior TT'**). Tendo em conta que a base (que é visível em projeção frontal) está iluminada, em projeção frontal não há qualquer **sombra própria** a assinalar.

A **sombra própria** do cone foi assinalada com uma mancha clara e uniforme – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Determinação da sombra projetada do cone:

A **sombra projetada** do cone é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cone** nos planos de projeção.

Nesse sentido, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**. **T_s** é a sombra do ponto **T** – situa-se no eixo **X** e é simultaneamente a sombra real e a sombra virtual do ponto **T** (é o traço frontal e também o traço horizontal do raio luminoso que por ele passa). **T'_{s2}** é a sombra real do ponto **T'** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que por ele passa. **V_{s2}** é a sombra real do ponto **V** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que por ele passa. As sombras reais dos extremos das geratrizes separatrizes luz/sombra do cone situam-se no mesmo plano de projeção, pelo que as sombras projetadas daquelas geratrizes não admitem pontos de quebra.

V_{s2} e **T_s** situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da geratriz **[TV]** não admite ponto de quebra – o segmento **[V_{s2}T_s]** é a sombra projetada da geratriz **[TV]** e situa-se, na totalidade, no **SPFS**. **V_{s2}** e **T'_{s2}** situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da geratriz **[T'V]** não admite ponto de quebra – o segmento **[V_{s2}T'_{s2}]** é a sombra projetada da geratriz **[T'V]** e situa-se, na totalidade, no **SPFS**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, há que desenhar a sombra do arco maior $\overline{TT'}$, que é um arco de circunferência. Como em situações semelhantes, o **primeiro passo** na determinação da sombra de um círculo (ou circunferência ou arco de circunferência) consiste em averiguar a eventual existência de pontos de quebra, o que se processa com o recurso ao **método do plano luz/sombra passante**.

Nesse sentido, definiu-se o plano luz/sombra passante na presente situação. O **plano luz/sombra passante** está definido por duas retas concorrentes – o eixo X e o raio luminoso l' , passante (concorrente com o eixo X). O raio luminoso l' está definido por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo X , que não se identificou) e por uma direção (a direção luminosa convencional). Em seguida, determinou-se a reta de interseção do **plano luz/sombra passante** com o plano φ (o plano que contém o arco) – a reta i .

Para definir a reta i são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O **plano luz/sombra passante** e o plano φ são planos secantes, pelo que têm uma única «família» de retas em comum, sendo que a reta de interseção entre os dois planos é necessariamente uma reta dessa única «família» de retas que os dois planos têm em comum. O **plano luz/sombra passante** é um plano de rampa e o plano φ é um plano frontal (de frente), pelo que a única «família» de retas que os dois planos têm em comum é a «família» das retas fronto-horizontais – a reta i é, assim, uma reta fronto-horizonta. Já temos uma direção para definir a reta i . Falta-nos um ponto. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso l' com plano φ – o ponto I' . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta i – a reta i está definida por um ponto (o ponto I') e por uma direção (é fronto-horizonta).

A reta i é secante ao **arco maior** $\overline{TT'}$, pelo que a sombra da curva admite a existência de pontos de quebra. A reta i corta o **arco maior** $\overline{TT'}$, no ponto Q – a sombra do ponto Q será, assim, o ponto de quebra da sombra do **arco maior** $\overline{TT'}$. O arco $\overline{T'Q}$ produz sombra no **SPFS** e o arco \overline{TQ} (uma semicircunferência) produz sombra no **SPHA**. A sombra que o arco $\overline{T'Q}$ produz no **SPFS** é um arco de circunferência. A sombra que a semicircunferência \overline{TQ} produz no **SPHA** é um segmento de elipse. Em seguida, conduziu-se, pela projeção frontal do ponto Q (Q_2) a projeção frontal do raio luminoso que por ele passa e determinou-se a sombra do ponto Q (Q_s), no eixo X . Tenha em conta que não se determinou a projeção horizontal do ponto Q , por não ser necessária.

A sombra projetada do arco $\overline{T'Q}$ no **SPFS** é necessariamente um arco de circunferência, geometricamente igual ao arco $\overline{T'Q}$. Começemos por determinar o centro desse outro arco, que é a sombra do ponto O no Plano Frontal de Projeção – O_s é a sombra do ponto O – situa-se no eixo X e é simultaneamente a sombra real e a sombra virtual do ponto O (é o traço frontal e também o traço horizontal do raio luminoso que por ele passa). Com o compasso, fazendo centro em O_s e com 3 cm de raio, desenhou-se o arco de circunferência que começa em T'_s e termina em Q_s – note que se tem necessariamente $O_sT'_s = O_sQ_s = 3$ cm. Note ainda que o arco $Q_sT'_s$ é **concordante** com $[V_sT'_s]$ (a sombra da geratriz $[T'V]$) em T'_s .

A sombra projetada da semicircunferência \overline{TQ} no **SPHA** é um segmento de elipse, que é uma curva de erro. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento de elipse requer um número significativo de pontos (dependendo, também, da dimensão da curva) e, além disso, um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício 209.

Nesse sentido, começou-se por inscrever a semicircunferência \overline{TQ} na parte correspondente de um quadrado de **lados paralelos ao eixo X** (um «meio quadrado»), desenhando em seguida as partes correspondentes das diagonais e medianas do quadrado. Os pontos em que as medianas se apoiam nos lados do quadrado permitem-nos determinar **três pontos** do segmento de elipse (dois desses pontos são, já, T_s e Q_s). Os pontos em que as partes correspondentes das diagonais do quadrado cortam a semicircunferência \overline{TQ} permitem-nos determinar mais **dois pontos** do segmento de elipse. Em seguida, há que determinar a sombra do «meio quadrado» no Plano Horizontal de Projeção, bem como das partes correspondentes das suas medianas e diagonais.

O segmento $[T_sQ_s]$ é, imediatamente, a sombra do lado superior desse «meio quadrado». As sombras dos lados verticais desse «meio quadrado» estão sobre as projeções horizontais dos raios luminosos que passam pelos seus extremos. A sombra do seu lado inferior determinou-se a partir da sombra do ponto J – J é o vértice mais à esquerda do lado inferior do «meio quadrado». J_s é a sombra projetada do ponto J no Plano Horizontal de Projeção – situa-se no **SPHA** e é a sombra real do ponto J (é o traço horizontal do raio luminoso que por ele passa). O ponto J é um extremo de um lado fronto-horizonta da figura, pelo que, por J_s , se conduziu uma fronto-horizonta, que nos permitiu determinar a sombra de mais um lado da figura.

Em seguida, conduziram-se, por O_s , as sombras das «meias diagonais», bem como da «meia mediana» vertical. Em seguida, transportaram-se os pontos em que a semicircunferência \overline{TQ} corta as diagonais do «meio quadrado» para as respetivas linhas do paralelogramo já desenhado, a partir das projeções horizontais daqueles pontos. Este conjunto de traçados permitiu-nos determinar um total de **cinco pontos** – estes cinco pontos permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva.

O desenho da curva permitiu concluir o desenho do contorno da **sombra projetada** do cone nos planos de projeção, que é composta pelo segmento de elipse desenhado (e que tem uma parte invisível) e pelas sombras das duas geratrizes (já explicadas mais atrás) e, ainda, pela sombra do arco $\overline{T'Q}$ e que também já foi devidamente referida mais atrás, neste relatório.

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra com uma mancha clara e uniforme – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo cone) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

Traçado:

O eixo X , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o cone e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, das retas i , t e t' e, ainda, de todos os traçados referentes à construção do segmento de elipse), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o cone ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cone. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

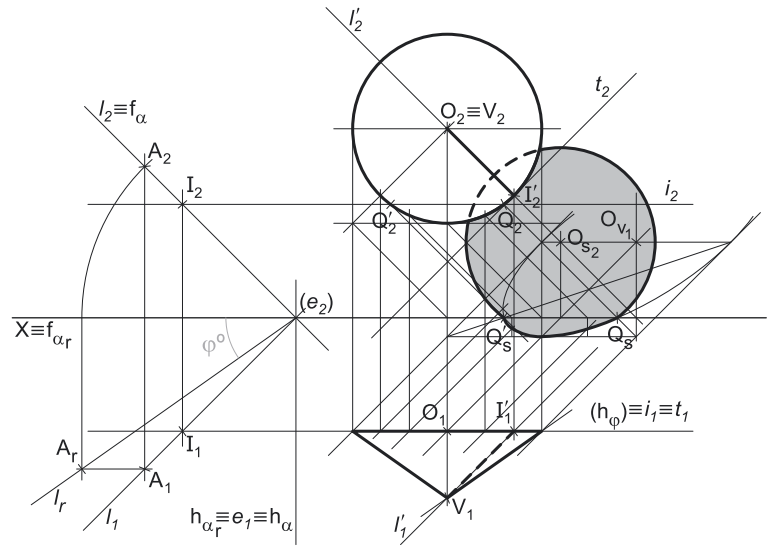
226.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano φ (o plano frontal que contém a base do cone) pelo seu traço horizontal. O plano φ é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal (h_φ) passa por **O** (a projeção horizontal do ponto **O**). O plano φ não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis. A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

Resolução:*Determinação das projeções do cone:*

A base do cone está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção. Assim, com o compasso, fazendo centro em **O**₂ (a projeção frontal do ponto **O**) e com 2,5 cm de raio, desenhou-se a projeção frontal da base do sólido. A projeção horizontal da base é um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano φ – corresponde à projeção horizontal do seu diâmetro fronto-horizontal.



Trata-se de um **cone de revolução**, pelo que o seu eixo está contido numa reta ortogonal ao plano da base (que é um plano frontal) – o eixo do cone está, assim, contido numa reta de topo (uma reta projetante frontal). Dessa forma, os pontos **O** e **V** (o vértice do cone) situam-se na mesma projetante frontal, pelo que se tem imediatamente **V**₂ \equiv **O**₂. Por outro lado, uma vez que a base do cone é invisível em projeção frontal (como o enunciado refere expressamente), sabe-se que o vértice **V**, do cone, tem afastamento superior à base.

Não é dada a altura do cone mas sim o ângulo que as geratrizes fazem com o plano da base (eu é um plano frontal) – esse ângulo tem φ° de amplitude. Assim, é necessário, antes de mais, determinar graficamente a verdadeira grandeza dessa amplitude. Para tal, conduziu-se um raio luminoso **l**, qualquer, passante, e determinou-se o ângulo que o raio luminoso **l** faz com o Plano Frontal de Projeção. Esse ângulo está contido no plano que contém o raio luminoso **l** e é ortogonal ao Plano Frontal de Projeção – esse ângulo é, na prática, o ângulo entre a reta dada e a reta de interseção entre os dois planos.

Assim, a determinação do ângulo entre a reta **l** e o Plano Frontal de Projeção passa necessariamente pela aplicação do **método geral para a determinação do ângulo entre uma reta e um plano**, que se executa sequencialmente em três etapas, a saber: **1.** conduz-se, pela reta, um plano ortogonal ao plano dado; **2.** determina-se a reta de interseção entre os dois planos; **3.** o ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado.

Etapa 1. Pela reta **l** conduziu-se um plano ortogonal ao Plano Frontal de Projeção – o plano α , que é um plano de topo (e o plano projetante frontal do raio luminoso **l**).

Etapa 2. Determina-se a reta de interseção entre os dois planos. A reta de interseção entre os dois planos (o plano α e o Plano Frontal de Projeção) é o próprio traço frontal do plano α (**f** _{α}), que já foi determinado na etapa anterior.

Etapa 3. O ângulo entre as duas retas é o ângulo entre a reta dada e o plano dado. O ângulo pedido é, assim, o ângulo entre o raio luminoso **l** e **f** _{α} (o traço frontal do plano α). Esse ângulo tem vértice no ponto de concorrência das duas retas (que não se identificou).

Esse ângulo está contido no plano α , que não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo rebatimento do plano α para o Plano Horizontal de Projeção. Assim, identificou-se a charneira do rebatimento, que é o traço horizontal do plano α (**h** _{α}). O ponto de concorrência do raio luminoso com o eixo **X** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo). Já temos um ponto para rebater o raio luminoso **l**. Falta-nos outro ponto ou uma direção. Recorreu-se ao rebatimento de um ponto **A** qualquer, pertencente ao raio luminoso **l**. Rebateu-se o ponto **A** e determinou-se **A**_r – a reta **l**_r (o raio luminoso rebatido) está definido por dois pontos – o ponto **A**_r e o seu ponto de concorrência com o eixo **X** (que é fixo).

O ângulo entre as duas retas é, assim, qualquer dos dois menores ângulos formados entre o eixo **X** (onde se situa **f** _{α}) e a reta **l**_r. Nesse sentido, assinalou-se a verdadeira grandeza da amplitude de um desses dois ângulos agudos com φ° .

O ângulo que a geratriz mais à direita do contorno aparente horizontal do cone faz com o plano da base é um ângulo de lados diretamente paralelos ao ângulo determinado e projeta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção – este raciocínio permitiu-nos desenhar imediatamente a projeção horizontal dessa geratriz e, assim, determinar **V**₁.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, desenharam-se a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido (que é um triângulo com um vértice em V_1 e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor abcissa da projeção horizontal da base) e a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do cone (que é a própria circunferência que delimita a base).

Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cone:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice do cone, um raio luminoso l ; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso l com o plano da base – o ponto I ; **3.** pelo ponto I conduzem-se as retas tangentes à base do cone; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes à base do cone permitem-nos identificar, de forma imediata, as geratrizes que integram a linha separatriz luz/sombra (as **geratrizes separatrizes luz/sombra**).

1. Conduziu-se, pelo vértice da pirâmide (o ponto V), um raio luminoso l' – o raio luminoso l' está definido por um ponto (o ponto V) e por uma direção (a direção luminosa convencional).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso l' com o plano da base – o ponto I' . O ponto I' teve determinação imediata, a partir da sua projeção horizontal, pois trata-se da interseção entre uma reta não projetante (o raio luminoso l') com um plano projetante horizontal (o plano φ).

Nesta situação, o ponto I' é um ponto da base – de facto, o raio luminoso l' intersecta o plano da base (o plano φ) num ponto que pertence à circunferência que delimita a base do sólido.

3. Pelo ponto I' conduziram-se as retas tangentes à base do cone – as retas t e t' . Nesta situação, uma vez que o ponto I' pertence à circunferência que delimita a base, existe apenas **uma única** reta tangente à base do cone e passando pelo ponto I' – a reta t . Por isso mesmo, se conclui que, nesta situação, só existe **um único plano tangente luz/sombra**, sendo que a reta t é a reta de interseção desse plano com o plano φ (o plano que contém a base do cone).

Tenha em conta que a determinação das retas t e t' se processou com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência que delimita a projeção horizontal da base) que passam por um ponto exterior (o ponto I_2 , que é a projeção frontal do ponto I). Esse processo fez-nos determinar, em primeiro lugar, os pontos de tangência – os pontos T_2 e T'_2 (as projeções frontais dos pontos T e T'). Sublinha-se que, nesta situação particular, a reta t é uma reta vertical e a reta t' é uma reta fronto-horizontal.

4. As retas t e t' são tangentes à base do cone nos pontos T e T' , respetivamente. Assim, as geratrizes $[TV]$ e $[T'V]$ são, imediatamente, as **geratrizes separatrizes luz/sombra** (as geratrizes de contacto ou de tangência, segundo as quais os planos λ e λ' são tangentes à superfície lateral do sólido).

A geratriz $[I'V]$ é única geratriz em sombra da superfície lateral do sólido. De facto, o raio luz/sombra l' , ao passar pelo ponto V (um ponto opaco), transforma-se num **raio em sombra** e «arrasta» a sombra do ponto V ao longo de toda a geratriz, até ao ponto I' .

Dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), a parte **iluminada** da superfície lateral do sólido é a totalidade da superfície lateral do sólido, à exceção, precisamente, da geratriz $[I'V]$. A base do cone está **em sombra**, tal como a própria geratriz $[I'V]$ – a base e a geratriz $[I'V]$ são, assim, as partes da superfície do sólido que estão **em sombra**. Assim, a linha separatriz luz/sombra é a própria circunferência que delimita a base.

Em projeção horizontal, a geratriz $[II'V]$ (que está em sombra) é invisível, facto que se assinalou convenientemente. A base do cone também está em sombra mas, em projeção horizontal, a base é invisível (é projetante horizontal), pelo que, em projeção horizontal, não existe qualquer sombra própria a assinalar.

Em projeção frontal, a superfície lateral do cone é visível na sua totalidade, bem como a geratriz $[II'V]$. A base está em sombra, mas é invisível em projeção frontal, pelo que, em projeção frontal, a única sombra a assinalar é a da geratriz $[II'V]$.

Determinação da sombra projetada do cone:

A **sombra projetada** do cone é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cone** nos planos de projeção.

Neste caso, e como se referiu, a linha separatriz luz/sombra é a circunferência que delimita a base do cone, pelo que a sombra projetada do cone é, na prática, a sombra projetada de um círculo (a própria base do sólido). O **primeiro passo** na determinação da sombra de um círculo consiste em averiguar a eventual existência de pontos de quebra, o que se processa com o recurso ao **método do plano luz/sombra passante**.

Nesse sentido, definiu-se o plano luz/sombra passante na presente situação. O **plano luz/sombra passante** está definido por duas retas concorrentes – o eixo X e o raio luminoso l , passante (o raio luminoso l a que se recorreu para determinar a amplitude do ângulo de φ°). Em seguida, determinou-se a reta de interseção do **plano luz/sombra passante** com o plano φ (o plano que contém a base do cone) – a reta i .

Para definir a reta i são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O **plano luz/sombra passante** e o plano φ são planos secantes, pelo que têm uma única «família» de retas em comum, sendo que a reta de interseção entre os dois planos é necessariamente uma reta dessa única «família» de retas que os dois planos têm em comum. O **plano luz/sombra passante** é um plano de rampa e o plano φ é um plano frontal (de frente), pelo que a única «família» de retas que os dois planos têm em comum é a «família» das retas fronto-horizontais – a reta i é, assim, uma reta fronto-horizontal. Já temos uma direção para definir a reta i . Falta-nos um ponto. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso l' com o plano φ – o ponto I' . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta i – a reta i está definida por um ponto (o ponto I') e por uma direção (é fronto-horizontal).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A reta i é secante à circunferência, pelo que a sombra do círculo admite a existência de pontos de quebra. A reta i corta a circunferência nos pontos Q e Q' – as sombras dos pontos Q e Q' serão, assim, os pontos de quebra da sombra do círculo. O **arco maior** QQ' produz sombra no **SPFS** e o **arco menor** QQ' produz sombra no **SPHA**. A sombra que o **arco maior** QQ' produz no **SPFS** é um arco de circunferência. A sombra que o **arco menor** QQ' produz no **SPHA** é um segmento de elipse. Em seguida, conduziram-se, pelas projeções frontais dos pontos Q e Q' (Q_2 e Q'_2), respetivamente), as projeções frontais dos raios luminosos que por eles passam e determinaram-se as sombras dos pontos Q e Q' (Q_s e Q'_s), no eixo X . Tenha em conta que não se determinaram as projeções horizontais dos pontos Q e Q' , por não serem necessárias.

A sombra projetada do **arco maior** QQ' no **SPFS** é necessariamente um arco de circunferência, geometricamente igual ao arco QQ' . Começemos por determinar o centro desse outro arco, que é a sombra do ponto O no Plano Frontal de Projeção – O_{s_2} é a sombra real do ponto O (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que por ele passa. Com o compasso, fazendo centro em O_{s_2} e com 2,5 cm de raio, desenhou-se o arco de circunferência que começa em Q_s e termina em Q'_s – note que se tem necessariamente $O_{s_2}Q_s = O_{s_2}Q'_s = 2,5$ cm.

A sombra projetada do **arco menor** QQ' no **SPHA** é um segmento de elipse, que é uma curva de erro. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento de elipse requer um número significativo de pontos (dependendo, também, da dimensão da curva) e, além disso, um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício 209.

Nesse sentido, começou-se por inscrever o arco menor QQ' na parte correspondente de um quadrado de **lados paralelos ao eixo X** (um «meio quadrado»), desenhando em seguida as partes correspondentes das diagonais e medianas do quadrado. Os pontos em que as medianas se apoiam nos lados do quadrado permitem-nos determinar **três pontos** do segmento de elipse. Os pontos em que as partes correspondentes das diagonais do quadrado cortam o arco menor QQ' permitem-nos determinar mais **dois pontos** do segmento de elipse. Em seguida, há que determinar a sombra do «meio quadrado» no Plano Horizontal de Projeção, bem como das partes correspondentes das suas medianas e diagonais.

Começou-se por determinar a sombra do ponto O no Plano Horizontal de Projeção – O_{v_1} é a sombra virtual do ponto O (situa-se no **SPHP**) e é o traço horizontal do raio luminoso que por ele passa.

As sombras dos lados verticais desse «meio quadrado» estão sobre as projeções horizontais dos raios luminosos que passam pelos seus extremos. A sombra do seu lado superior (o diâmetro fronto-horizontal da base do cone) passa por O_{v_1} e é paralelo ao eixo X , o que nos permitiu determinar, de forma imediata, as sombras dos seus dois extremos. Em seguida, determinou-se a sombra do ponto de menor cota da circunferência (que é um ponto do lado inferior desse «meio quadrado») e por essa sombra conduziu-se a sombra do lado correspondente (que é também paralela ao eixo X).

Em seguida, conduziram-se, por O_{v_1} , as sombras das «meias diagonais», bem como da «meia mediana» vertical. Em seguida, transportaram-se os pontos em que a semicircunferência inferior corta as diagonais do «meio quadrado» para as respetivas linhas do paralelogramo já desenhado, a partir das projeções horizontais daqueles pontos. Este conjunto de traçados permitiu-nos determinar um total de **cinco pontos** – a estes cinco pontos acrescem os dois pontos de quebra (os pontos Q_s e Q'_s), o que perfaz um total de **sete pontos** para o desenho da curva. Estes sete pontos permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva.

Note ainda que existem dois pequenos troços da curva desenhada que não fazem parte da sombra do arco menor QQ' . Esses troços são os dois troços que se situam para cima do eixo X – trata-se da **parte virtual** da sombra da semicircunferência, pois situam-se no **SPHP**. A necessidade destes dois troços foi apenas o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através deles é possível ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivessem desenhado estes dois pequenos troços, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afetada de erros de execução.

O desenho da curva permitiu concluir o desenho do contorno da **sombra projetada** do cone nos planos de projeção, que é composta pelo segmento de elipse desenhado e pelo segmento de círculo desenhado anteriormente (e que tem uma parte invisível).

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra com uma mancha clara e uniforme – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo cone) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

Traçado:

O eixo X , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o cone e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à determinação da amplitude do ângulo de φ° , das retas i e t e, ainda, de todos os traçados referentes à construção do segmento de elipse), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o cone ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cone. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

227.

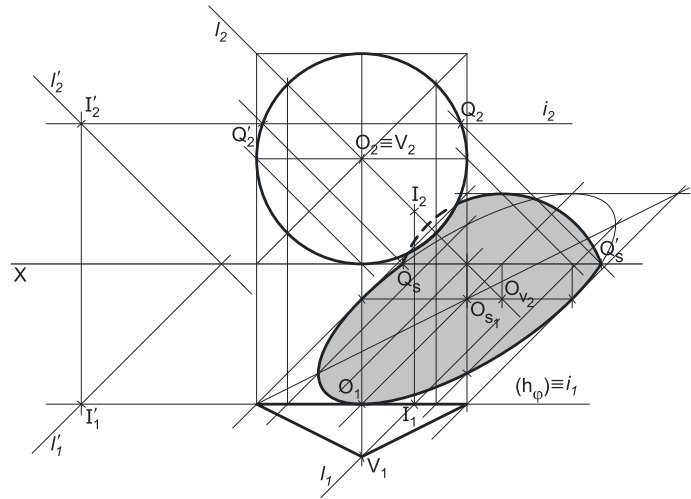
Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano φ (o plano frontal que contém a base do cone) pelo seu traço horizontal. O plano φ é um plano projetante horizontal, pelo que o seu traço horizontal (h_φ) passa por **O** (a projeção horizontal do ponto **O**). O plano φ não tem traço frontal, pelo que o seu traço horizontal se identificou entre parêntesis. A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

Resolução:

Determinação das projeções do cone:

A base do cone é tangente ao Plano Horizontal de Projeção e o seu centro (o ponto **O**) tem 3 cm de cota, pelo que se depreende que a base tem 3 cm de raio. Por outro lado, a base do cone está contida num plano paralelo ao Plano Frontal de Projeção, pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção. Assim, com o compasso, fazendo centro em **O**₂ (a projeção frontal do ponto **O**) e com 3 cm de raio, desenhou-se a projeção frontal da base do sólido. A projeção horizontal da base é um segmento de reta sobre o traço horizontal do plano φ – corresponde à projeção horizontal do seu diâmetro fronto-horizontal.



Trata-se de um **cone de revolução**, pelo que o seu eixo está contido numa reta ortogonal ao plano da base (que é um plano frontal) – o eixo do cone está, assim, contido numa reta de topo (uma reta projetante frontal). Dessa forma, os pontos **O** e **V** (o vértice do cone) situam-se na mesma projetante frontal, pelo que se tem imediatamente $V_2 \equiv O_2$. Por outro lado, uma vez que a base do cone é invisível em projeção frontal (como o enunciado refere expressamente), sabe-se que o vértice **V**, do cone, tem afastamento superior à base.

A altura de um cone é a distância do vértice ao plano da base, medida ortogonalmente a este. Assim, tendo em conta que a base do cone tem 4 cm de afastamento (o afastamento do ponto **O**) e que o cone tem 1,5 cm de altura, constata-se que o ponto **V** (o vértice do cone) tem 5,5 cm de afastamento ($4 + 1,5 = 5,5$), o que nos permitiu determinar **V**₁ (a projeção horizontal do ponto **V**).

Em seguida, desenharam-se a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido (que é um triângulo com um vértice em **V**₁ e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor abcissa da projeção horizontal da base) e a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do cone (que é a própria circunferência que delimita a base).

Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cone:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice do cone, um raio luminoso **l**; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano da base – o ponto **I**; **3.** pelo ponto **I** conduzem-se as retas tangentes à base do cone; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes à base do cone permitem-nos identificar, de forma imediata, as geratrizes que integram a linha separatriz luz/sombra (as **geratrizes separatrizes luz/sombra**).

1. Conduziu-se, pelo vértice da pirâmide (o ponto **V**), um raio luminoso **l** – o raio luminoso **l** está definido por um ponto (o ponto **V**) e por uma direção (a direção luminosa convencional).

2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano da base – o ponto **I**. O ponto **I** teve determinação imediata, a partir da sua projeção horizontal, pois trata-se da interseção entre uma reta não projetante (o raio luminoso **l**) com um plano projetante horizontal (o plano φ).

Nesta situação, o ponto **I** é um ponto situado no interior da base do sólido – de facto, o raio luminoso **l** interseta o plano da base (o plano φ) num ponto que situa no interior da circunferência que delimita a base do sólido.

3. Não foi possível conduzir, pelo ponto **I**, qualquer reta tangente à base do cone. De facto, uma vez que o ponto **I** é interior à circunferência que delimita a base, qualquer reta que passe pelo ponto **I** é necessariamente secante à base – não há qualquer reta tangente à base passando pelo ponto **I**. Por isso mesmo, se conclui que, nesta situação, não existe **nenhum plano tangente luz/sombra** (qualquer plano que contenha o ponto **I** é necessariamente um **plano secante** ao cone).

4. Tendo em conta que não há nenhum plano tangente luz/sombra, também não há nenhuma **geratriz separatriz luz/sombra** (não há qualquer geratriz de contacto ou de tangência).

Dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), a parte **iluminada** da superfície lateral do sólido é a totalidade da superfície lateral do sólido. A base, por outro lado, está necessariamente em sombra. Assim, a linha separatriz luz/sombra é a própria circunferência que delimita a base.

Em projeção horizontal, a base (que está em sombra) é invisível (é projetante horizontal), pelo que, em projeção horizontal, não existe qualquer sombra própria a assinalar.

Em projeção frontal, a superfície lateral do cone (que está iluminada) é visível na sua totalidade. A base está em sombra, mas é invisível em projeção frontal, pelo que, em projeção frontal, também não existe qualquer sombra própria a assinalar.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Determinação da sombra projetada do cone:

A **sombra projetada** do cone é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cone** nos planos de projeção.

Neste caso, e como se referiu, a linha separatriz luz/sombra é a circunferência que delimita a base do cone, pelo que a sombra projetada do cone é, na prática, a sombra projetada de um círculo (a própria base do sólido). O **primeiro passo** na determinação da sombra de um círculo consiste em averiguar a eventual existência de pontos de quebra, o que se processa com o recurso ao **método do plano luz/sombra passante**.

Nesse sentido, definiu-se o plano luz/sombra passante na presente situação. O **plano luz/sombra passante** está definido por duas retas concorrentes – o eixo X e o raio luminoso l' , passante. O raio luminoso l' está definido por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo X , que não se identificou) e por uma direção (a direção convencional da luz). Em seguida, determinou-se a reta de interseção do **plano luz/sombra passante** com o plano φ (o plano que contém a base do cone) – a reta i .

Para definir a reta i são necessários dois pontos ou um ponto e uma direção. O **plano luz/sombra passante** e o plano φ são planos secantes, pelo que têm uma única «família» de retas em comum, sendo que a reta de interseção entre os dois planos é necessariamente uma reta dessa única «família» de retas que os dois planos têm em comum. O **plano luz/sombra passante** é um plano de rampa e o plano φ é um plano frontal (de frente), pelo que a única «família» de retas que os dois planos têm em comum é a «família» das retas fronto-horizontais – a reta i é, assim, uma reta fronto-horizontal. Já temos uma direção para definir a reta i . Falta-nos um ponto. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso l' com o plano φ – o ponto I' . Já temos o ponto que nos faltava para definir a reta i – a reta i está definida por um ponto (o ponto I') e por uma direção (é fronto-horizontal).

A reta i é secante à circunferência, pelo que a sombra do círculo admite a existência de pontos de quebra. A reta i corta a circunferência nos pontos Q e Q' – as sombras dos pontos Q e Q' serão, assim, os pontos de quebra da sombra do círculo. O **arco menor QQ'** produz sombra no **SPFS** e o **arco maior QQ'** produz sombra no **SPHA**. A sombra que o **arco menor QQ'** produz no **SPFS** é um arco de circunferência. A sombra que o **arco maior QQ'** produz no **SPHA** é um segmento de elipse. Em seguida, conduziram-se, pelas projeções frontais dos pontos Q e Q' (Q_2 e Q'_2), respetivamente, as projeções frontais dos raios luminosos que por eles passam e determinaram-se as sombras dos pontos Q e Q' (Q_s e Q'_s), no eixo X . Tenha em conta que não se determinaram as projeções horizontais dos pontos Q e Q' , por não serem necessárias.

A sombra projetada do **arco menor QQ'** no **SPFS** é necessariamente um arco de circunferência, geometricamente igual ao arco QQ' . Começemos por determinar o centro desse outro arco, que é a sombra do ponto O no Plano Frontal de Projeção – O_{v_2} é a sombra virtual do ponto O (situa-se no **SPFI**) e é o traço frontal do raio luminoso que por ele passa. Com o compasso, fazendo centro em O_{v_2} e com 3 cm de raio, desenhou-se o arco de circunferência que começa em Q_s e termina em Q'_s – note que se tem necessariamente $O_{v_2}Q_s = O_{v_2}Q'_s = 3$ cm.

A sombra projetada do **arco maior QQ'** no **SPHA** é um segmento de elipse, que é uma curva de erro. Assim, o desenho (à mão livre) do segmento de elipse requer um número significativo de pontos (dependendo, também, da dimensão da curva) e, além disso, um conjunto de traçados semelhantes aos apresentados no exercício **209**. Note que o **arco maior QQ'** corresponde quase a totalidade da circunferência. Assim, por uma questão de rigor (devidamente justificada mais à frente), optou-se por fazer o desenho da elipse completa e, depois, identificar a parte dessa elipse que é a sombra do arco.

Nesse sentido, começou-se por inscrever a circunferência num quadrado de **lados paralelos ao eixo X** , desenhando em seguida as medianas e as diagonais do quadrado (à semelhança do exposto no relatório do exercício **209**). Os pontos em que as medianas se apoiam nos lados do quadrado permitem-nos determinar **quatro pontos** da elipse. Os pontos em que a circunferência corta as diagonais do quadrado permitem-nos determinar mais **quatro pontos** da elipse. Em seguida, há que determinar a sombra do quadrado no Plano Horizontal de Projeção, bem como das suas medianas e diagonais.

Começou-se por determinar a sombra do ponto O no Plano Horizontal de Projeção – O_{s_1} é a sombra real do ponto O (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que por ele passa.

As sombras dos lados verticais do quadrado estão sobre as projeções horizontais dos raios luminosos que passam pelos seus extremos. O lado inferior do quadrado tem cota nula (está no Plano Horizontal de Projeção), pelo que a sua sombra está coincidente com o próprio lado. Em seguida, desenhou-se a sombra de uma das diagonais – a diagonal que contém o extremo mais à esquerda do lado de cota nula do quadrado. A sombra dessa diagonal está por dois pontos – o seu extremo inferior e o ponto O_{s_1} . Em seguida, determinou-se o ponto de interseção da reta suporte da sombra dessa diagonal com a reta suporte da sombra do lado vertical mais à direita do quadrado – esse ponto é a sombra do outro extremo da diagonal (o vértice de maior cota e menor abscissa do quadrado). Por esse ponto conduziu-se a sombra do lado de maior cota do quadrado, que é fronto-horizontal. Estes procedimentos permitiram-nos, de uma forma simples, construir o paralelogramo que é a sombra do quadrado circunscrito à circunferência.

Em seguida, conduziram-se, por O_{s_1} , as medianas do paralelogramo (paralelas aos lados do polígono) e as suas diagonais – as medianas do paralelogramo são, imediatamente, as sombras das medianas do quadrado. Os pontos em que as medianas do paralelogramo se apoiam nos lados da figura são, de forma direta, quatro pontos da elipse.

Em seguida, desenhou-se a diagonal em falta do paralelogramo e transportaram-se, para as duas diagonais, os pontos em que a circunferência corta as diagonais do quadrado – este transporte processou-se a partir das projeções horizontais daqueles pontos e da direção luminosa (em projeção horizontal). Este procedimento permitiu-nos determinar mais **quatro pontos** da elipse.

Este conjunto de procedimentos permitiu-nos determinar um total de **oito pontos** da elipse, aos quais acrescem os **dois pontos** de quebra (os pontos Q_s e Q'_s), o que perfaz um total de **dez pontos** para o desenho da curva. Estes dez pontos permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Note ainda a parte da elipse que se situa para cima do eixo **X** se trata da **parte virtual** da sombra projetada da circunferência no Plano Horizontal de Projeção, pois situa-se no **SPHP**. A necessidade desse troço da curva foi apenas o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois esse troço permitiu-nos ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivesse desenhado esta parte da elipse, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afetada de erros de execução.

O desenho da curva permitiu concluir o desenho do contorno da **sombra projetada** do cone nos planos de projeção, que é composta pelo segmento de elipse desenhado e pelo segmento de círculo desenhado anteriormente (e que tem uma parte invisível).

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra com uma mancha clara e uniforme – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo cone) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o cone e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, da reta **l** e, ainda, de todos os traçados referentes à construção da elipse), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o cone ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cone. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

228

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas respectivas projeções, em função dos dados. Os pontos **A** e **B** estão contidos num plano de perfil, pelo que as projeções dos dois pontos se situam na mesma linha de chamada. Em seguida, representou-se o plano π (o plano de perfil que contém a base da pirâmide) pelos seus traços, contendo os pontos **A** e **B** – o plano π é um plano duplamente projetante, pelo que o seu traço frontal contém as projeções frontais dos dois pontos, tal como o seu traço horizontal contém as projeções horizontais dos dois pontos. A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

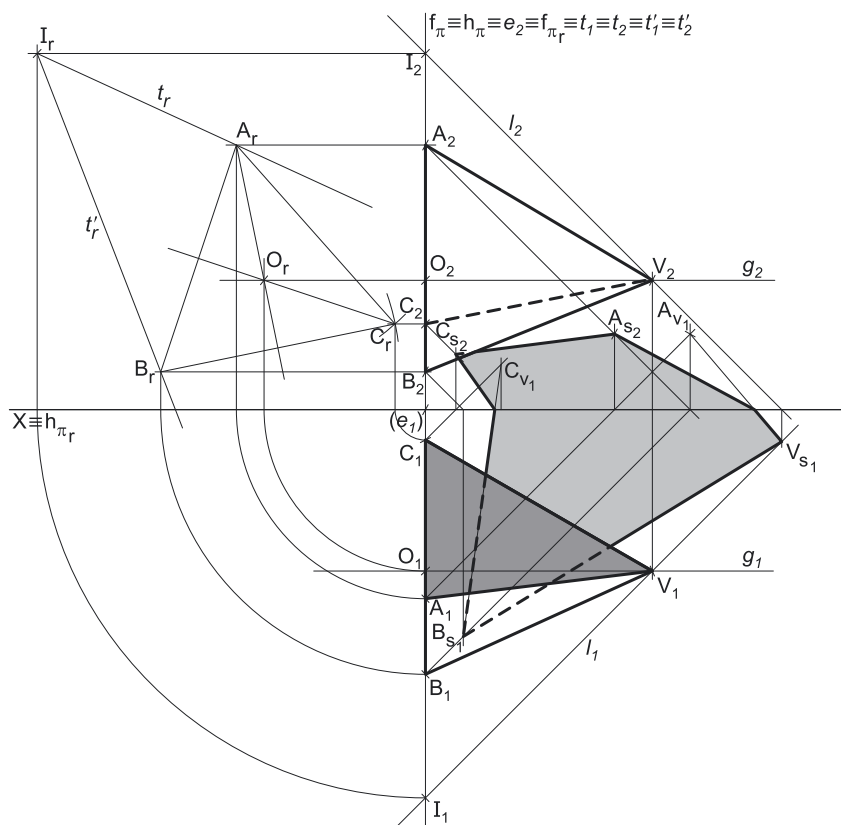
Resolução:

Determinação das projeções da pirâmide:

O plano que contém o triângulo **[ABC]** (o plano π) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o triângulo não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do triângulo apresentam deformação), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano π (o plano que contém o triângulo) para o Plano Frontal de Projeção. Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento, que é f_π (o traço frontal do plano π), que é uma reta vertical – os planos ortogonais à charneira (que contêm os arcos do rebatimento) são planos horizontais (de nível). Assim, os pontos mantêm as suas cotas ao longo do rebatimento e os arcos do rebatimento, porque estão contidos em planos horizontais (paralelos ao Plano Horizontal de Projeção), projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção.

Em seguida, efetuou-se o rebatimento dos pontos **A** e **B**, obtendo **A_r** e **B_r**. A partir de **A_r** e de **B_r**, construiu-se o triângulo em verdadeira grandeza, em rebatimento, o que nos permitiu determinar o terceiro vértice do polígono, em rebatimento (**C_r**), bem como o centro do triângulo (o ponto **O**) em rebatimento – **O_r**. Note que se atendeu a que o ponto **B** é o vértice de maior afastamento da base, como o enunciado refere de forma expressa. Em seguida, inverteu-se o rebatimento do plano π , o que nos permitiu determinar as projeções do ponto **C** (e do ponto **O**) e desenhar as duas projeções do polígono (ambas as projeções do triângulo se reduzem a segmentos de reta, pois o plano que o contém é duplamente projetante).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Trata-se de uma **pirâmide regular**, pelo que o seu eixo é ortogonal ao plano da base, ou seja, está contido numa reta fronto-horizantal. Assim, pelas projeções do ponto **O** conduziram-se as projeções da reta **g**, a reta suporte do eixo da pirâmide. Uma vez que a altura da pirâmide é a distância do vértice ao plano da base, medida ortogonalmente a este, o vértice **V** dista 6 cm (a altura da pirâmide) do plano π . Assim, a altura da pirâmide pode medir-se na reta **g**, que é paralela aos dois planos de projeção – o segmento **[OV]** (o eixo do sólido) projeta-se em verdadeira grandeza em ambas as projeções. Assim, a partir de **O₂** (por exemplo), mediram-se os 6 cm sobre **g₂** (a projeção frontal da reta **g**) e determinou-se **V₂** (a projeção frontal do ponto **V**), sobre **g₂**, o que nos permitiu determinar **V₁** (a projeção horizontal do ponto **V**) sobre **g₁** (a projeção horizontal da reta **g**). Note que se garantiu que o vértice **V** se situa à direita do plano da base, como o enunciado pede expressamente.

A partir das projeções de todos os quatro vértices da pirâmide, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é o triângulo **[ABV]**, cuja projeção frontal é o triângulo **[A₂B₂V₂]**. Em projeção frontal existe um único vértice que não pertence ao contorno aparente frontal – o vértice **C**. Este vértice, por ser o vértice de **menor afastamento** da pirâmide, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AC]** e **[BC]**, da base, e a aresta lateral **[CV]**. As arestas **[AC]** e **[BC]** da base estão ocultas por arestas visíveis, pelo que a única invisibilidade a assinalar, em projeção frontal, é a da aresta lateral **[CV]**.

O contorno aparente horizontal é a linha fechada **[BACV]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[B₁A₁C₁V₁]**. Todos os vértices da pirâmide integram o contorno aparente horizontal. No entanto, a aresta **[BC]** da base é invisível (pois separa duas faces invisíveis em projeção horizontal), mas está oculta por arestas visíveis. Já a aresta lateral **[AV]** é visível em projeção horizontal, pois separa duas faces visíveis em projeção horizontal (note que **A** é o vértice de maior cota da pirâmide).

Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria da pirâmide:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice da pirâmide, um raio luminoso **l**; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano da base – ponto **I**; **3.** pelo ponto **I** conduzem-se as retas tangentes (ou rasantes) à base da pirâmide; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes (ou rasantes) à base da pirâmide permitem-nos identificar, de forma imediata, as arestas laterais que integram a linha separatriz luz/sombra.

1. Conduziu-se, pelo vértice da pirâmide (o ponto **V**), um raio luminoso **l** – o raio luminoso **l** está definido por um ponto (o ponto **V**) e uma direção (a direção convencional da luz).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano da base – ponto **I**. A determinação do ponto **I** é direta, pois o plano π é um plano duplamente projetante (trata-se da interseção entre uma reta não projetante e um plano projetante).
3. Pelo ponto **I** conduziram-se as retas rasantes à base da pirâmide – as retas **t** e **t'** (que são as retas de interseção dos dois **planos tangentes luz/sombra** com o plano que contém a base – o plano π).

É possível determinar, de forma direta as projeções das retas **t** e **t'** mas, uma vez que se trata de retas de perfil (cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**), não é possível garantir a tangência das retas **t** e **t'** em relação à base da pirâmide, de forma direta em projeções – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Assim, tendo em conta o rebatimento já efetuado para a determinação das projeções da base da pirâmide, efetuou-se o rebatimento do ponto **I** para esse mesmo rebatimento, obtendo **I_r**. Por **I_r** conduziram-se as retas **t_r** e **t'_r** (as retas **t** e **t'** em rebatimento) – **t_r** passa por **I_r** e é rasante à base em rebatimento no vértice **A_r** e **t'_r** passa por **I_r** e é rasante à base em rebatimento no vértice **B_r**.

4. As retas **t** e **t'** são rasantes à base da pirâmide nos pontos **A** e **B**, respetivamente (o que foi possível perceber em rebatimento). Assim, as arestas laterais **[AV]** e **[BV]** são, imediatamente, duas arestas da **linha separatriz luz/sombra** (as arestas laterais **[AV]** e **[BV]** são as arestas segundo as quais os planos λ e λ' são rasantes ao sólido).

As arestas **[AV]** e **[BV]** separam a parte da superfície lateral da pirâmide que está iluminada da que está em sombra – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), a face lateral **[ABV]** e a base estão iluminadas enquanto as faces laterais **[ACV]** e **[BCV]** estão em sombra. Assim, a **linha separatriz luz/sombra** é a **linha quebrada fechada [ACBV]**.

A **sombra própria** da pirâmide integra as faces laterais **[ACV]** e **[BCV]**. Em projeção horizontal, a face lateral **[ACV]** é visível e a base é invisível, pelo que, em projeção horizontal, a sombra própria a assinalar refere-se à face lateral **[ACV]**. Já em projeção frontal, todas as faces em sombra (as faces laterais **[ACV]** e **[BCV]**) são invisíveis, pelo que não existe qualquer sombra própria a assinalar, em projeção frontal.

A **sombra própria** da pirâmide foi assinalada com uma mancha clara e uniforme – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Determinação da sombra projetada da pirâmide:

A **sombra projetada** da pirâmide é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada da pirâmide** nos planos de projeção.

Assim, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.

A_{s₂} é a sombra real do ponto **A** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que por ele passa. **C_{s₂}** é a sombra real do ponto **C** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que por ele passa. **B_{s₁}** é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que por ele passa. **V_{s₁}** é a sombra real do ponto **V** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que por ele passa. As sombras reais dos vértices da pirâmide (da linha separatriz luz/sombra) situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) da pirâmide **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

B_{s₁} e **V_{s₁}** situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta **[BV]** não admite ponto de quebra. **A_{s₂}** e **C_{s₂}** situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta **[AC]** não admite ponto de quebra. O mesmo já não acontece em relação às arestas **[BC]** e **[AV]** – de facto, um ponto de quebra situa-se entre **B_{s₁}** e **C_{s₂}** (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre **A_{s₂}** e **V_{s₁}** (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Para determinar o ponto de quebra situado entre B_{s_1} e C_{s_2} recorreu-se à sombra virtual do ponto $C - C_{v_1}$. C_{v_1} é a sombra virtual do ponto C – situa-se no SPHP e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por C . O segmento $[B_{s_1} C_{v_1}]$ é a sombra projetada da aresta $[BC]$ no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**) e que nos permitiu determinar o ponto de quebra, que é o ponto de interseção do segmento $[B_{s_1} C_{v_1}]$ com o eixo X . Para determinar o ponto de quebra situado entre V_{s_1} e A_{s_2} recorreu-se à sombra virtual do ponto $A - A_{v_1}$. A_{v_1} é a sombra virtual do ponto A – situa-se no SPHP e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por A . O segmento $[A_{v_1} V_{s_1}]$ é a sombra projetada da aresta $[AV]$ no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**) e que nos permitiu determinar o ponto de quebra, que é o ponto de interseção do segmento $[A_{v_1} V_{s_1}]$ com o eixo X . Note que não se identificaram os dois pontos de quebra pois, na realidade, a sua identificação é desnecessária.

Em seguida, desenhou-se o contorno da **sombra projetada** da pirâmide nos planos de projeção, que tem vértices em A_{s_2} , C_{s_2} , B_{s_1} , V_{s_1} e nos dois pontos de quebra determinados, atendendo às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada da pirâmide é invisível, pois está oculta pela própria pirâmide. Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra com uma mancha clara e uniforme – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pela pirâmide) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

Traçado:

O eixo X , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – a pirâmide e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços do plano π (o plano que contém a base), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à construção da base da pirâmide em rebatimento ou, ainda, das retas t e t' em rebatimento), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de a pirâmide ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem a pirâmide. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

229.

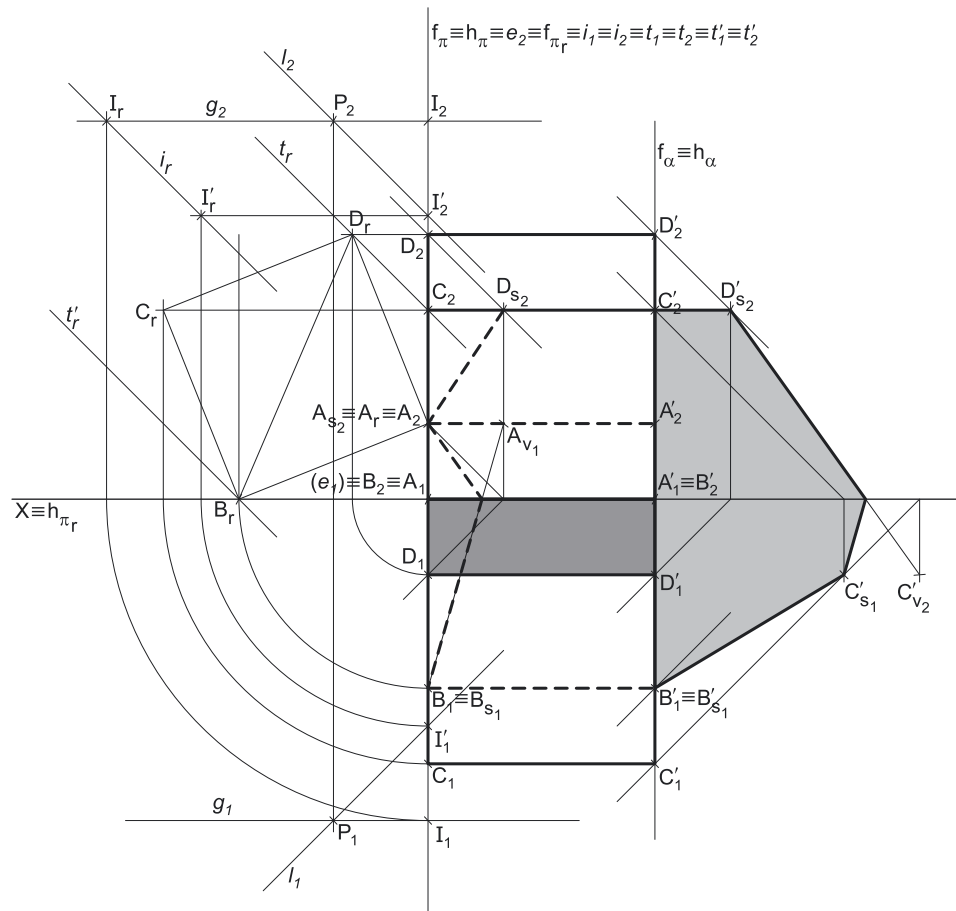
Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos A e B , pelas respetivas projeções, em função dos dados. Os pontos A e B estão contidos num plano de perfil, pelo que as projeções dos dois pontos se situam na mesma linha de chamada. Em seguida, representou-se o plano π (o plano de perfil que contém a base $[ABCD]$ do prisma) pelos seus traços, contendo os pontos A e B – o plano π é um plano duplamente projetante, pelo que o seu traço frontal contém as projeções frontais dos dois pontos, tal como o seu traço horizontal contém as projeções horizontais dos dois pontos. A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo X , em ambas as projeções.

Resolução:

Determinação das projeções do prisma:

O plano que contém o quadrado $[ABCD]$ (o plano π) não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o quadrado não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do quadrado apresentam deformação), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Optou-se pelo rebatimento do plano π (o plano que contém o quadrado) para o Plano Frontal de Projeção. Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento, que é f_π (o traço frontal do plano π), que é uma reta vertical – os planos ortogonais à charneira (que contém os arcos do rebatimento) são planos horizontais (de nível). Assim, os pontos mantêm as suas cotas ao longo do rebatimento e os arcos do rebatimento, porque estão contidos em planos horizontais (paralelos ao Plano Horizontal de Projeção), projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção.

Em seguida, efetuou-se o rebatimento dos pontos **A** e **B**, obtendo **A_r** e **B_r**. O ponto **A** é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio (é um ponto fixo) – tem-se imediatamente **A_r** \equiv **A₂**. A partir de **A_r** e de **B_r**, construiu-se o quadrado em verdadeira grandeza, em rebatimento, o que nos permitiu determinar os outros dois vértices do polígono, em rebatimento (**C_r** e **D_r**). Em seguida, inverteu-se o rebatimento do plano π , o que nos permitiu determinar as projeções dos pontos **C** e **D** e desenhar as duas projeções do polígono (ambas as projeções do quadrado se reduzem a segmentos de reta, pois o plano que o contém é duplamente projetante).

A altura de um prisma é a distância entre os planos das duas bases. Assim, porque o prisma tem 6 cm de altura, o plano α (o plano e perfil que contém a outra base do sólido) situa-se 6 cm para a direita do plano π (pois o quadrado **[ABCD]** é a base mais à esquerda do prisma, como o enunciado refere de forma expressa). Nesse sentido, representou-se o plano α (o plano de perfil que contém a outra base do sólido) pelos seus traços.

Trata-se de um **prisma regular**, pelo que as suas arestas laterais são ortogonais aos planos das bases, ou seja, estão contidas em retas fronto-horizontais. Assim, pelas projeções de todos os vértices do quadrado **[ABCD]** conduziram-se as projeções homónimas das retas suporte das respetivas arestas laterais (que não se identificaram), que são fronto-horizontais, e determinaram-se os pontos de interseção dessas retas com o plano α – esses pontos são os vértices do quadrado **[A'B'C'D']**, que é a base mais à direita do sólido. Note que se trata da interseção entre retas não projetantes (as retas suporte das arestas laterais do sólido) com um plano duplamente projetante (o plano α).

A partir das projeções dos oito vértices do prisma, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é a linha fechada **[BCDD'C'B']**, cuja projeção frontal é o polígono **[B₂C₂D₂D'₂C'₂B'₂]**. Em projeção frontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices **A** e **A'**. Estes, por serem os vértices de **menor afastamento** do prisma, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[AB]** e **[AD]** (da base **[ABCD]**), as arestas **[A'B']** e **[A'D']** (da base **[A'B'C'D']**), e a aresta lateral **[AA']**. No entanto, as arestas **[AB]**, **[AD]**, **[A'B']** e **[A'D']** estão ocultas por arestas do prisma que são visíveis em projeção frontal, pelo que a única invisibilidade a assinalar (em projeção frontal) é a da aresta lateral **[AA']**. Já a aresta lateral **[CC']** é visível, pois separa duas faces visíveis em projeção frontal (os vértices **C** e **C'** são os vértices de maior afastamento do sólido).

O contorno aparente horizontal é a linha fechada **[ADCC'D'A']**, cuja projeção horizontal é o polígono **[A₁D₁C₁C'₁D'₁A'₁]**. Em projeção horizontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices **B** e **B'**. Estes, por serem os vértices de **menor cota** do prisma, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[AB]** e **[BC]** (da base **[ABCD]**), as arestas **[A'B']** e **[B'C']** (da base **[A'B'C'D']**), e a aresta lateral **[BB']**. No entanto, as arestas **[AB]**, **[BC]**, **[A'B']** e **[B'C']** estão ocultas por arestas do prisma que são visíveis em projeção horizontal, pelo que a única invisibilidade a assinalar (em projeção horizontal) é a da aresta lateral **[BB']**. Já a aresta lateral **[DD']** é visível, pois separa duas faces visíveis em projeção horizontal (os vértices **D** e **D'** são os vértices de maior cota do sólido).

Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do prisma:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** por um ponto **P** qualquer, exterior ao sólido, conduzir duas retas – uma reta paralela às arestas laterais do sólido e uma outra reta paralela à direção luminosa; **2.** determinar a reta **i**, a reta de interseção do plano definido pelas duas retas com o plano da base (de referência) do prisma; **3.** conduzir as retas tangentes (ou rasantes) à base (de referência) do prisma que são paralelas à reta **i**; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes (ou rasantes) à base (de referência) do prisma permitem-nos identificar, de forma imediata, as arestas laterais que integram a linha separatriz luz/sombra.

1. Por um ponto **P** qualquer, exterior ao sólido, conduziram-se duas retas – a reta **g**, paralela às arestas laterais do sólido, e a reta **l** (um raio luminoso). Estas duas retas, porque são concorrentes, definem um plano – esse plano tem a orientação dos planos tangentes luz/sombra
2. Determinou-se a reta **i**, a reta de interseção do plano definido pelas retas **g** e **l**, com o plano π , o plano da base (de referência) do prisma (considerou-se que a base de referência do prisma é a base mais à esquerda). A reta **i** está definida por dois pontos – o ponto **I** (o ponto de interseção da reta **g** com o plano π) e o ponto **I'** (o ponto de interseção da reta **l** com o plano π).
3. Conduziram-se as retas rasantes à base (de referência) do prisma que são paralelas à reta **i** – as retas **t** e **t'**.

É possível determinar, de forma direta as projeções das retas **t** e **t'** mas, uma vez que se trata de retas de perfil (cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**), não é possível garantir nem o paralelismo das retas **t** e **t'** em relação à reta **i**, nem sequer a tangência das retas **t** e **t'** em relação à base do prisma, de forma direta em projeções – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Assim, tendo em conta o rebatimento já efetuado para a determinação das projeções da base da pirâmide, efetuou-se o rebatimento da reta **i** para esse mesmo rebatimento. Nesse sentido, rebateram-se os pontos **I** e **I'**, obtendo **I_r** e **I'_r** – a reta **i_r** (a reta **i** rebatida) passa por **I_r** e por **I'_r**. Em seguida, desenharam-se as retas **t_r** e **t'_r** (as retas **t** e **t'** em rebatimento), rasantes à base do prisma (em rebatimento) e paralelas à reta **i_r** – **t_r** é paralela a **i_r** e é rasante à base em rebatimento no vértice **D_r**, e **t'_r** é paralela a **i_r** e é rasante à base em rebatimento no vértice **B_r**.

4. As retas **t** e **t'** são rasantes à base (de referência) do prisma nos pontos **D** e **B**, respetivamente. Assim, as arestas laterais **[DD']** e **[BB']** são, imediatamente, duas arestas da **linha separatriz luz/sombra** (as arestas laterais **[DD']** e **[BB']** são as arestas segundo as quais os planos λ' e λ'' são rasantes ao sólido).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

As arestas $[DD']$ e $[BB']$ separam a parte da superfície lateral do prisma que está iluminada da que está em sombra – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), as faces laterais $[BB'C'C]$ e $[CC'D'D]$ estão iluminadas, sendo que a base mais à esquerda (a base $[ABCD]$) também está iluminada. Já as faces laterais $[AA'B'B]$ e $[AA'D'D]$ estão em sombra, tal como a base mais à direita do prisma (a base $[A'B'C'D']$). Assim, a **linha separatriz luz/sombra** é a **linha quebrada fechada** $[DD'C'B'BA]$.

A **sombra própria** do prisma integra as faces laterais $[AA'B'B]$ e $[AA'D'D]$, bem como a base mais à direita (a base $[ABCD]$). Em projeção horizontal, a face lateral $[AA'D'D]$ é visível e as restantes faces em sombra são invisíveis, pelo que, em projeção horizontal, a única sombra própria a assinalar refere-se à face lateral $[AA'D'D]$. Já em projeção frontal, todas as faces em sombra são invisíveis, pelo que, em projeção frontal, não existe qualquer sombra própria a assinalar.

A **sombra própria** do prisma foi assinalada com uma mancha clara e uniforme – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Determinação da sombra projetada do prisma:

A **sombra projetada** do prisma é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do prisma** nos planos de projeção.

Assim, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**. O ponto **A** situa-se no Plano Frontal de Projeção, pelo que a sua sombra está coincidente com o próprio ponto – tem-se imediatamente $A_2 \equiv A_{s_2}$. Os pontos **B** e **B'** situam-se no Plano Horizontal de Projeção, pelo que as suas sombras estão coincidentes com os próprios pontos – tem-se imediatamente $B_1 \equiv B_{s_1}$ e $B'_1 \equiv B'_{s_1}$. D_{s_2} é a sombra real do ponto **D** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que por ele passa. D'_{s_2} é a sombra real do ponto **D'** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que por ele passa. C'_{s_1} é a sombra real do ponto **C'** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que por ele passa. As sombras reais dos vértices do prisma (da linha separatriz luz/sombra) situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do prisma **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

A_{s_2} , D_{s_2} e D'_{s_2} situam-se, todas, no **SPFS**, pelo que as sombras das arestas $[AD]$ e $[DD']$ não admitem pontos de quebra. B_{s_1} , B'_{s_1} e C'_{s_1} situam-se, todas, no **SPHA**, pelo que as sombras das arestas $[BB']$ e $[B'C']$ não admitem pontos de quebra. O mesmo já não acontece em relação às arestas $[AB]$ e $[C'D']$ – de facto, um ponto de quebra situa-se entre A_{s_2} e B_{s_1} (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra situa-se entre D'_{s_2} e C'_{s_1} (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos).

Para determinar o ponto de quebra situado entre A_{s_2} e B_{s_1} , recorreu-se à sombra virtual do ponto **A** – A_{v_1} . A_{v_1} é a sombra virtual do ponto **A** – situa-se no **SPHP** e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **A**. O segmento $[B_{s_1}A_{v_1}]$ é a sombra projetada da aresta $[AB]$ no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**) e que nos permitiu determinar o ponto de quebra, que é o ponto de interseção do segmento $[B_{s_1}A_{v_1}]$ com o eixo **X**. Para determinar o ponto de quebra situado entre D'_{s_2} e C'_{s_1} , recorreu-se à sombra virtual do ponto **C'** – C'_{v_2} . C'_{v_2} é a sombra virtual do ponto **C'** – situa-se no **SPFI** e é o traço frontal do raio luminoso que passa por **C'**. O segmento $[D'_{s_2}C'_{v_2}]$ é a sombra projetada da aresta $[C'D']$ no Plano Frontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**) e que nos permitiu determinar o ponto de quebra, que é o ponto de interseção do segmento $[D'_{s_2}C'_{v_2}]$ com o eixo **X**. Note que não se identificaram os dois pontos de quebra pois, na realidade, a sua identificação é desnecessária.

Em seguida, desenhou-se o contorno da **sombra projetada** do prisma nos planos de projeção, que tem vértices em A_{s_2} , D_{s_2} , D'_{s_2} , C'_{s_1} , B'_{s_1} , B_{s_1} e nos dois pontos de quebra determinados, atendendo às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada do prisma é invisível, pois está oculta pelo próprio prisma. Note que existe uma sobreposição entre a parte invisível da sombra projetada da aresta $[DD']$ (o segmento $[D_{s_2}D'_{s_2}]$) e a projeção frontal da aresta $[CC']$ (que é visível). Assim, aquela invisibilidade está oculta por uma aresta visível, pelo que prevalece a visibilidade (como a resolução ilustra) – não é possível fazer um traço interrompido por baixo de uma linha a traço contínuo. Por fim, após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra com uma mancha clara e uniforme – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo prisma) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o prisma e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços dos planos que contêm as bases do sólido, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados necessários à determinação da orientação dos planos tangentes, dos traçados necessários à construção da base do prisma em rebatimento ou, ainda, das retas *i*, *t* e *t'* em rebatimento), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o prisma ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o prisma. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

230.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano π (o plano de perfil que contém a base do cone) pelos seus traços, contendo o ponto **O** – o plano π é um plano duplamente projetante, pelo que os seus traços contêm as projeções homónimas do ponto **O**. A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

Resolução:*Determinação das projeções do cone:*

A base do cone é um círculo tangente ao Plano Frontal de Projeção e o seu centro tem 3 cm de afastamento, pelo que é possível concluir, de forma imediata, que a base do cone tem 3 cm de raio.

O plano que contém a base do cone (o plano π) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que a base não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções. No entanto, é possível desenhar imediatamente as duas projeções do círculo (a base do sólido) – tendo em conta que ambas as projeções sofrem a redução máxima, as duas projeções do círculo reduzem-se a segmentos de reta sobre os traços homónimos do plano π .

Assim, a projeção horizontal do círculo é um segmento de reta com 6 cm de comprimento (o comprimento do diâmetro) de que **O**₁ (a projeção horizontal do ponto **O**) é o seu ponto médio – a projeção horizontal do círculo corresponde, na prática, à projeção horizontal do seu diâmetro de topo. De forma semelhante, a projeção frontal do círculo é um segmento de reta com 6 cm de comprimento (o comprimento do diâmetro) de que **O**₂ (a projeção frontal do ponto **O**) é o seu ponto médio – a projeção frontal do círculo corresponde, na prática, à projeção frontal do seu diâmetro vertical.

Trata-se de um **cone de revolução**, pelo que o seu eixo é ortogonal ao plano da base, ou seja, está contido numa reta fronto-horizontal. Assim, pelas projeções do ponto **O** conduziram-se as projeções da reta **g**, a reta suporte do eixo do cone. Uma vez que a altura do cone é a distância do vértice ao plano da base, medida ortogonalmente a este, o vértice **V** dista 7 cm (a altura do cone) do plano π . Assim, a altura do cone pode medir-se na reta **g**, que é paralela aos dois planos de projeção – o segmento **[OV]** (o eixo do sólido) projeta-se em verdadeira grandeza em ambas as projeções. Assim, a partir de **O**₂ (por exemplo), mediram-se os 7 cm sobre **g**₂ (a projeção frontal da reta **g**) e determinou-se **V**₂ (a projeção frontal do ponto **V**), sobre **g**₂, o que nos permitiu determinar **V**₁ (a projeção horizontal do ponto **V**) sobre **g**₁ (a projeção horizontal da reta **g**). Note que se garantiu que o vértice **V** se situa à direita do plano da base, como o enunciado pede expressamente.

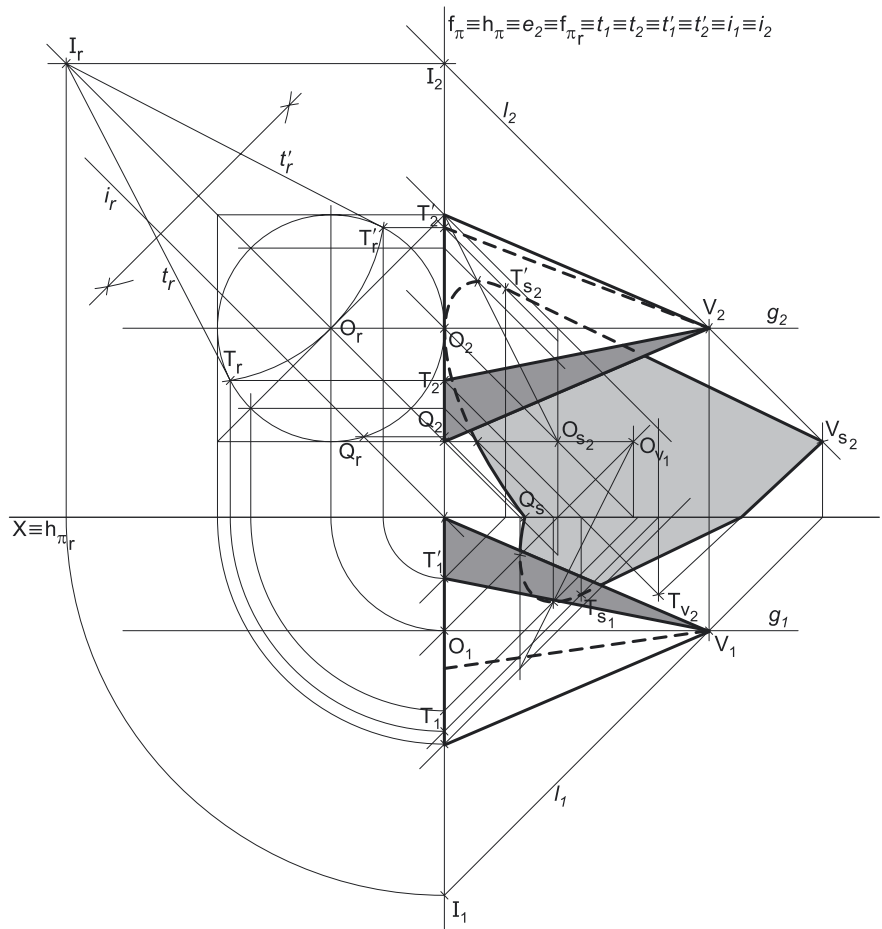
Em seguida, desenharam-se a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido (que é um triângulo com um vértice em **V**₁ e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor afastamento da projeção horizontal da base) e a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do cone (que é outro triângulo, com um vértice em **V**₂ e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor cota da projeção frontal da base).

Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cone:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice do cone, um raio luminoso **l**; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano da base – o ponto **I**; **3.** pelo ponto **I** conduzem-se as retas tangentes à base do cone; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes à base do cone permitem-nos identificar, de forma imediata, as geratrizes que integram a linha separatriz luz/sombra (as **geratrizes separatrizes luz/sombra**).

1. Conduziu-se, pelo vértice da pirâmide (o ponto **V**), um raio luminoso **l** – o raio luminoso **l** está definido por um ponto (o ponto **V**) e por uma direção (a direção luminosa convencional).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano da base – o ponto **I**. A determinação do ponto **I** é direta, pois o plano π é um plano duplamente projetante (trata-se da interseção entre uma reta não projetante e um plano projetante).
3. Pelo ponto **I** conduziram-se as retas rasantes à base do cone – as retas **t** e **t'** (que são as retas de interseção dos dois **planos tangentes luz/sombra** com o

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

plano que contém a base – o plano π).

É possível determinar, de forma direta as projeções das retas t e t' mas, uma vez que se trata de retas de perfil (cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**), não é possível garantir a tangência das retas t e t' em relação à base do cone, de forma direta em projeções – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Assim, recorreu-se a um processo geométrico auxiliar – optou-se pelo rebatimento do plano π para o Plano Frontal de Projeção. A charneira do rebatimento foi o traço frontal do plano (f_π), que se identificou imediatamente. Os planos ortogonais à charneira (que contém os arcos do rebatimento) são planos horizontais (de nível), pelo que os pontos mantêm as suas cotas ao longo do rebatimento e os arcos do rebatimento projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção.

Em seguida, rebateram-se os pontos O e I , o que nos permitiu determinar O_r e I_r . Com o compasso, fazendo centro em O_r e com 3 cm de raio, desenhou-se a circunferência que delimita o círculo em rebatimento, em verdadeira grandeza. Por I_r conduziram-se as retas t_r e t'_r (as retas t e t' em rebatimento) – t_r passa por I_r e é tangente à base em rebatimento em T_r (está definida por dois pontos) e t'_r passa por I_r e é tangente à base em rebatimento em T'_r (está igualmente definida por dois pontos)

Tenha em conta que a determinação das retas t e t' se processou com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência em rebatimento) que passam por um ponto exterior (o ponto I_r). Esse processo fez-nos determinar, em primeiro lugar, os pontos de tangência – os pontos T_r e T'_r .

4. As retas t e t' são tangentes à base do cone nos pontos T e T' , respetivamente. Assim, as geratrizes $[TV]$ e $[T'V]$ são, imediatamente, as **geratrizes separatrizes luz/sombra** (as geratrizes de contacto ou de tangência, segundo as quais os planos λ e λ' são tangentes à superfície lateral do sólido).

Nesse sentido, desenharam-se as duas projeções das geratrizes $[TV]$ e $[T'V]$. A geratriz $[TV]$ é visível em projeção frontal e invisível em projeção horizontal. A geratriz $[T'V]$ é invisível em projeção frontal e visível em projeção horizontal.

As geratrizes $[TV]$ e $[T'V]$ separam a parte da superfície lateral do cone que está **iluminada** da parte que está **em sombra** – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), a parte **iluminada** da superfície lateral do sólido é a parte correspondente ao **arco menor $\overline{TT'}$** . A base do cone está também iluminada. A parte da superfície lateral do cone que corresponde ao **arco maior $\overline{TT'}$** está **em sombra**. Assim, a linha separatriz luz/sombra é a linha mista fechada $[TV \overline{TT'}]$, que integra as geratrizes $[TV]$ e $[T'V]$, bem como o **arco maior $\overline{TT'}$** .

Em projeção frontal, a parte da superfície lateral do cone que está em sombra e que é visível é a parte compreendida entre a projeção frontal da geratriz $[TV]$ e a geratriz de menor cota do contorno aparente frontal do cone – assim, essa é a **sombra própria** a assinalar, **em projeção frontal**.

Em projeção horizontal, a parte da superfície lateral do cone que está em sombra e que é visível é a parte compreendida entre a projeção horizontal da geratriz $[T'V]$ e a geratriz de menor afastamento do contorno aparente horizontal do cone – assim, essa é a **sombra própria** a assinalar, **em projeção horizontal**.

A **sombra própria** do cone foi assinalada com uma mancha clara e uniforme – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Determinação da sombra projetada do cone:

A **sombra projetada** do cone é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cone** nos planos de projeção.

Nesse sentido, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**. T_{s_1} é a sombra real do ponto T (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que por ele passa. T'_{s_2} é a sombra real do ponto T' (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que por ele passa. V_{s_2} é a sombra real do ponto V (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que por ele passa. As sombras reais dos vértices da linha separatriz luz/sombra do cone situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do cone **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

V_{s_2} e T'_{s_2} situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da geratriz $[T'V]$ não admite ponto de quebra – o segmento $[T'_{s_2} V_{s_2}]$ é a sombra projetada da geratriz $[T'V]$.

T_{s_1} situa-se no **SPHA** e V_{s_2} situa-se no **SPFS** – assim, existe um ponto de quebra entre T_{s_1} e V_{s_2} (que se situam em Planos de Projeção distintos). Esse ponto de quebra foi determinado com o recurso à sombra virtual do ponto T – T_{v_2} , T_{v_2} é a sombra virtual do ponto T – situa-se no **SPFI** e é o traço frontal do raio luminoso que por ele passa. O segmento $[T_{v_2} V_{s_2}]$ é a sombra projetada da geratriz $[TV]$ no Plano Frontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento $[T_{v_2} V_{s_2}]$ com o eixo X é o ponto de quebra da sombra da geratriz $[TV]$ (que não se identificou). Após a determinação do ponto de quebra, foi possível desenhar a sombra projetada da geratriz $[TV]$ – é a linha quebrada que tem um extremo em T_{s_1} , o outro extremo em V_{s_2} e um vértice no ponto de quebra.

Tendo em conta que T_{s_1} se situa no **SPHA** e T'_{s_2} se situa no **SPFS**, é possível concluir que a sombra do **arco maior $\overline{TT'}$** admite um ponto de quebra. Como em situações semelhantes, a determinação do ponto de quebra da sombra de uma circunferência (ou de um arco de circunferência) deve processar-se com o recurso ao **método do plano luz/sombra passante**.

Para evitar uma maior complexidade da resolução gráfica apresentada, optou-se por simplificar este procedimento com um raciocínio simples. Dado o facto de a direção luminosa ser a **direção luminosa convencional**, o **plano luz/sombra passante** é o próprio $\beta_{1/3}$. Assim, com vista a uma maior economia de traçados que possibilite uma melhor leitura da resolução proposta, não se desenharam as projeções do raio luminoso que nos permitiria determinar a reta i (a reta de interseção do plano π com o **plano luz/sombra passante** – o $\beta_{1/3}$), tendo-se determinado, imediatamente, as suas projeções. A reta i é uma reta de perfil passante do plano π , que faz, com os traços do plano π , ângulos de 45° . Note que, caso a direção luminosa não fosse a convencional, a determinação da reta i passaria, **necessariamente** pela determinação do ponto de interseção de π com um raio luz/sombra passante com a direção luminosa dada (à semelhança das restantes situações já apresentadas).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Tendo em conta que tanto o círculo (a base do cone) como a reta i estão contidos num plano de perfil, as projeções das duas figuras não verificam o **Critério de Reversibilidade** pelo que não é possível averiguar a posição da reta i em relação ao círculo. Assim, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar – optou-se pelo recurso ao rebatimento do plano π já efetuado. Assim, desenhou-se a reta i_r (a reta i no rebatimento efetuado) – a reta i_r está definida por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo X , que é fixo) e por uma direção (faz ângulos de 45° com os dois traços do plano π , em rebatimento).

A reta i_r é secante à circunferência – a reta i_r corta o arco $\widehat{T_r T'_r}$ (o **arco maior** $\widehat{TT'}$ em rebatimento) no ponto Q_r , pelo que é possível concluir que o **arco maior** $\widehat{TT'}$ produz sombra nos dois planos de projeção. O **arco** \widehat{TQ} produz sombra no Plano Horizontal de Projeção (no **SPHA**) – essa sombra é um segmento de elipse, pois o arco não é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção. O **arco** $\widehat{QT'}$ produz sombra no Plano Frontal de Projeção (no **SPFS**) – essa sombra é outro segmento de elipse, pois o arco também não é paralelo ao Plano Frontal de Projeção. Para desenhar esses dois segmentos de elipse é necessário inscrever a circunferência num quadrado de lados paralelos aos planos de projeção – lados paralelos aos traços do plano π . Assim, efetuou-se a inscrição da circunferência num quadrado de lados paralelos aos traços do plano em rebatimento.

Os dois segmentos de elipse (que são as sombras do **arco maior** $\widehat{TT'}$ nos dois planos de projeção) determinaram-se a partir das sombras das partes correspondentes do quadrado naqueles planos de projeção (à semelhança do exposto no relatório do exercício **215.**), o que nos permitiu ir determinando, sucessivamente, diversos pontos de cada uma das curvas (os segmentos de elipses). Nesse sentido, aconselha-se o acompanhamento do desenho das duas curvas com a leitura do relatório do exercício **215**. Sublinha-se, no entanto, que, nesta situação, existe um lado do quadrado que está contido no Plano Frontal de Projeção – o seu lado vertical de menor afastamento.

O desenho das duas curvas permitiu concluir o desenho do contorno da **sombra projetada** do cone nos planos de projeção, que é composta pelos segmentos de elipses desenhados (e que têm, ambos, uma parte invisível) e pela linha quebrada que tem vértices em T_{s_1} , T'_{s_2} , V_{s_2} e nos dois pontos de quebra determinados. Note que as curvas têm de ser **concordantes** com a sombra da geratriz $[TV]$ em T_{s_1} (o segmento de elipse que se situa no **SPHA**), tal como também têm de ser **concordantes** com a sombra da geratriz $[T'V]$ em T'_{s_2} (o segmento de elipse que se situa no **SPFS**).

Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra com uma mancha clara e uniforme – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

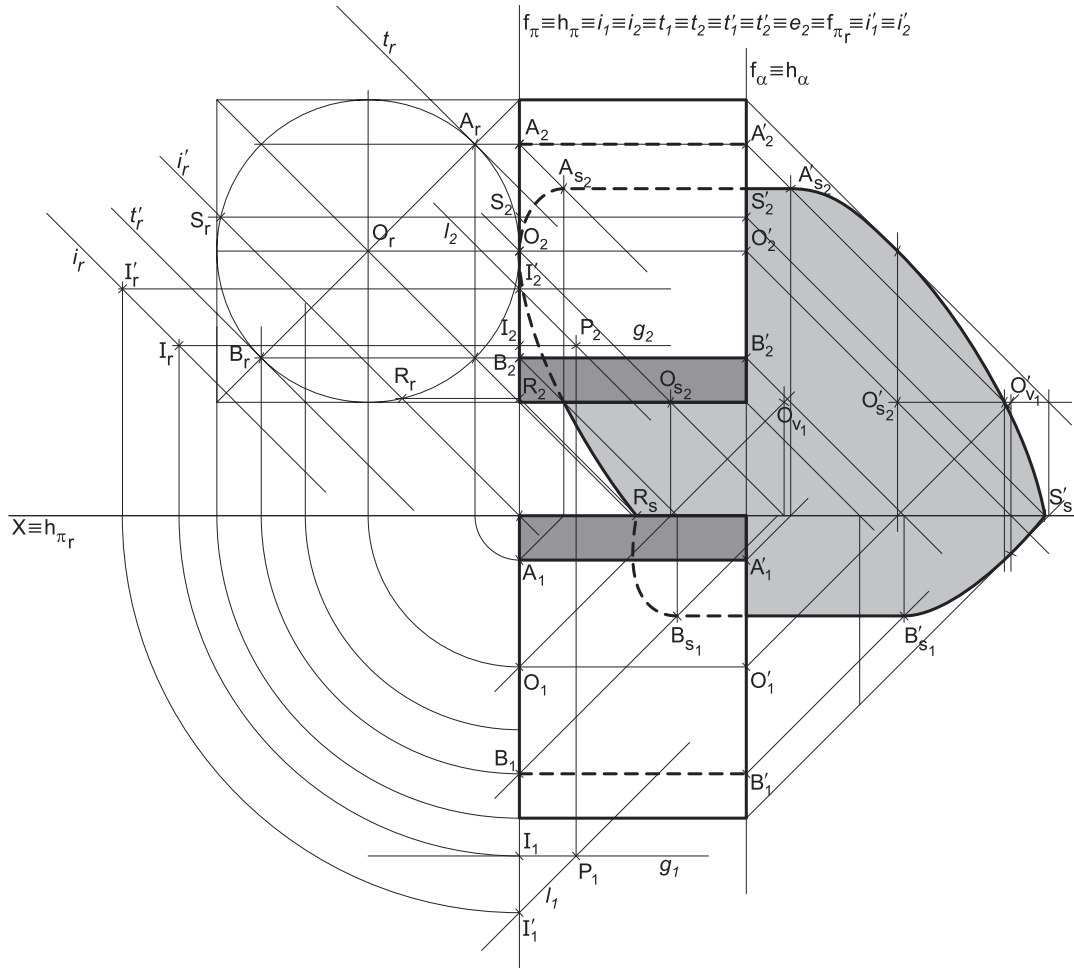
Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo cone) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

Traçado:

O eixo X , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o cone e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços do plano π (o plano que contém a base), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, dos traçados referentes ao rebatimento do plano π , de todos os traçados referentes à construção dos dois segmentos de elipse ou, ainda, das retas i , t e t' em rebatimento), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o cone ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cone. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

231.



Dados:

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano π (o plano de perfil que contém a base mais à esquerda do cilindro) pelos seus traços, contendo o ponto **O** – o plano π é um plano duplamente projetante, pelo que os seus traços contêm as projeções homónimas do ponto **O**. A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

Resolução:

Determinação das projeções do cilindro:

O cilindro é tangente ao Plano Frontal de Projeção ao longo de uma geratriz e o centro da base mais à esquerda tem 4 cm de afastamento, pelo que é possível concluir, de forma imediata, que as bases do sólido têm 4 cm de raio.

O plano que contém a base mais à esquerda do cilindro (o plano π) não é paralelo a qualquer dos planos de projeção, pelo que a base não se projeta em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projeções. No entanto, é possível desenhar imediatamente as duas projeções do círculo (a base mais à esquerda do sólido) – tendo em conta que ambas as projeções sofrem a redução máxima, as duas projeções do círculo reduzem-se a segmentos de reta sobre os traços homónimos do plano π .

Assim, a projeção horizontal do círculo é um segmento de reta com 8 cm de comprimento (o comprimento do diâmetro) de que **O**₁ (a projeção horizontal do ponto **O**) é o seu ponto médio – a projeção horizontal do círculo corresponde, na prática, à projeção horizontal do seu diâmetro de topo. De forma semelhante, a projeção frontal do círculo é um segmento de reta com 8 cm de comprimento (o comprimento do diâmetro) de que **O**₂ (a projeção frontal do ponto **O**) é o seu ponto médio – a projeção frontal do círculo corresponde, na prática, à projeção frontal do seu diâmetro vertical.

A altura de um cilindro é a distância entre os planos que contêm as bases. Assim, os dois planos de perfil que contêm as bases do sólido distam 6 cm (a altura do cilindro) – o plano α (o plano que contém a base mais à direita do sólido) está 6 cm para a direita do plano π .

Trata-se de um **cilindro de revolução**, pelo que as suas geratrizes são ortogonais aos planos das bases, ou seja, estão contidas em retas fronto-horizontais. Este raciocínio permitiu-nos determinar as projeções do ponto **O'** (o centro da base mais à direita), bem como as duas projeções da base mais à direita do sólido. Estas são (à semelhança do exposto para a base mais à esquerda) dois segmentos de reta, com 8 cm de comprimento, de que as projeções do ponto **O'** são os respetivos pontos médios.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, desenharam-se as projeções dos contornos aparentes do cilindro. A **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do sólido é um **retângulo**, cujos vértices são os pontos de maior e menor afastamento das projeções horizontais das duas bases. A **projeção frontal do contorno aparente frontal** do cilindro é outro retângulo, cujos vértices são os pontos de maior e de menor cota das projeções frontais das duas bases.

Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cilindro:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** por um ponto **P** qualquer, exterior ao cilindro, conduzir duas retas – uma reta paralela às geratrizes do cilindro e uma outra reta paralela à direção luminosa; **2.** determinar a reta **i**, a reta de interseção do plano definido pelas duas retas com o plano da base (de referência) do cilindro; **3.** conduzir as retas tangentes à base (de referência) do cilindro que são paralelas à reta **i**; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes à base (de referência) do cilindro permitem-nos determinar, de forma imediata, as geratrizes que integram a linha separatriz luz/sombra.

1. Por um ponto **P** qualquer, exterior ao sólido, conduziram-se duas retas – a reta **g**, fronto-horizontal (paralela às geratrizes do cilindro), e a reta **l** (um raio luminoso). Estas duas retas, porque são concorrentes, definem um plano (o plano λ) – esse plano tem a orientação dos planos tangentes luz/sombra.
2. Determinou-se a reta **i**, a reta de interseção do plano definido pelas retas **g** e **l** (o plano λ) com o plano da base (de referência) do cilindro (considerou-se que a base de referência do cilindro é a sua base mais à esquerda). A reta **i** está definida por dois pontos – o ponto **I** (o ponto de interseção da reta **g** com o plano π) e o ponto **I'** (o ponto de interseção da reta **l** com o plano π).

A determinação dos pontos **I** e **I'** foi direta, pois o plano π é um plano duplamente projetante (trata-se da interseção entre retas não projetantes e um plano projetante).

3. Conduziram-se as retas tangentes à base (de referência) do cilindro que são paralelas à reta **i** – as retas **t** e **t'**, que são as retas de interseção dos dois **planos tangentes luz/sombra** com o plano que contém a base (o plano π).

É possível determinar, de forma direta as projeções das retas **t** e **t'** mas, uma vez que se trata de retas de perfil (cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**), não é possível garantir (de forma direta, em projeções) nem a tangência das retas **t** e **t'** em relação à base do cilindro, nem sequer o paralelismo das retas **t** e **t'** em relação à reta **i** – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Assim, recorreu-se a um processo geométrico auxiliar – optou-se pelo rebatimento do plano π para o Plano Frontal de Projeção. A charneira do rebatimento foi o traço frontal do plano (f_{π}), que se identificou imediatamente. Os planos ortogonais à charneira (que contém os arcos do rebatimento) são planos horizontais (de nível), pelo que os pontos mantêm as suas cotas ao longo do rebatimento e os arcos do rebatimento projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção.

Em seguida, rebateram-se os pontos **O**, **I** e **I'**, o que nos permitiu determinar **O_r**, **I_r** e **I'_r**. Com o compasso, fazendo centro em **O_r** e com 4 cm de raio, desenhou-se a circunferência que delimita o círculo em rebatimento, em verdadeira grandeza. Pelos pontos **I_r** e **I'_r**, conduziu-se a reta **i_r** (a reta **i** rebatida, que está definida por dois pontos). Em seguida, conduziram-se as retas **t_r** e **t'_r** (as retas **t** e **t'** em rebatimento), paralelas à reta **i_r** – **t_r** passa é tangente à base em rebatimento em **A_r** e é paralela a **i_r** (está definida por um ponto e uma direção) e **t'_r** é tangente à base em rebatimento em **B_r** e é também paralela a **i_r** (está igualmente definida por um ponto e uma direção).

Tenha em conta que a determinação das retas **t** e **t'** se processou com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência em rebatimento) que são paralelas a uma reta dada (a reta **i_r**). Esse processo fez-nos determinar, em primeiro lugar, os pontos de tangência – os pontos **A_r** e **B_r**.

4. As retas **t** e **t'** são tangentes à base (de referência) do cilindro nos pontos **A** e **B**, respetivamente. Assim, as geratrizes **[AA']** e **[BB']** são, imediatamente, as **geratrizes separatrizes luz/sombra** (as geratrizes de contacto ou de tangência, segundo as quais os planos λ e λ' são tangentes à superfície lateral do sólido).

Nesse sentido, desenharam-se as duas projeções das geratrizes **[AA']** e **[BB']** – note que o ponto **A'** é o extremo da geratriz **[AA']** que se situa na base mais à direita do cilindro, tal como o ponto **B'** é o extremo da geratriz **[BB']** que se situa na base mais à direita do cilindro. A geratriz **[AA']** é visível em projeção horizontal e invisível em projeção frontal. A geratriz **[BB']** é invisível em projeção horizontal e visível em projeção frontal.

As geratrizes **[AA']** e **[BB']** separam a parte da superfície lateral do cilindro que está **iluminada** da parte que está **em sombra** – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), a parte **iluminada** da superfície lateral do sólido é a parte correspondente à semicircunferência **AB** de maior afastamento. A base mais à esquerda do cilindro está também iluminada. A parte da superfície lateral do cilindro que corresponde à semicircunferência **AB** de menor afastamento está **em sombra**, assim, como a base mais à direita do sólido. Desta forma, a linha separatriz luz/sombra é a linha mista fechada **[AB B'A']**, que integra as geratrizes **[AA']** e **[BB']**, bem como a **semicircunferência AB de menos afastamento** (da base mais à esquerda) e a **semicircunferência A'B' de maior afastamento** (da base mais à direita).

Em projeção frontal, a parte da superfície lateral do cilindro que está em sombra e que é visível é a parte compreendida entre a projeção frontal da geratriz **[BB']** e a geratriz de menor cota do contorno aparente frontal do cilindro – assim, essa é a **sombra própria** a assinalar, **em projeção frontal**. Note que a base mais à direita (que está em sombra) é invisível em projeção frontal (por ser projetante frontal).

Em projeção horizontal, a parte da superfície lateral do cilindro que está em sombra e que é visível é a parte compreendida entre a projeção horizontal da geratriz **[AA']** e a geratriz de menor afastamento do contorno aparente horizontal do cilindro – assim, essa é a **sombra própria** a assinalar, **em projeção horizontal**. Note que a base mais à direita (que está em sombra) é invisível em projeção horizontal (por ser projetante horizontal).

A **sombra própria** do cilindro foi assinalada com uma mancha clara e uniforme – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Determinação da sombra projetada do cilindro:

A **sombra projetada** do cilindro é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cilindro** nos planos de projeção.

Nesse sentido, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**. A_{s_2} é a sombra real do ponto **A** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que por ele passa. A'_{s_2} é a sombra real do ponto **A'** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que por ele passa. B_{s_1} é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que por ele passa. B'_{s_1} é a sombra real do ponto **B'** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que por ele passa. As sombras reais dos vértices da linha separatriz luz/sombra do cilindro situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do cilindro **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

A_{s_2} e A'_{s_2} situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da geratriz **[AA']** não admite ponto de quebra – o segmento $[A_{s_2}A'_{s_2}]$ é a sombra projetada da geratriz **[AA']**. B_{s_1} e B'_{s_1} situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da geratriz **[BB']** não admite ponto de quebra – o segmento $[B_{s_1}B'_{s_1}]$ é a sombra projetada da geratriz **[BB']**.

Tendo em conta que A_{s_2} se situa no **SPFS** e B_{s_1} se situa no **SPHA**, é possível concluir que a sombra da semicircunferência \widehat{AB} (que integra a linha separatriz luz/sombra) admite um ponto de quebra. Tendo em conta que A'_{s_2} se situa no **SPFS** e B'_{s_1} se situa no **SPHA**, é possível concluir que a sombra da semicircunferência $\widehat{A'B'}$ (que integra a linha separatriz luz/sombra) admite um ponto de quebra. Como em situações semelhantes, a determinação dos pontos de quebra das sombras de circunferências (ou de arcos de circunferências) deve processar-se com o recurso ao **método do plano luz/sombra passante**.

Para evitar uma maior complexidade da resolução gráfica apresentada, optou-se por simplificar este procedimento com um raciocínio simples. Dado o facto de a direcção luminosa ser a **direcção luminosa convencional**, o **plano luz/sombra passante** é o próprio $\beta_{1/3}$. Assim, com vista a uma maior economia de traçados que possibilite uma melhor leitura da resolução proposta, não se desenharam as projecções do raio luminoso que nos permitiria determinar a reta i' (a reta de intersecção do plano π com o **plano luz/sombra passante** – o $\beta_{1/3}$), tendo-se determinado, imediatamente, as suas projecções. A reta i' é uma reta de perfil passante do plano π , que faz, com os traços do plano π , ângulos de 45° . Note que, caso a direcção luminosa não fosse a convencional, a determinação da reta i' passaria, **necessariamente** pela determinação do ponto de intersecção de π com um raio luz/sombra passante com a direcção luminosa dada (à semelhança das restantes situações já apresentadas).

Tendo em conta que tanto o círculo (a base mais à esquerda do cilindro) como a reta i' estão contidos num plano de perfil, as projecções das duas figuras não verificam o **Critério de Reversibilidade** pelo que não é possível averiguar a posição da reta i' em relação ao círculo. Assim, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar – optou-se pelo recurso ao rebatimento do plano π já efetuado. Assim, desenhou-se a reta i'_r (a reta i' no rebatimento efetuado) – a reta i'_r está definida por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo **X**, que é fixo) e por uma direcção (faz ângulos de 45° com os dois traços do plano π , em rebatimento).

A reta i'_r é secante à circunferência – a reta i'_r corta a semicircunferência $\widehat{A_rB_r}$ (a semicircunferência da base mais à esquerda que integra a linha separatriz luz/sombra – a semicircunferência de menor cota) no ponto R_r , pelo que é possível concluir que o arco \widehat{AB} produz sombra nos dois planos de projeção. Inverteu-se o rebatimento e determinou-se a projecção frontal do ponto **R** (não se determinou a sua projecção horizontal, pois é desnecessária). Pela projecção frontal do ponto **R** conduziu-se a projecção frontal do raio luminoso que por ele passa e determinou-se R_s – a sombra do ponto **R**, que se situa no eixo **X**. O ponto R_s é, assim, o ponto de quebra da sombra do arco \widehat{AB} (o ponto de quebra que se situa entre A_{s_2} e B_{s_1}).

O arco \widehat{BR} (da base mais à esquerda) produz sombra no Plano Horizontal de Projeção (no **SPHA**) – essa sombra é um segmento de elipse, pois o arco não é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção. O arco \widehat{RA} (da base mais à esquerda) produz sombra no Plano Frontal de Projeção (no **SPFS**) – essa sombra é outro segmento de elipse, pois o arco também não é paralelo ao Plano Frontal de Projeção. Para desenhar esses dois segmentos de elipse é necessário inscrever a circunferência num quadrado de lados paralelos aos planos de projeção – lados paralelos aos traços do plano π . Assim, efetuou-se a inscrição da circunferência num quadrado de lados paralelos aos traços do plano em rebatimento.

Em seguida, há que determinar o ponto de quebra da sombra do arco $\widehat{A'B'}$ (o ponto de quebra que se situa entre A'_{s_2} e B'_{s_1}). Nesse sentido, estabeleceu-se uma correspondência entre as duas bases, para evitar um outro rebatimento (o rebatimento do plano α , o plano que contém a base mais à direita do cilindro). A reta i'_r é secante à circunferência – a reta i'_r corta a outra semicircunferência $\widehat{A_rB_r}$ (a semicircunferência de maior cota) no ponto S_r , pelo que é possível concluir que esse outro arco \widehat{AB} também produziria sombra nos dois planos de projeção. Inverteu-se o rebatimento e determinou-se a projecção frontal do ponto **S** (não se determinou a sua projecção horizontal, pois é desnecessária) – o ponto **S** é o extremo mais à esquerda de uma geratriz do cilindro (a geratriz **[SS']**). Assim, determinou-se a projecção frontal do ponto **S'**, que é o extremo mais à direita dessa geratriz (não se determinou a sua projecção horizontal, pois é desnecessária). Pela projecção frontal do ponto **S'** conduziu-se a projecção frontal do raio luminoso que por ele passa e determinou-se S'_s – a sombra do ponto **S'**, que se situa no eixo **X**. O ponto S'_s é, assim, o ponto de quebra da sombra do arco $\widehat{A'B'}$ (o outro arco da linha separatriz luz/sombra do cilindro). O ponto S'_s é, assim, o ponto de quebra que se situa entre A'_{s_2} e B'_{s_1} .

O arco $\widehat{S'B'}$ (da base mais à direita) produz sombra no Plano Horizontal de Projeção (no **SPHA**) – essa sombra é um segmento de elipse, pois o arco não é paralelo ao Plano Horizontal de Projeção. O arco $\widehat{S'A'}$ (da base mais à direita) produz sombra no Plano Frontal de Projeção (no **SPFS**) – essa sombra é outro segmento de elipse, pois o arco também não é paralelo ao Plano Frontal de Projeção. Para desenhar esses dois segmentos de elipse é necessário inscrever a circunferência num quadrado de lados paralelos aos planos de projeção – lados paralelos aos traços do plano π . Assim, para evitar o rebatimento do plano α , estabeleceu-se novamente a correspondência entre as duas bases, que nos permitiu determinar o ponto **S'** – nesse sentido, é possível usar o quadrado em que se inscreveu a base mais à esquerda do cilindro.

Os **quatro segmentos de elipse** (que são as sombras das duas bases do cilindro nos dois planos de projeção) determinaram-se a partir das sombras das partes correspondentes do quadrado naqueles planos de projeção (à semelhança do exposto no relatório do exercício **215**), o que nos permitiu ir determinando, sucessivamente, diversos pontos de cada uma das curvas (os segmentos de elipses). Nesse sentido, aconselha-se o acompanhamento do desenho das duas curvas com a leitura do relatório do exercício **215**. Sublinha-se, no entanto, que, nesta situação, existe um lado do quadrado que está contido no Plano Frontal de Projeção – o seu lado vertical de menor afastamento.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por fim, por G_1 conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – o ponto de interseção da perpendicular à charneira com r_1 (a projeção horizontal da reta r) é G_1 (a projeção horizontal do ponto G). A projeção frontal do ponto G (G_2) situa-se sobre r_2 (a projeção frontal da reta r).

A partir das projeções dos três pontos (F , G e H), desenharam-se as projeções do triângulo $[FGH]$.

Determinação da sombra do triângulo $[FGH]$ nos planos de projeção:

Em seguida, determinaram-se as **sombras reais** dos três vértices do triângulo – os pontos F , G e H . O ponto F é um ponto do Plano Frontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente, $F_{s_2} \equiv F_2$. O ponto H é um ponto do Plano Horizontal de Projeção, pelo que a sua sombra real está coincidente com o próprio ponto – tem-se, imediatamente, $H_{s_1} \equiv H_1$. O raio luminoso que passa pelo ponto G é um raio luminoso passante, pelo que a sombra do ponto G (G_s) se situa o eixo X – G_s situa-se tanto no **SPHA** como no **SPFS**. As sombras reais dos quatro vértices da figura situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do quadrado **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

H_{s_1} e G_s situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra do lado $[HG]$ do triângulo não admite ponto de quebra – o segmento $[H_{s_1}G_s]$ é a sombra projetada do lado $[HG]$ do triângulo (e situa-se, na totalidade, no **SPHA**). F_{s_2} e G_s situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra do lado $[FG]$ do triângulo não admite ponto de quebra – o segmento $[F_{s_2}G_s]$ é a sombra projetada do lado $[FG]$ do triângulo (e situa-se, na totalidade, no **SPFS**). O mesmo já não acontece em relação ao lado $[FH]$ do triângulo – de facto, existe um ponto de quebra entre F_{s_2} e H_{s_1} (que se situam em Planos de Projeção distintos).

Para determinar os pontos de quebra recorreu-se à sombra virtual do ponto H – H_{v_2} . H_{v_2} é a sombra virtual do ponto H – situa-se no **SPFI** e é o traço frontal horizontal do raio luminoso que passa pelo ponto H . O segmento $[F_{s_2}H_{v_2}]$ é a sombra projetada do segmento $[FH]$ no Plano Frontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento $[F_{s_2}H_{v_2}]$ (a sombra do segmento no Plano Frontal de Projeção) com o eixo X é o ponto de quebra da sombra do segmento $[FH]$ (que não se identificou, por não ser necessário).

A linha quebrada fechada que tem vértices em H_{s_1} , F_{s_2} , G_s e no ponto de quebra determinado é a **sombra real** do triângulo $[FGH]$ nos planos de projeção. Note que a parte oculta (a parte invisível) da sombra se identificou a traço interrompido. Em seguida, preencheu-se a **parte visível** da sombra do triângulo com uma mancha clara e uniforme – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Identificação da eventual situação de sombra própria visível nas projeções do triângulo $[FGH]$:

O triângulo, sendo uma figura plana, tem duas faces – quando exposto a uma situação luminosa, à partida uma das faces está iluminada e a outra face está sombreada ou em sombra própria (exceto em algumas situações articulares). Assim, é conveniente averiguar se, em algumas das projeções, a face visível é a face sombreada.

Para averiguar se a face visível, em projeção frontal, está iluminada ou em sombra, considerou-se um movimento rotativo qualquer – o sentido dos ponteiros do relógio. A **sequência dos vértices da projeção frontal** do triângulo, a partir do ponto F , é: F_2 , G_2 e H_2 . A **sequência dos vértices da sombra projetada** do triângulo, também a partir do vértice F (da sombra do vértice F), é: F_{s_2} , G_s e H_{s_1} . As duas sequências apresentam os vértices pela mesma ordem, pelo que a face do triângulo que é visível em projeção frontal é a face **iluminada**.

Para averiguar se a face visível, em projeção horizontal, está iluminada ou em sombra, considerou-se um movimento rotativo qualquer – mais uma vez considerou-se o sentido dos ponteiros do relógio. A **sequência dos vértices da projeção horizontal** do triângulo, a partir do ponto F , é: F_1 , G_1 e H_1 . A **sequência dos vértices da sombra projetada** do triângulo, também a partir do vértice A (da sombra do vértice F), é: F_{s_2} , G_s e H_{s_1} . As duas sequências apresentam os vértices pela mesma ordem, pelo que a face do triângulo que é visível em projeção horizontal é a face **iluminada**.

Traçado:

O eixo X , que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o triângulo $[FGH]$ e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços do plano p (o plano que contém a figura), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos ou dos traçados referentes ao rebatimento do plano p e necessários à construção das projeções do triângulo), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o triângulo $[FGH]$ ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o quadrado. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

233.

Dados:

Em primeiro lugar, representou-se a projeção horizontal do ponto **O** (O_1), em função do afastamento dado. Os dados não nos permitem representar mais nada do cone, de uma forma direta. A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

Resolução:*Determinação das projeções do cone:*

A base do cone está contida num plano paralelo ao Plano Horizontal de Projeção, pelo que se projeta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projeção. Assim, com o compasso, fazendo centro em O_1 (a projeção horizontal do ponto **O**) e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a projeção horizontal da base do sólido.

Trata-se de um **cone de revolução** com a sua base contida num plano horizontal (de nível), pelo que o eixo do sólido está contido numa reta vertical (ortogonal ao plano da base), que é uma reta projetante horizontal. Assim, tem-se imediatamente $O_1 \equiv V_1$. Tendo em conta que o ponto **V** tem afastamento nulo, foi possível obter as duas projeções do ponto **V**.

As geratrizes do cone medem 8,5 cm e todas as geratrizes têm o mesmo comprimento (por se tratar de um cone de revolução). No entanto, as geratrizes que se projetam em verdadeira grandeza em projeção frontal são as geratrizes frontais (de frente), ou seja, as geratrizes do contorno aparente frontal (as geratrizes que contêm pelos pontos de maior e de menor abcissa da base). Considerou-se a geratriz mais à esquerda do contorno aparente frontal – a geratriz **[AV]**, sendo **A** o ponto de maior abcissa da base (cuja projeção horizontal se determinou de forma imediata). Com o compasso, fazendo centro na projeção frontal do ponto **V** (V_2) e com 8,5 cm de raio (o comprimento das geratrizes), desenhou-se um arco de circunferência, que nos permitiu determinar A_2 (a projeção frontal do ponto **A**), na linha de chamada de A_1 .

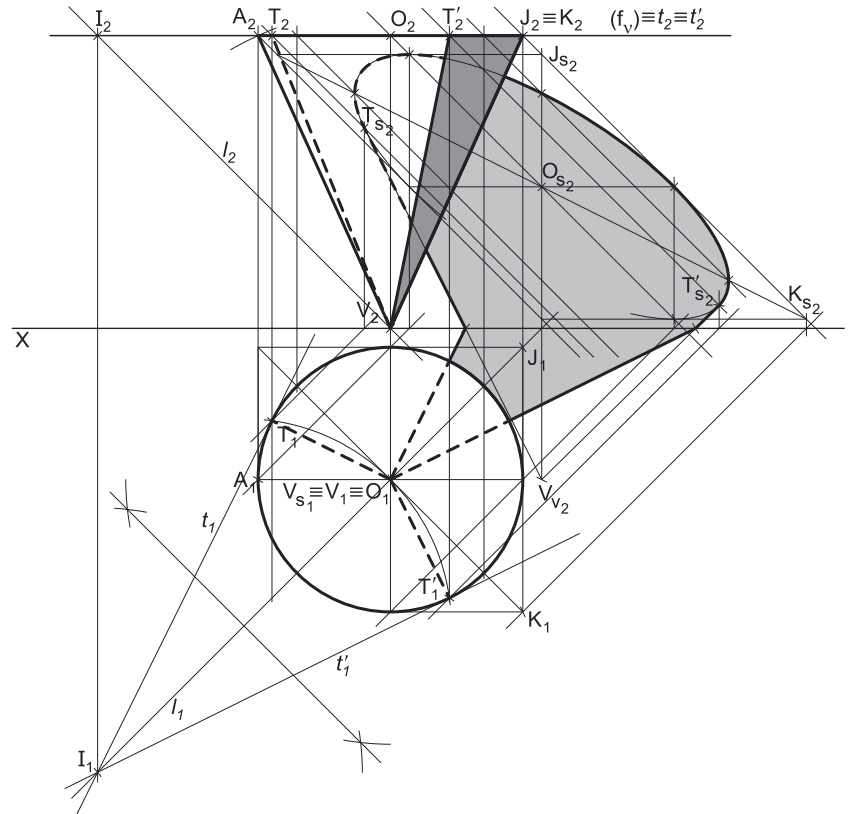
Em seguida, representou-se o plano v (o plano horizontal que contém a base do cone) pelo seu traço frontal. O plano v é um plano projetante frontal, pelo que o seu traço frontal (f_v) passa por A_2 (a projeção frontal do ponto **A**). O plano v não tem traço horizontal, pelo que o seu traço frontal se identificou entre parêntesis. Em seguida, determinou-se a projeção frontal do ponto **O** (O_2), sobre o traço frontal do plano v (f_v) e determinou-se, ainda, a projeção frontal da base, que é um segmento de reta sobre o traço frontal do plano v – corresponde à projeção frontal do seu diâmetro fronto-horizontal.

Por fim, desenharam-se a **projeção frontal do contorno aparente frontal** do sólido (que é um triângulo com um vértice em V_2 e os outros dois vértices nos pontos de maior e de menor abcissa da projeção frontal da base) e a **projeção horizontal do contorno aparente horizontal** do cone (que é a própria circunferência que delimita a base).

Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria do cone:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice do cone, um raio luminoso l ; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso l com o plano da base – o ponto **I**; **3.** pelo ponto **I** conduzem-se as retas tangentes à base do cone; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes à base do cone permitem-nos identificar, de forma imediata, as geratrizes que integram a linha separatriz luz/sombra (as **geratrizes separatrizes luz/sombra**).

1. Conduziu-se, pelo vértice da pirâmide (o ponto **V**), um raio luminoso l – o raio luminoso l está definido por um ponto (o ponto **V**) e por uma direção (a direção luminosa convencional).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso l com o plano da base – o ponto **I**. O ponto **I** teve determinação imediata, a partir da sua projeção frontal, pois trata-se da interseção entre uma reta não projetante (o raio luminoso l) com um plano projetante frontal (o plano v).
3. Pelo ponto **I** conduziram-se as retas tangentes à base do cone – as retas t e t' . As retas t e t' são as retas de interseção dos dois **planos tangentes luz/sombra** com o plano v (o plano que contém a base do cone).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Tenha em conta que a determinação das retas t e t' se processou com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência que delimita a projeção horizontal da base) que passam por um ponto exterior (o ponto I_1 , que é a projeção horizontal do ponto I). Esse processo fez-nos determinar, em primeiro lugar, os pontos de tangência – os pontos T_1 e T'_1 (as projeções horizontais dos pontos T e T').

4. As retas t e t' são tangentes à base do cone nos pontos T e T' , respetivamente. Assim, as geratrizes $[TV]$ e $[T'V]$ são, imediatamente, as **geratrizes separatrizes luz/sombra** (as geratrizes de contacto ou de tangência, segundo as quais os planos λ e λ' são tangentes à superfície lateral do sólido).

Nesse sentido, desenharam-se as duas projeções das geratrizes $[TV]$ e $[T'V]$. As duas geratrizes são invisíveis em projeção horizontal (a superfície lateral do cone é invisível, na sua totalidade, em projeção horizontal) e a geratriz $[TV]$ é invisível em projeção frontal, por se situar na parte invisível da superfície lateral do cone.

As geratrizes $[TV]$ e $[T'V]$ separam a parte da superfície lateral do cone que está **iluminada** da parte que está **em sombra** – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), a parte **iluminada** da superfície lateral do sólido é a parte correspondente ao **arco menor $\overline{TT'}$** . A base do cone está também iluminada. A parte da superfície lateral do cone que corresponde ao **arco maior $\overline{TT'}$** está **em sombra**. Assim, a linha separatriz luz/sombra é a linha mista fechada $[TV \overline{TT'}]$, que integra as geratrizes $[TV]$ e $[T'V]$, bem como o **arco maior $\overline{TT'}$** .

Em projeção frontal, a parte da superfície lateral do cone que está em sombra e que é visível é a parte compreendida entre a projeção frontal da geratriz $[T'V]$ e a geratriz mais à direita do contorno aparente frontal do cone – assim, essa é a **sombra própria** a assinalar, **em projeção frontal**.

Em projeção horizontal, a superfície lateral do cone é invisível na sua totalidade, pelo que a parte dessa superfície que está em sombra é igualmente invisível na sua totalidade (a parte compreendida entre as projeções horizontais das geratrizes $[TV]$ e $[T'V]$ e que corresponde ao **arco maior $\overline{TT'}$**). Tendo em conta que a base (que é visível em projeção horizontal) está iluminada, em projeção horizontal não há qualquer **sombra própria** a assinalar.

A **sombra própria** do cone foi assinalada com uma mancha clara e uniforme – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Determinação da sombra projetada do cone:

A **sombra projetada** do cone é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada do cone** nos planos de projeção.

Nesse sentido, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**. T_{s_2} é a sombra real do ponto T (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que por ele passa. T'_{s_2} é a sombra real do ponto T' (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que por ele passa. O ponto V é um ponto do Plano Horizontal de Projeção, pelo que a sua sombra projetada está coincidente com o próprio ponto – tem-se imediatamente $V_1 \equiv V_{s_1}$ (V_{s_1} situa-se no **SPHA**). As sombras reais dos vértices da linha separatriz luz/sombra do cone situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) do cone **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

T_{s_2} e T'_{s_2} situam-se no **SPFS** e V_{s_1} situa-se no **SPHA** – assim, existe um ponto de quebra entre T_{s_2} e V_{s_1} (que se situam em Planos de Projeção distintos) e um outro ponto de quebra entre T'_{s_2} e V_{s_1} (que se situam igualmente em Planos de Projeção distintos). Para determinar os pontos de quebra recorreu-se à sombra virtual do ponto $V - V_{v_2}$. V_{v_2} é a sombra virtual do ponto V – situa-se no **SPFI** e é o traço frontal do raio luminoso l .

O segmento $[T_{s_2} V_{v_2}]$ é a sombra projetada da geratriz $[TV]$ no Plano Frontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento $[T_{s_2} V_{v_2}]$ com o eixo X é o ponto de quebra da sombra da geratriz $[TV]$ (que não se identificou). Após a determinação do ponto de quebra, foi possível desenhar a sombra projetada da geratriz $[TV]$ – é a linha quebrada que tem um extremo em T_{s_2} , o outro extremo em V_{s_1} e um vértice no ponto de quebra.

O segmento $[T'_{s_2} V_{v_2}]$ é a sombra projetada da geratriz $[T'V]$ no Plano Frontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**). O ponto de interseção do segmento $[T'_{s_2} V_{v_2}]$ com o eixo X é o ponto de quebra da sombra da geratriz $[T'V]$ (que também não se identificou). Após a determinação do ponto de quebra, foi possível desenhar a sombra projetada da geratriz $[T'V]$ – é a linha quebrada que tem um extremo em T'_{s_2} , o outro extremo em V_{s_1} e um vértice no ponto de quebra.

Após os procedimentos expostos, foi possível desenhar as sombras projetadas das duas geratrizes. No entanto, há que desenhar a sombra do arco maior $\overline{TT'}$, que é um arco de circunferência. Como em situações semelhantes, o **primeiro passo** na determinação da sombra de um círculo (ou circunferência ou arco de circunferência) consiste em averiguar a eventual existência de pontos de quebra, o que se processa com o recurso ao **método do plano luz/sombra passante**.

Nesta situação, e atendendo a que os extremos do arco $\overline{TT'}$ produzem, ambos, sombra no **SPFS**, é possível concluir, **de forma empírica**, que o arco $\overline{TT'}$ produz sombra exclusivamente no **SPFS**. No entanto, pode haver situações em que, mesmo com os dois extremos do arco produzindo sombra no mesmo plano de projeção (ambos no **SPHA** ou no **SPFS**), a sombra do arco admita pontos de quebra, o que não é a situação atual. Sendo assim, apesar de se passar, neste exercício, para a etapa seguinte (partindo do facto de que a sombra do arco $\overline{TT'}$ não admite pontos de quebra), desaconselha-se o recurso a esse «empirismo», aconselhando-se vivamente o recurso sistemático ao **método do plano luz/sombra passante**.

Como se referiu mais atrás, o **arco maior $\overline{TT'}$** produz sombra exclusivamente no **SPFS**, ou seja, a sua sombra será um **segmento de elipse** – o desenho desta curva requer um mínimo de **oito pontos** (dependendo das dimensões da figura) e, sempre que possível, o paralelogramo envolvente.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Nesse sentido, começou-se por inscrever arco maior $\overline{TT'}$ na parte correspondente de um quadrado de **lados paralelos ao eixo X**, desenhando em seguida as respetivas diagonais e medianas – a parte do quadrado que tem interesse para a determinação da sombra do arco maior $\overline{TT'}$ corresponde a 3/4 do quadrado total (os 3/4 que a figura apresenta e que englobam o arco $\overline{TT'}$ na sua totalidade). Os pontos em que as medianas se apoiam nos lados do quadrado permitem-nos determinar **quatro pontos do segmento de elipse**. Os pontos em que as diagonais do quadrado cortam o arco maior $\overline{TT'}$ permitem-nos determinar mais **três pontos do segmento de elipse**. Em seguida, há que determinar a sombra do quadrado no Plano Frontal de Projeção, bem como das suas medianas e diagonais.

Em primeiro lugar, determinou-se a sombra real do centro do círculo (o ponto **O**) – O_{s_2} é a sombra real do ponto **O** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que por ele passa. A sombra dos 3/4 do quadrado no Plano Frontal de Projeção corresponde a 3/4 de um paralelogramo – o **segmento de elipse** estará inscrita nesses 3/4 de paralelogramo.

A sombra dos 3/4 do quadrado determinou-se a partir das sombras dos seus dois vértices mais à direita – os pontos **J** e **K**. J_{s_2} e K_{s_2} são as sombras reais dos de um plano de topo (projetante frontal). Assim, e como é possível observar, a sombra do lado **[JK]** está sobre a projeção frontal dos raios luminosos que passam pelos dois pontos (que não se identificaram) e que corresponde, na prática, à projeção frontal da direção luminosa. De forma semelhante, a sombra do lado da figura que é paralelo a **[JK]** está igualmente sobre a projeção frontal da direção luminosa. **J** é o vértice mais à esquerda de um lado fronto-horizontal do quadrado – a sombra projetada no Plano Frontal de Projeção desse lado (o lado de menor afastamento do quadrado) é necessariamente paralela a esse lado, pelo que a sombra projetada desse lado é fronto-horizontal e passa por J_{s_2} . Este raciocínio permitiu-nos desenhar a sombra projetada do lado de menor afastamento do quadrado e, dessa forma, determinar a sombra de mais um vértice do quadrado (o extremo esquerdo do seu lado de menor afastamento), sobre a sombra do lado paralelo a **[JK]**. Repetiu-se o processo para o lado de maior afastamento do quadrado, que é igualmente fronto-horizontal (e passa por K_{s_2}), o que nos permitiu determinar a sombra do quarto vértice do quadrado e desenhar a parte correspondente do paralelogramo que é a sombra da figura.

Em seguida, desenharam-se as medianas do paralelogramo (que passam por O_{s_2} e são paralelas aos lados do paralelogramo) bem como as suas diagonais (que passam por O_{s_2} e têm extremos nos vértices do paralelogramo). As medianas do paralelogramo são, imediatamente, as sombras das medianas do quadrado e permitem-nos determinar, imediatamente, **quatro pontos do segmento de elipse** – os pontos em que as medianas do paralelogramo se apoiam nos lados do paralelogramo. Estes pontos são, ainda, os pontos em que o segmento de elipse será tangente aos lados correspondentes do paralelogramo envolvente.

Em seguida, desenharam-se as diagonais do paralelogramo que são, imediatamente, as sombras das diagonais do quadrado. Os pontos em que a circunferência (que delimita a base) corta as diagonais do quadrado situar-se-ão necessariamente sobre as diagonais do paralelogramo (que são as sombras das diagonais do quadrado). Assim, pelas projeções horizontais daqueles pontos conduziram-se as projeções horizontais dos raios luminosos que por eles passam e determinaram-se os pontos em que aquelas intersectam as diagonais dos 3/4 de paralelogramo, o que nos permitiu determinar mais **três pontos do segmento de elipse**.

Aos **sete pontos** determinados acrescem, ainda, as sombras dos pontos **T** e **T'** ($T_{s_{12}}$ e T'_{s_2}), o que perfaz um total de **dez pontos** – estes dez pontos permitiram-nos um desenho relativamente preciso da curva. Note que a curva tem de ser **concordante** com a sombra da geratriz **[TV]** em T_{s_2} , tal como também tem de ser **concordante** com a sombra da geratriz **[T'V]** em T'_{s_2} .

Note ainda que existem dois pequenos troços da curva desenhada que não fazem parte da sombra do arco $\overline{TT'}$. Esses troços são os dois troços que se situam para baixo de T_{s_2} (um deles) e para baixo de T'_{s_2} (o outro). A necessidade destes dois troços foi apenas o de aperfeiçoamento da curva desenhada, pois através deles é possível ter-se a noção da continuação da curva. Caso não se tivessem desenhado estes dois pequenos troços, perder-se-ia a noção da continuidade da curva e esta poderia estar seriamente afetada de erros de execução.

O desenho da curva permitiu concluir o desenho do contorno da **sombra projetada** do cone nos planos de projeção, que é composta pelo segmento de elipse desenhado (e que tem uma parte invisível) e pela linha quebrada que tem vértices em T_{s_2} , T'_{s_2} , V_{s_1} e nos dois pontos de quebra atrás determinados. Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra com uma mancha clara e uniforme – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pelo cone) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – o cone e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos, das retas **i**, **t** e **t'e**, ainda, de todos os traçados referentes à construção do segmento de elipse), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de o cone ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem o cone. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

234.

Dados:

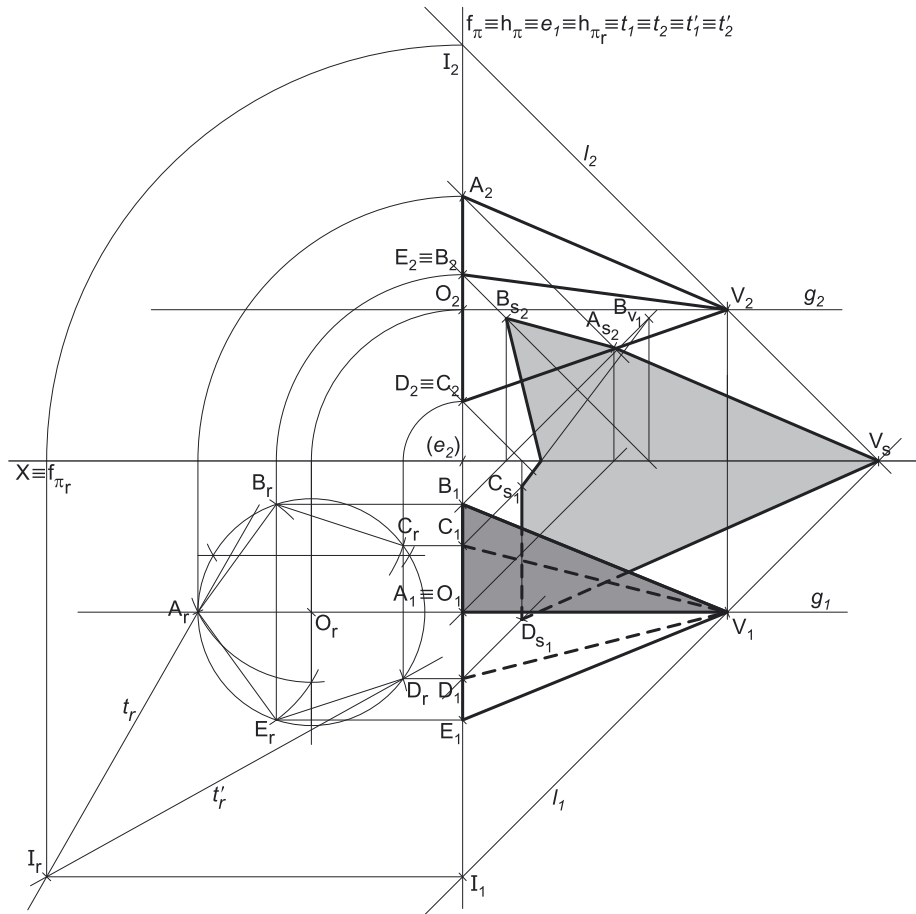
Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O**, pelas suas projeções, em função dos dados. Em seguida, representou-se o plano π (o plano de perfil que contém a base da pirâmide) pelos seus traços, contendo o ponto **O** – o plano π é um plano duplamente projetante, pelo que o seu traço frontal contém a projeção frontal do ponto, tal como o seu traço horizontal contém a projeção horizontal do ponto. A direção convencional da luz faz ângulos de 45° de abertura para a esquerda com o eixo **X**, em ambas as projeções.

Resolução:

Determinação das projeções da pirâmide:

O plano π , o plano que contém o pentágono (que se considerou ser o pentágono **[ABCDE]**), não é paralelo a nenhum dos planos de projeção, pelo que o pentágono não se projeta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projeção (ambas as projeções do pentágono apresentam deformação), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Optou-se pelo rebatimento do plano π (o plano que contém o pentágono) para o Plano Horizontal de Projeção. Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento, que é h_π (o traço horizontal do plano π), que é uma reta de topo – os planos ortogonais à charneira (que contém os arcos do rebatimento) são planos frontais (de frente). Assim, os pontos mantêm os seus afastamentos ao longo do rebatimento e os arcos do rebatimento, porque estão contidos em planos frontais (paralelos ao Plano Frontal de Projeção), projetam-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projeção.



Em seguida, efetuou-se o rebatimento do ponto **O**, obtendo **O_r**. Em seguida, com o compasso, fazendo centro em **O_r** e com 3 cm de raio, desenhou-se a circunferência circunscrita ao pentágono em verdadeira grandeza (em rebatimento) e efetuou-se a construção do polígono, inscrito na circunferência, de acordo com os dados. O lado inferior (que se considerou ser o lado **[CD]**) é de topo o que significa que, em rebatimento, o lado **[C_rD_r]** é paralelo a h_π (pois h_π é uma reta de topo do plano π). Por fim, inverteu-se o rebatimento do plano π , o que nos permitiu determinar as projeções dos cinco vértices do pentágono e, ainda, desenhar as duas projeções do polígono (ambas as projeções do pentágono se reduzem a segmentos de reta, pois o plano que o contém é duplamente projetante).

Trata-se de uma **pirâmide regular**, pelo que o seu eixo é ortogonal ao plano da base, ou seja, está contido numa reta fronto-horizontal. Assim, pelas projeções do ponto **O** conduziram-se as projeções da reta **g**, a reta suporte do eixo da pirâmide. Uma vez que a altura da pirâmide é a distância do vértice ao plano da base, medida ortogonalmente a este, o vértice **V** dista 7 cm (a altura da pirâmide) do plano π . Assim, a altura da pirâmide pode medir-se na reta **g**, que é paralela aos dois planos de projeção – o segmento **[OV]** (o eixo do sólido) projeta-se em verdadeira grandeza em ambas as projeções. Assim, a partir de **O₂** (por exemplo), mediram-se os 7 cm sobre **g₂** (a projeção frontal da reta **g**) e determinou-se **V₂** (a projeção frontal do ponto **V**), sobre **g₂**, o que nos permitiu determinar **V₁** (a projeção horizontal do ponto **V**) sobre **g₁** (a projeção horizontal da reta **g**). Note que se garantiu que o vértice **V** se situa à direita do plano da base, como o enunciado pede expressamente.

A partir das projeções dos seis vértices da pirâmide, desenharam-se os seus contornos aparentes.

O contorno aparente frontal é a linha fechada **[AEDV]**, cuja projeção frontal é o polígono **[A₂E₂D₂V₂]**. Em projeção frontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices **B** e **C**. Estes dois vértices, por serem os vértices de **menor afastamento** da pirâmide, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AB]**, **[BC]** e **[CD]**, da base, e as arestas laterais **[BV]** e **[CV]**. No entanto, todas estas arestas estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis em projeção frontal, como é o caso da aresta lateral **[EV]**, que separa duas faces visíveis em projeção frontal (note que **E** é o vértice de maior afastamento da pirâmide).

O contorno aparente horizontal é a linha fechada **[BAEV]**, cuja projeção horizontal é o polígono **[B₁A₁E₁V₁]**. Em projeção horizontal existem dois vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal – os vértices **C** e **D**. Estes dois vértices, por serem os vértices de **menor cota** da pirâmide, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[BC]**, **[CD]** e **[DE]**, da base, e as arestas laterais **[CV]** e **[DV]**. No entanto, as arestas **[BC]**, **[CD]** e **[DE]**, da base, estão ocultas por arestas do sólido que são visíveis em projeção horizontal, pelo que as invisibilidades a assinalar, em projeção horizontal, são as das arestas laterais **[CV]** e **[DV]**. Já a aresta lateral **[AV]** é visível (em projeção horizontal), pois separa duas faces visíveis em projeção horizontal (note que **A** é o vértice de maior cota da pirâmide).

Determinação da linha separatriz luz/sombra e da sombra própria da pirâmide:

A primeira etapa na determinação da sombra de um sólido deve ser a determinação da **linha separatriz luz/sombra**, o que se processou com o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, cuja determinação se executa em quatro etapas, a saber: **1.** conduz-se, pelo vértice da pirâmide, um raio luminoso **l**; **2.** determina-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano da base – ponto **I**; **3.** pelo ponto **I** conduzem-se as retas tangentes (ou rasantes) à base da pirâmide; **4.** os pontos em que aquelas retas são tangentes (ou rasantes) à base da pirâmide permitem-nos identificar, de forma imediata, as arestas laterais que integram a linha separatriz luz/sombra.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

1. Conduziu-se, pelo vértice da pirâmide (o ponto **V**), um raio luminoso **l** – o raio luminoso **l** está definido por um ponto (o ponto **V**) e uma direção (a direção convencional da luz).
2. Determinou-se o ponto de interseção do raio luminoso **l** com o plano da base – ponto **I**. A determinação do ponto **I** é direta, pois o plano π é um plano duplamente projetante (trata-se da interseção entre uma reta não projetante e um plano projetante).
3. Pelo ponto **I** conduziram-se as retas rasantes à base da pirâmide – as retas **t** e **t'** (que são as retas de interseção dos dois **planos tangentes luz/sombra** com o plano que contém a base – o plano π).

É possível determinar, de forma direta as projeções das retas **t** e **t'** mas, uma vez que se trata de retas de perfil (cujas projeções não verificam o **Critério de Reversibilidade**), não é possível garantir a tangência das retas **t** e **t'** em relação à base da pirâmide, de forma direta em projeções – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Assim, tendo em conta o rebatimento já efetuado para a determinação das projeções da base da pirâmide, efetuou-se o rebatimento do ponto **I** para esse mesmo rebatimento, obtendo **I_r**. Por **I_r** conduziram-se as retas **t_r** e **t'_r** (as retas **t** e **t'** em rebatimento) – **t_r** passa por **I_r** e é rasante à base em rebatimento no vértice **A_r** e **t'_r** passa por **I_r** e é rasante à base em rebatimento no vértice **D_r**.

4. As retas **t** e **t'** são rasantes à base da pirâmide nos pontos **A** e **D**, respetivamente (o que foi possível perceber em rebatimento). Assim, as arestas laterais **[AV]** e **[DV]** são, imediatamente, duas arestas da **linha separatriz luz/sombra** (as arestas laterais **[AV]** e **[DV]** são as arestas segundo as quais os planos λ e λ' são rasantes ao sólido).

As arestas **[AV]** e **[DV]** separam a parte da superfície lateral da pirâmide que está iluminada da que está em sombra – dada a proveniência da luz (de cima, de trás e da esquerda), as faces laterais **[AEV]** e **[DEV]** e a base estão iluminadas enquanto as faces laterais **[ABV]**, **[BCV]** e **[CDV]** estão em sombra. Assim, a **linha separatriz luz/sombra** é a **linha quebrada fechada [ABCDV]**.

A **sombra própria** da pirâmide integra as faces laterais **[ABV]**, **[BCV]** e **[CDV]**. Em projeção horizontal, a face lateral **[ABV]** é visível e as faces laterais **[BCV]** e **[CDV]** são invisíveis, pelo que, em projeção horizontal, a sombra própria a assinalar resume-se à face lateral **[ABV]**. Em projeção frontal, todas as faces em sombra (as faces laterais **[ABV]**, **[BCV]** e **[CDV]**) são invisíveis, pelo que não existe qualquer sombra própria a assinalar, em projeção frontal.

A **sombra própria** da pirâmide foi assinalada com uma mancha clara e uniforme – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Determinação da sombra projetada da pirâmide:

A **sombra projetada** da pirâmide é limitada pela sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra**. Assim, há que determinar a sombra projetada da **linha separatriz luz/sombra** nos planos de projeção, o que será, na prática, a **sombra projetada da pirâmide** nos planos de projeção.

Nesse sentido, determinaram-se as sombras reais de todos os vértices da **linha separatriz luz/sombra**.

A_{s2} é a sombra real do ponto **A** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que por ele passa. **B_{s2}** é a sombra real do ponto **B** (situa-se no **SPFS**) e é o traço frontal do raio luminoso que por ele passa. **C_{s1}** é a sombra real do ponto **C** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que por ele passa. **D_{s1}** é a sombra real do ponto **D** (situa-se no **SPHA**) e é o traço horizontal do raio luminoso que por ele passa. O raio luminoso que passa pelo ponto **V** é um raio luminoso passante, pelo que a sombra do ponto **V** (**V_s**) se situa o eixo **X – V_s** situa-se tanto no **SPHA** como no **SPFS**. As sombras reais dos vértices da pirâmide (da linha separatriz luz/sombra) situam-se em Planos de Projeção distintos, pelo que a sombra projetada (real) da pirâmide **admite necessariamente a existência de pontos de quebra**.

C_{s1} e **D_{s1}** situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta **[CD]** não admite ponto de quebra. **D_{s1}** e **V_s** situam-se, ambas, no **SPHA**, pelo que a sombra da aresta **[DV]** não admite ponto de quebra. **A_{s2}** e **B_{s2}** situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta **[AB]** não admite ponto de quebra. **A_{s2}** e **V_s** situam-se, ambas, no **SPFS**, pelo que a sombra da aresta **[AV]** não admite ponto de quebra. O mesmo já não acontece com a aresta **[BC]** – de facto, existe um ponto de quebra entre **B_{s2}** e **C_{s1}** (que se situam em Planos de Projeção distintos). Note que, na presente situação, o ponto **V_s** é, imediatamente, um ponto de quebra da sombra da pirâmide.

Para determinar o ponto de quebra situado entre **B_{s2}** e **C_{s1}** recorreu-se à sombra virtual do ponto **B – B_{v1}**. **B_{v1}** é a sombra virtual do ponto **B** – situa-se no **SPHP** e é o traço horizontal do raio luminoso que passa por **B**. O segmento **[C_{s1}B_{v1}]** é a sombra projetada da aresta **[BC]** no Plano Horizontal de Projeção (que tem uma **parte real** e uma **parte virtual**) e que nos permitiu determinar o ponto de quebra, que é o ponto de interseção do segmento **[C_{s1}B_{v1}]** com o eixo **X**. Note que não se identificou o ponto de quebra pois, na realidade, a sua identificação é desnecessária.

Em seguida, desenhou-se o contorno da **sombra projetada** da pirâmide nos planos de projeção, que tem vértices em **B_{s2}**, **A_{s2}**, **V_s**, **D_{s1}**, **C_{s1}** e no ponto de quebra determinado, atendendo às invisibilidades verificadas – parte da sombra projetada da pirâmide é **invisível**, pois está oculta pela própria pirâmide. Após o desenho do contorno da sombra, preencheu-se a área visível da sombra com uma mancha clara e uniforme – na execução desta mancha há que ter o cuidado para que a mancha não oculte quaisquer traçados auxiliares (ou outros), pois os traçados efetuados não devem desaparecer com a execução da mancha.

Note que na porção de sombra que é **invisível** (a porção que está oculta pela pirâmide) não há lugar ao preenchimento com mancha, pois a sombra é **invisível**.

Traçado:

O eixo **X**, que é a linha estruturante do exercício, representou-se a **médio**. O pedido representou-se a **forte** – a pirâmide e a sua sombra projetada nos planos de projeção (o objetivo final do exercício). Os traços do plano π (o plano que contém a base), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso das projeções dos raios luminosos ou dos traçados necessários à construção da base da pirâmide em rebatimento ou, ainda, das retas **t** e **t'** em rebatimento), representaram-se a **leve**.

Note que, apesar de a pirâmide ser um **dado** e a sua sombra ser o **pedido**, na prática, a sombra **não existiria** sem a pirâmide. Assim, nos exercícios de sombras, apesar de ser pedida a sombra de um objeto dado, o objetivo final consiste na representação desse objeto e da sua sombra. Dessa forma, tanto as projeções do objeto dado como a sua sombra, são duas partes de um só objetivo e, por isso, representam-se, ambas, a **forte**.

235.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados que fazem, entre si, três ângulos de 120° . Há a salientar que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Em seguida, desenhou-se o triângulo **[RST]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[RST]** são arbitrárias.

Resolução:

As coordenadas do ponto **A** medem-se nos eixos a que se referem – a abcissa do ponto **A** mede-se no eixo **X**, o afastamento do ponto **A** mede-se no eixo **Y** e a cota do ponto **A** no eixo **Z**. No entanto, nenhum dos três eixos coordenados é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que nenhuma das coordenadas do ponto **A** se projeta em verdadeira grandeza no plano axonométrico – não é possível, de forma direta, medir as coordenadas do ponto **A** sobre as perspectivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva isométrica**, sabe-se que os três eixos sofrem a mesma redução (as perspectivas dos três eixos são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação).

Determinação gráfica dos coeficientes de deformação:

Nesse sentido, optou-se por rebater o eixo **Z** para o plano axonométrico, pelo **rebatimento do seu plano projetante** (mas poder-se-ia ter rebatido outro eixo qualquer). Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo **Z**) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspetiva do eixo **Z** – tem-se imediatamente $Z \equiv e$.

O ponto **T** é um ponto do eixo **Z** e é, também, um ponto da perspetiva do eixo **Z**. O ponto **Q** é o ponto em que o plano projetante do eixo **Z** corta o lado **[RS]** do triângulo fundamental (e também pertence à perspetiva do eixo **Z**). Os pontos **T** e **Q** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos).

O triângulo **[TOQ]** está contido no plano projetante do eixo **Z** e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano projetante do eixo **Z** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao plano axonométrico (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[TQ]** (o ponto **M**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio $\overline{MT} = \overline{MQ}$, desenhou-se a semicircunferência de que **[TQ]** é um diâmetro. Pela perspetiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **O_r**, sobre a semicircunferência. O eixo **Z_r** fica definido por **O_r** e **T**, que é um ponto fixo. O triângulo **[TO_rQ]** é retângulo em **O_r**. A reta definida por **O_r** e por **Q** (que não se identificou) é a reta de interseção do plano projetante do eixo **Z** com o plano coordenado **XY**.

Determinação das perspectivas das coordenadas do ponto A:

O eixo **Z_r** (o eixo **Z** rebatido) está em verdadeira grandeza. Tendo em conta que os três eixos apresentam o mesmo coeficiente de redução, é possível medir todas as coordenadas do ponto **A** sobre o eixo **Z_r**.

Assim, sobre o eixo **Z_r**, a partir de **O_r** e no sentido positivo do eixo, representaram-se as três coordenadas de **A**, em verdadeira grandeza (4 cm de **abcissa**, 2 cm de **afastamento** e 5 cm de **cota**). Invertendo o rebatimento, com o recurso a retas perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se, sobre a perspetiva do eixo **Z**, as perspectivas das coordenadas do ponto **A**, já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de redução) – sobre a perspetiva do eixo **Z**, a partir da perspetiva do ponto **O**, estão as perspectivas das três coordenadas do ponto **A** (a abcissa, o afastamento e a cota).

No entanto, as perspectivas da **abcissa** e do **afastamento** do ponto **A** estão no eixo errado, pois deveriam estar sobre a perspetiva do eixo **X** (a **abcissa**) e sobre a perspetiva do eixo **Y** (o **afastamento**). Assim, com o compasso, fazendo centro na perspetiva do ponto **O**, transportaram-se as perspectivas da **abcissa** e do **afastamento** para a perspetiva do eixo **X** e a perspetiva do eixo **Y**, respetivamente.

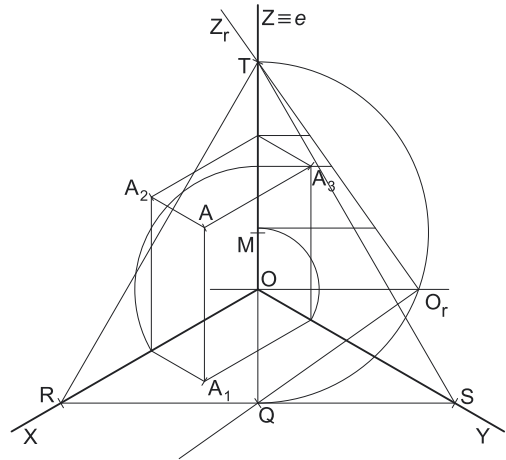
Determinação das perspectivas do ponto A:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **A** determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro (**A₁**, **A₂** e **A₃**), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **A**. **A₁** é a perspetiva da projeção horizontal do ponto **A**. **A₂** é a perspetiva da projeção frontal do ponto **A**. **A₃** é a perspetiva da projeção lateral do ponto **A**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **A**. Para tal conduziu-se, pela perspetiva de **A₁**, a perspetiva da reta projetante horizontal de **A** (que é paralela à perspetiva do eixo **Z**), pela perspetiva de **A₂** conduziu-se a perspetiva da reta projetante frontal de **A** (que é paralela à perspetiva do eixo **Y**) e pela perspetiva de **A₃** conduziu-se a perspetiva da reta projetante lateral de **A** (que é paralela à perspetiva do eixo **X**) – as três retas interseitam-se num ponto, que é a perspetiva propriamente dita do ponto **A**, definindo a perspetiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **A** são dois vértices espacialmente opostos.

Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O pedido é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do rebatimento do plano projetante do eixo **Z**, das perpendiculares à charneira e dos arcos de transporte das perspectivas das coordenadas), representaram-se a **leve**.



236.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que as perspectivas do eixo **X** e do eixo **Z** fazem, entre si, um ângulo de 100° , restam 260° para os outros dois ângulos ($360^\circ - 100^\circ = 260^\circ$). O eixo **Y** é o eixo que sofre uma redução isolada, pelo que a sua perspectiva faz ângulos iguais com as perspectivas dos outros dois eixos, ou seja, ângulos de 130° ($260^\circ : 2 = 130^\circ$). Em seguida, desenhou-se o triângulo [RST], que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo [RST] são arbitrárias.

Resolução:

As coordenadas do ponto **M** medem-se nos eixos a que se referem – a abcissa do ponto **M** mede-se no eixo **X**, o afastamento do ponto **M** mede-se no eixo **Y** e a cota do ponto **M** no eixo **Z**. No entanto, nenhum dos três eixos coordenados é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que nenhuma das coordenadas do ponto **M** se projeta em verdadeira grandeza no plano axonométrico – não é possível, de forma direta, medir as coordenadas do ponto **M** sobre as perspectivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva dimétrica**, sabe-se que dois eixos sofrem a mesma redução, que é diferente da redução do terceiro eixo (as perspectivas dos três eixos são afetadas por dois coeficientes de deformação distintos).

Por outro lado, e como refere o enunciado expressamente, o eixo **Y** é o eixo que sofre uma redução isolada – tal significa que os outros dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Z**) sofrem a mesma redução (as suas perspectivas são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação), redução essa que é diferente da redução (do coeficiente de deformação) que afeta a perspetiva do eixo **Y**.

Uma vez que existem **dois coeficientes de deformação** distintos, há que rebater dois dos eixos coordenados – dois eixos que apresentem diferentes coeficientes de deformação, de forma a ser possível determinar os dois coeficientes de deformação.

Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo X e do eixo Z e das perspectivas da abcissa e da cota do ponto M:

Nesse sentido, optou-se por rebater o eixo **Z** para o plano axonométrico (o plano de projeção), pelo **rebatimento do seu plano projetante** (mas poder-se-ia ter recorrido ao rebatimento do eixo **X**). Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo **Z**) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspetiva do eixo **Z** – tem-se imediatamente $Z \equiv e$.

O ponto **C** é um ponto do eixo **Z** e é, também, um ponto da perspetiva do eixo **Z**. O ponto **Q** é o ponto em que o plano projetante do eixo **Z** corta o lado [AB] do *triângulo fundamental (e também pertence à perspetiva do eixo **Z**). Os pontos **C** e **Q** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos).*

O triângulo [COQ] está contido no plano projetante do eixo **Z** e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano projetante do eixo **Z** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao plano axonométrico (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de [CQ] (o ponto **N**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **N** e com raio $\overline{NT} = \overline{NQ}$, desenhou-se a semicircunferência de que [CQ] é um diâmetro. Pela perspetiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **O_r**, sobre a semicircunferência. O eixo **Z_r** fica definido por **O_r** e **C**, que é um ponto fixo. O triângulo [CO_rQ] é retângulo em **O_r**. A reta definida por **O_r** e por **Q** (que não se identificou) é a reta de interseção do plano projetante do eixo **Z** com o plano coordenado **XY**.

O eixo **Z_r** (o eixo **Z** rebatido) está em verdadeira grandeza. Tendo em conta que o eixo **X** e o eixo **Z** apresentam o mesmo coeficiente de redução, é possível, sobre o eixo **Z_r**, medir a **abcissa** e a **cota** do ponto **M**, mas não o seu **afastamento**.

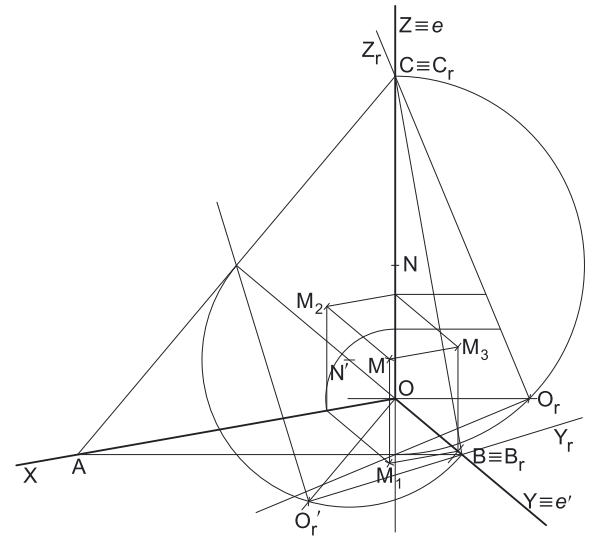
Assim, sobre o eixo **Z_r**, a partir de **O_r** e no sentido positivo do eixo, representaram-se a **abcissa** (2 cm) e a **cota** (3 cm) do ponto **M**, em verdadeira grandeza. Invertendo o rebatimento, com o recurso a retas perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se, sobre a perspetiva do eixo **Z**, as perspectivas da **abcissa** e da **cota** do ponto **M**, já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de redução) – sobre a perspetiva do eixo **Z**, a partir da perspetiva do ponto **O**, estão as perspectivas da **abcissa** e da **cota** do ponto **M**.

No entanto, a perspetiva da **abcissa** do ponto **M** está no eixo errado, pois deveria estar sobre a perspetiva do eixo **X**. Assim, com o compasso, fazendo centro na perspetiva do ponto **O**, transportou-se a perspetiva da **abcissa** do ponto **M** para a perspetiva do eixo **X**.

Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo Y e da perspetiva do afastamento do ponto M:

O **afastamento** do ponto **M** mede-se sobre o eixo **Y**, que é o eixo que sofre uma **redução isolada** – nesse sentido, há que rebater o eixo **Y** para o plano axonométrico (o plano de projeção), o que se processa pelo **rebatimento do seu plano projetante**. Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e'**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo **Y**) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspetiva do eixo **Y** – tem-se imediatamente $Y \equiv e'$.

O ponto **B** é um ponto do eixo **Y** e é, também, um ponto da perspetiva do eixo **Y**. O ponto **R** é o ponto em que o plano projetante do eixo **Y** corta o lado [AC] do *triângulo fundamental (e também pertence à perspetiva do eixo **Y**). Os pontos **C** e **R** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos).*



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O triângulo [BOR] está contido no plano projetante do eixo Y e é um **triângulo retângulo** em O. O rebatimento do plano projetante do eixo Y processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto O ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto O). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de [BR] (o ponto N') – com o compasso, fazendo centro no ponto N' e com raio N'B = N'R, desenhou-se a semicircunferência de que [BR] é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto O conduziu-se uma perpendicular à charneira e' (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se O_r' sobre a semicircunferência. O eixo Y_r fica definido por O_r' e B, que é um ponto fixo. O triângulo [BO_r'R] é retângulo em O_r' (O_r' é o ponto O, rebatido pelo seu segundo rebatimento – pelo rebatimento do plano projetante do eixo Y). A reta definida por O_r e por R (que não se identificou) é a reta de interseção do plano projetante do eixo Y com o *plano coordenado XZ*.

O eixo Y_r (o eixo Y rebatido) está em verdadeira grandeza, pelo que já é possível medir o **afastamento** do ponto M, em verdadeira grandeza, sobre o eixo Y_r. Assim, sobre o eixo Y_r, a partir de O_r' e no sentido positivo do eixo, representou-se o **afastamento** (4 cm) do ponto M, em verdadeira grandeza. Invertendo o rebatimento, com o recurso a uma reta perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira), determinou-se, sobre a perspectiva do eixo Y, a perspectiva do **afastamento** do ponto M, já reduzida (afetada pelo coeficiente de redução) – sobre a perspectiva do eixo Y, a partir da perspectiva do ponto O, está a perspectiva do **afastamento** do ponto M.

Determinação das perspectivas do ponto M:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto M determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro (M₁, M₂ e M₃), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em O e o outro na respetiva projeção do ponto M. M₁ é a perspectiva da projeção horizontal do ponto M. M₂ é a perspectiva da projeção frontal do ponto M. M₃ é a perspectiva da projeção lateral do ponto M.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto M. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de M₁, a perspectiva da reta projetante horizontal de M (que é paralela à perspectiva do eixo Z), pela perspectiva de M₂ conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de M (que é paralela à perspectiva do eixo Y) e pela perspectiva de M₃ conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de M (que é paralela à perspectiva do eixo X) – as três retas interseam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto M, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos O e M são dois vértices espacialmente opostos.

Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo X, eixo Y e eixo Z) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O *triângulo fundamental* representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O pedido é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do rebatimento do plano projetante do eixo Z e do plano projetante do eixo Y, das perpendiculares à charneira e dos arcos de transporte das perspectivas das coordenadas), representaram-se a **leve**.

237.

Dados:

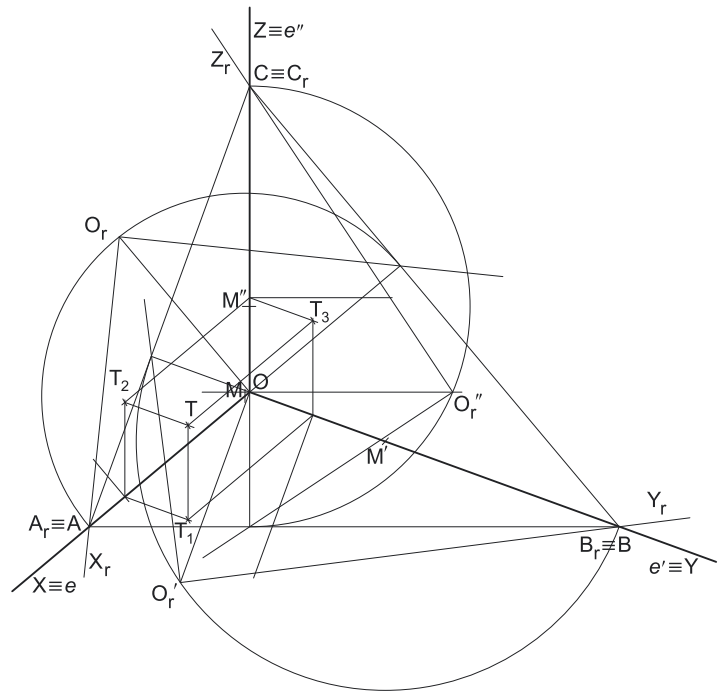
Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados*. A perspectiva do eixo Z representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo X faz um ângulo de 130° com a perspectiva do eixo Z e um ângulo de 120° com a perspectiva do eixo Y, as perspectivas destes dois eixos (o eixo Y e o eixo Z) fazem, entre si, um ângulo de 110° (130° + 120° + 110° = 360°). Em seguida, desenhou-se o triângulo [RST], que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo [RST] são arbitrárias.

Resolução:

As coordenadas do ponto T medem-se nos eixos a que se referem – a abscissa do ponto T mede-se no eixo X, o afastamento do ponto T mede-se no eixo Y e a cota do ponto T no eixo Z. No entanto, nenhum dos três *eixos coordenados* é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que nenhuma das coordenadas do ponto T se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* – não é possível, de forma direta, medir as coordenadas do ponto T sobre as perspectivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspectiva trimétrica**, sabe-se que os três eixos sofrem, todos, uma redução diferente (as perspectivas dos três eixos são afetadas por três coeficientes de deformação distintos).

Uma vez que existem **três coeficientes de deformação** distintos, há que rebater os três *eixos coordenados*, de forma a ser possível determinar os três coeficientes de deformação.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo X e da perspectiva da abcissa do ponto T:

Nesse sentido, começou-se por rebater o eixo **X** para o *plano axonométrico* (o plano de projeção), pelo **rebatimento do seu plano projetante**. Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo **X**) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspectiva do eixo **X** – tem-se imediatamente $X \equiv e$.

O ponto **A** é um ponto do eixo **X** e é, também, um ponto da perspectiva do eixo **X**. O ponto **P** é o ponto em que o plano projetante do eixo **X** corta o lado **[BC]** do *triângulo fundamental* (e também pertence à perspectiva do eixo **X**). Os pontos **A** e **P** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos).

O triângulo **[AOP]** está contido no plano projetante do eixo **X** e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano projetante do eixo **X** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[AP]** (o ponto **M**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio $\overline{MA} = \overline{MP}$, desenhou-se a semicircunferência de que **[AP]** é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira **e** (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **O_r**, sobre a semicircunferência. O eixo **X_r** fica definido por **O_r** e **A**, que é um ponto fixo. O triângulo **[AO_rP]** é retângulo em **O_r**. A reta definida por **O_r** e por **P** (que não se identificou) é a reta de interseção do plano projetante do eixo **X** com o *plano coordenado YZ*.

O eixo **X_r** (o eixo **X** rebatido) está em verdadeira grandeza, pelo que já é possível medir a **abcissa** do ponto **T**, em verdadeira grandeza, sobre o eixo **X_r**. Assim, sobre o eixo **X_r**, a partir de **O_r** e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abcissa** (6 cm) do ponto **T**, em verdadeira grandeza. Invertendo o rebatimento, com o recurso a uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira), determinou-se, sobre a perspectiva do eixo **X**, a perspectiva da **abcissa** do ponto **T**, já reduzida (afetada pelo coeficiente de redução) – sobre a perspectiva do eixo **X**, a partir da perspectiva do ponto **O**, está a perspectiva da **abcissa** do ponto **T**.

Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo Y e da perspectiva do afastamento do ponto T:

Em seguida, rebateu-se o eixo **Y** para o *plano axonométrico* (o plano de projeção), o que se processa pelo **rebatimento do seu plano projetante**. Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e'**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo **Y**) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspectiva do eixo **Y** – tem-se imediatamente $Y \equiv e'$.

O ponto **B** é um ponto do eixo **Y** e é, também, um ponto da perspectiva do eixo **Y**. O ponto **Q** é o ponto em que o plano projetante do eixo **Y** corta o lado **[AC]** do *triângulo fundamental* (e também pertence à perspectiva do eixo **Y**). Os pontos **B** e **Q** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos).

O triângulo **[BOQ]** está contido no plano projetante do eixo **Y** e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano projetante do eixo **Y** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[BQ]** (o ponto **M'**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M'** e com raio $\overline{M'B} = \overline{M'Q}$, desenhou-se a semicircunferência de que **[BQ]** é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira **e'** (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **O_r'**, sobre a semicircunferência. O eixo **Y_r** fica definido por **O_r'** e **B**, que é um ponto fixo. O triângulo **[BO_r'Q]** é retângulo em **O_r'** (**O_r'** é o ponto **O**, rebatido pelo seu segundo rebatimento – pelo rebatimento do plano projetante do eixo **Y**). A reta definida por **O_r'** e por **Q** (que não se identificou) é a reta de interseção do plano projetante do eixo **Y** com o *plano coordenado XZ*.

O eixo **Y_r** (o eixo **Y** rebatido) está em verdadeira grandeza, pelo que já é possível medir o **afastamento** do ponto **T**, em verdadeira grandeza, sobre o eixo **Y_r**. Assim, sobre o eixo **Y_r**, a partir de **O_r'** e no sentido positivo do eixo, representou-se o **afastamento** (2 cm) do ponto **T**, em verdadeira grandeza. Invertendo o rebatimento, com o recurso a uma perpendicular à charneira **e'** (que corresponde ao plano ortogonal à charneira), determinou-se, sobre a perspectiva do eixo **Y**, a perspectiva do **afastamento** do ponto **T**, já reduzida (afetada pelo coeficiente de redução) – sobre a perspectiva do eixo **Y**, a partir da perspectiva do ponto **O**, está a perspectiva do **afastamento** do ponto **T**.

Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo Z e da perspectiva da cota do ponto T:

Por fim, rebateu-se o eixo **Z** para o *plano axonométrico* (o plano de projeção), o que se processa pelo **rebatimento do seu plano projetante**. Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e''**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo **Z**) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspectiva do eixo **Z** – tem-se imediatamente $Z \equiv e''$.

O ponto **C** é um ponto do eixo **Z** e é, também, um ponto da perspectiva do eixo **Z**. O ponto **R** é o ponto em que o plano projetante do eixo **Z** corta o lado **[AB]** do *triângulo fundamental* (e também pertence à perspectiva do eixo **Z**). Os pontos **C** e **R** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos).

O triângulo **[COR]** está contido no plano projetante do eixo **Z** e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano projetante do eixo **Z** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[CR]** (o ponto **M''**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M''** e com raio $\overline{M''C} = \overline{M''R}$, desenhou-se a semicircunferência de que **[CR]** é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira **e''** (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **O_r''**, sobre a semicircunferência. O eixo **Z_r** fica definido por **O_r''** e **C**, que é um ponto fixo. O triângulo **[CO_r''R]** é retângulo em **O_r''** (**O_r''** é o ponto **O**, rebatido pelo seu terceiro rebatimento – pelo rebatimento do plano projetante do eixo **Z**). A reta definida por **O_r''** e por **R** (que não se identificou) é a reta de interseção do plano projetante do eixo **Z** com o *plano coordenado XY*.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O eixo Z_r (o eixo Z rebatido) está em verdadeira grandeza, pelo que já é possível medir a **cota** do ponto T , em verdadeira grandeza, sobre o eixo Z_r . Assim, sobre o eixo Z_r , a partir de O_r e no sentido positivo do eixo, representou-se a **cota** (3 cm) do ponto T , em verdadeira grandeza. Invertendo o rebatimento, com o recurso a uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira), determinou-se, sobre a perspectiva do eixo Z , a perspectiva da **cota** do ponto T , já reduzida (afetada pelo coeficiente de redução) – sobre a perspectiva do eixo Z , a partir da perspectiva do ponto O , está a perspectiva da **cota** do ponto T .

Determinação das perspectivas do ponto T :

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto T determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro (T_1 , T_2 e T_3), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em O e o outro na respetiva projeção do ponto T . T_1 é a perspectiva da projeção horizontal do ponto T . T_2 é a perspectiva da projeção frontal do ponto T . T_3 é a perspectiva da projeção lateral do ponto T .

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto T . Para tal, conduziu-se, pela perspectiva de T_1 , a perspectiva da reta projetante horizontal de T (que é paralela à perspectiva do eixo Z), pela perspectiva de T_2 conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de T (que é paralela à perspectiva do eixo Y) e pela perspectiva de T_3 conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de T (que é paralela à perspectiva do eixo X) – as três retas interseitam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto T , definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos O e T são dois vértices espacialmente opostos.

Eixo que sofre a maior deformação perspética:

O eixo que sofre **maior deformação perspética** é o eixo X .

Justificação: o ângulo que um determinado eixo faz com o *plano axonométrico* está contido no plano que contém esse eixo e é ortogonal ao *plano axonométrico* (que é o plano projetante desse eixo), sendo que, na prática, é o ângulo entre esse eixo e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspectiva desse eixo). Assim, o ângulo que um determinado eixo faz com o *plano axonométrico* é o ângulo que esse eixo faz com a sua perspectiva. Uma vez que esse ângulo está contido no plano projetante desse eixo, ao rebatermos o plano projetante desse eixo, o ângulo está em verdadeira grandeza no ângulo entre esse eixo rebatido e a sua perspectiva.

O ângulo que o eixo X faz com o *plano axonométrico* (em verdadeira grandeza) é o ângulo que o eixo X_r faz com a sua perspectiva. O ângulo que o eixo Y faz com o *plano axonométrico* (em verdadeira grandeza) é o ângulo que o eixo Y_r faz com a sua perspectiva. O ângulo que o eixo Z faz com o *plano axonométrico* (em verdadeira grandeza) é o ângulo que o eixo Z_r faz com a sua perspectiva. Destes três ângulos, o eixo X é o eixo que faz, com o *plano axonométrico*, o **maior ângulo** e, por isso, é o eixo que sofre a **maior deformação perspética**.

Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo X , eixo Y e eixo Z) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O *triângulo fundamental* representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O pedido é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do rebatimento dos planos projetantes dos três eixos e das perpendiculares à charneira), representaram-se a **leve**.

238.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados* que fazem, entre si, três ângulos de 120° . Há a salientar que a perspectiva do eixo Z se representa, convencionalmente, na vertical. Em seguida, desenhou-se o triângulo **[RST]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[RST]** são arbitrárias.

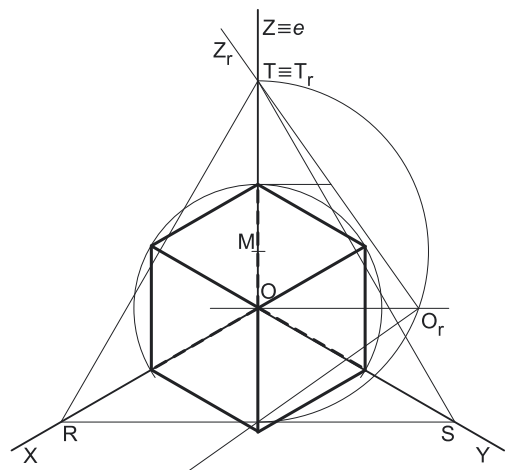
Resolução:

Como o cubo se apoia, por três das suas faces, nos três *planos coordenados*, é possível concluir, de forma imediata, que três das arestas do cubo estão contidas nos três *eixos coordenados* e um dos seus vértices é a origem do referencial – o ponto O . Assim, é necessário medir os 4 cm (a medida da aresta do cubo) em cada um dos *eixos coordenados*. No entanto, nenhum dos três *eixos coordenados* é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que nenhum dos eixos se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* – não é possível, de forma direta, medir o comprimento da aresta do cubo sobre as perspectivas dos eixos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva isométrica**, sabe-se que os três eixos sofrem a mesma redução (as perspectivas dos três eixos são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação).

Determinação gráfica dos coeficientes de deformação:

Nesse sentido, optou-se por rebater o eixo Z para o *plano axonométrico*, pelo **rebatimento do seu plano projetante** (mas poder-se-ia ter rebatido outro eixo qualquer). Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta e), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo Z) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspectiva do eixo Z – tem-se imediatamente $Z \equiv e$.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O ponto **T** é um ponto do eixo **Z** e é, também, um ponto da perspectiva do eixo **Z**. O ponto **Q** é o ponto em que o plano projetante do eixo **Z** corta o lado **[RS]** do triângulo fundamental (e também pertence à perspectiva do eixo **Z**). Os pontos **T** e **Q** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos).

O triângulo **[TOQ]** está contido no plano projetante do eixo **Z** e é um triângulo retângulo em **O**. O rebatimento do plano projetante do eixo **Z** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao plano axonométrico (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[TQ]** (o ponto **M**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio $\overline{MT} = \overline{MQ}$, desenhou-se a semicircunferência de que **[TQ]** é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **O_r**, sobre a semicircunferência. O eixo **Z_r** fica definido por **O_r** e **T**, que é um ponto fixo. O triângulo **[TO_rQ]** é retângulo em **O_r**. A reta definida por **O_r** e por **Q** (que não se identificou) é a reta de interseção do plano projetante do eixo **Z** com o plano coordenado **XY**.

Determinação das perspectivas da medida da aresta do cubo:

O eixo **Z_r** (o eixo **Z** rebatido) está em verdadeira grandeza – já é possível medir a medida da aresta do cubo sobre o eixo **Z_r**. Assim, sobre o eixo **Z_r**, a partir de **O_r** e no sentido positivo do eixo, mediram-se os 4 cm (a medida da aresta do cubo) e, em seguida, inverteu-se o rebatimento, com o recurso a uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira) – isto permitiu-nos determinar, sobre a perspectiva do eixo **Z**, a perspectiva da medida da aresta do sólido (já reduzida – afetada pelo coeficiente de deformação).

Tendo em conta que os três eixos sofrem a mesma redução (as suas perspectivas são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação), há que transportar essa medida para as perspectivas dos outros dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Y**), onde se situam outras duas arestas do cubo. Assim, com o compasso, fazendo centro na perspectiva do ponto **O**, transportou-se a perspectiva da medida da aresta do cubo para as perspectivas do eixo **X** e do eixo **Y**.

Este procedimento permitiu-nos obter os três vértices do cubo que se situam nos eixos coordenados (para além do ponto **O**, que é um outro vértice do cubo).

Determinação da perspectiva do cubo:

A partir da perspectiva da medida da aresta do cubo sobre as perspectivas dos três eixos, desenharam-se os três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** – esses paralelogramos são as perspectivas das três faces do cubo que pertencem aos planos coordenados. O desenho desses paralelogramos permitiu-nos determinar as perspectivas de mais três vértices do cubo (que não se identificaram).

Tendo em conta que um cubo tem oito vértices e que já temos as perspectivas de sete deles, falta-nos a perspectiva do último vértice, que é o vértice espacialmente oposto ao vértice **O**. Assim, determinou-se a perspectiva desse vértice conduzindo, pelas perspectivas dos três vértices anteriores, as perspectivas das arestas em falta (que são paralelas às perspectivas dos eixos) – o ponto de concorrência das três arestas é a perspectiva do oitavo vértice do cubo.

Por fim, desenhou-se a perspectiva do cubo, identificando convenientemente as arestas invisíveis do sólido (as arestas que estão contidas nos eixos coordenados).

Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a médio, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a leve pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspectiva do cubo representou-se a forte (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do rebatimento do plano projetante do eixo **Z**, das perpendiculares à charneira e dos arcos de transporte da medida da aresta do cubo), representaram-se a leve.

239.

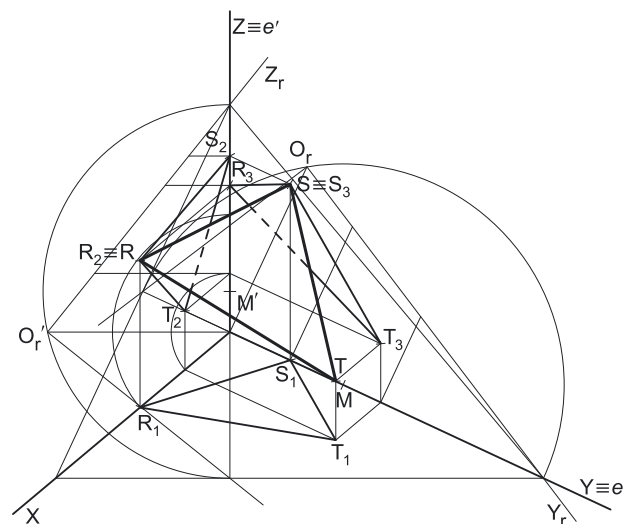
Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que as perspectivas do eixo **X** e do eixo **Z** fazem, entre si, um ângulo de 130°, restam 230° para os outros dois ângulos ($360^\circ - 130^\circ = 230^\circ$). O eixo **Y** é o eixo que sofre uma redução isolada, pelo que a sua perspectiva faz ângulos iguais com as perspectivas dos outros dois eixos, ou seja, ângulos de 115° ($230^\circ : 2 = 115^\circ$). Em seguida, desenhou-se o triângulo **[ABC]**, que é o triângulo fundamental – as dimensões do triângulo **[ABC]** são arbitrárias.

Resolução:

As coordenadas dos três pontos medem-se nos eixos a que se referem – as abcissas medem-se no eixo **X**, os afastamentos medem-se no eixo **Y** e as cotas no eixo **Z**. No entanto, nenhum dos três eixos coordenados é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que nenhuma das coordenadas se projeta em verdadeira grandeza no plano axonométrico – não é possível, de forma direta, medir qualquer das coordenadas dos pontos sobre as perspectivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma perspectiva dimétrica, sabe-se que dois eixos sofrem a mesma redução, que é diferente da redução do terceiro eixo (as perspectivas dos três eixos são afetadas por dois coeficientes de deformação distintos).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por outro lado, e como refere o enunciado expressamente, o eixo **Y** é o eixo que sofre uma redução isolada – tal significa que os outros dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Z**) sofrem a mesma redução (as suas perspetivas são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação), redução essa que é diferente da redução (do coeficiente de deformação) que afeta a perspetiva do eixo **Y**.

Uma vez que existem **dois coeficientes de deformação** distintos, há que rebater dois dos *eixos coordenados* – dois eixos que apresentem diferentes coeficientes de deformação, de forma a ser possível determinar os dois coeficientes de deformação.

Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo Y e das perspetivas dos afastamentos:

Os **afastamentos** medem-se sobre o eixo **Y**, que é o eixo que sofre uma **redução isolada** – nesse sentido, rebateu-se o eixo **Y** para o *plano axonométrico* (o plano de projeção), o que se processou pelo **rebatimento do seu plano projetante**. Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo **Y**) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspetiva do eixo **Y** – tem-se imediatamente $Y \equiv e$.

O ponto **B** é um ponto do eixo **Y** e é, também, um ponto da perspetiva do eixo **Y**. O ponto **B'** é o ponto em que o plano projetante do eixo **Y** corta o lado **[AC]** do *triângulo fundamental* (e também pertence à perspetiva do eixo **Y**). Os pontos **B** e **B'** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos).

O triângulo **[BOB']** está contido no plano projetante do eixo **Y** e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano projetante do eixo **Y** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[BB']** (o ponto **M**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio $\overline{MB} = \overline{MB'}$, desenhou-se a semicircunferência de que **[BB']** é um diâmetro. Pela perspetiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira **e** (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **O_r**, sobre a semicircunferência. O eixo **Y_r** fica definido por **O_r** e **B**, que é um ponto fixo. O triângulo **[BO_rB']** é retângulo em **O_r**. A reta definida por **O_r** e por **R** (que não se identificou) é a reta de interseção do plano projetante do eixo **Y** com o *plano coordenado XZ*.

O eixo **Y_r** (o eixo **Y** rebatido) está em verdadeira grandeza, pelo que já é possível medir os **afastamentos** dos três pontos, em verdadeira grandeza, sobre o eixo **Y_r**. Assim, sobre o eixo **Y_r**, a partir de **O_r** e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos pontos **S** (2 cm) e **T** (5 cm), em verdadeira grandeza – note que **R** tem afastamento nulo. Invertendo o rebatimento, com o recurso a retas perpendiculares à charneira (que correspondem a planos ortogonais à charneira), determinaram-se, sobre a perspetiva do eixo **Y**, as perspetivas dos **afastamentos** daqueles dois pontos, já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de redução).

Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo X e do eixo Z e das perspetivas das abcissas e das cotas:

As **abcissas** medem-se sobre o eixo **X** e as **cotas** sobre o eixo **Z**, que têm o mesmo coeficiente de deformação. Nesse sentido, optou-se por rebater o eixo **Z** para o *plano axonométrico* (o plano de projeção), pelo **rebatimento do seu plano projetante** (mas poder-se-ia ter recorrido ao rebatimento do eixo **X**). Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e'**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo **Z**) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento é a perspetiva do eixo **Z** – tem-se imediatamente $Z \equiv e'$.

O ponto **C** é um ponto do eixo **Z** e é, também, um ponto da perspetiva do eixo **Z**. O ponto **C'** é o ponto em que o plano projetante do eixo **Z** corta o lado **[AB]** do *triângulo fundamental* (e também pertence à perspetiva do eixo **Z**). Os pontos **C** e **C'** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos).

O triângulo **[COC']** está contido no plano projetante do eixo **Z** e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano projetante do eixo **Z** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[CC']** (o ponto **M'**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M'** e com raio $\overline{M'C} = \overline{M'C'}$, desenhou-se a semicircunferência de que **[CC']** é um diâmetro. Pela perspetiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **O_r'**, sobre a semicircunferência. O eixo **Z_r** fica definido por **O_r'** e **C**, que é um ponto fixo. O triângulo **[CO_rC']** é retângulo em **O_r'** (**O_r'** é o ponto **O**, rebatido pelo seu segundo rebatimento – pelo rebatimento do plano projetante do eixo **Z**). A reta definida por **O_r'** e por **C'** (que não se identificou) é a reta de interseção do plano projetante do eixo **Z** com o *plano coordenado XY*.

O eixo **Z_r** (o eixo **Z** rebatido) está em verdadeira grandeza. Tendo em conta que o eixo **X** e o eixo **Z** apresentam o mesmo coeficiente de redução, é possível, sobre o eixo **Z_r**, medir as **abcissas** e as **cotas** dos três pontos. Assim, sobre o eixo **Z_r**, a partir de **O_r'** e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abcissas** dos pontos **R** (4 cm) e **T** (2 cm), bem como as **cotas** dos três pontos, em verdadeira grandeza – note que o ponto **S** tem abcissa nula. Invertendo o rebatimento, com o recurso a retas perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se, sobre a perspetiva do eixo **Z**, as perspetivas daquelas coordenadas, já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de redução).

No entanto, as perspetivas das **abcissas** estão no eixo errado, pois deveriam estar sobre a perspetiva do eixo **X**. Assim, com o compasso, fazendo centro na perspetiva do ponto **O**, transportaram-se as perspetivas das **abcissas** para a perspetiva do eixo **X**.

Determinação das perspetivas dos três pontos e do triângulo:

A partir das perspetivas das três coordenadas do ponto **T** determinaram-se as perspetivas das suas projeções nas faces do triedro (**T₁**, **T₂** e **T₃**), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspetivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **T**. **T₁** é a perspetiva da projeção horizontal do ponto **T**. **T₂** é a perspetiva da projeção frontal do ponto **T**. **T₃** é a perspetiva da projeção lateral do ponto **T**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspetiva propriamente dita do ponto **T**. Para tal conduziu-se, pela perspetiva de **T₁**, a perspetiva da reta projetante horizontal de **T** (que é paralela à perspetiva do eixo **Z**), pela perspetiva de **T₂** conduziu-se a perspetiva da reta projetante frontal de **T** (que é paralela à perspetiva do eixo **Y**) e pela perspetiva de **T₃** conduziu-se a perspetiva da reta projetante lateral de **T** (que é paralela à perspetiva do eixo **X**) – as três retas interseccionam-se num ponto, que é a perspetiva propriamente dita do ponto **T**, definindo a perspetiva de um paralelepípedo de que as perspetivas dos pontos **O** e **T** são dois vértices espacialmente opostos.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

As perspectivas dos pontos **R** e **S** determinaram-se repetindo, para cada um deles, o processo acima exposto para a determinação das perspectivas do ponto **T**. No entanto, uma vez que o ponto **R** tem afastamento nulo, o ponto **R** situa-se no plano **XZ**, pelo que se tem $R_2 \equiv R$. De forma semelhante, atendendo a que o ponto **S** tem abcissa nula, o ponto **S** situa-se no plano **YZ**, pelo que se tem $S_3 \equiv S$.

Por fim, desenharam-se as perspectivas do triângulo. O triângulo **[RST]** é a perspectiva propriamente dita do triângulo. O triângulo **[R₁S₁T₁]** é a perspectiva da projeção horizontal do triângulo. O triângulo **[R₂S₂T₂]** é a perspectiva da projeção frontal do triângulo. O triângulo **[R₃S₃T₃]** é a perspectiva da projeção lateral do triângulo. Tenha em conta que se respeitaram as invisibilidades das projeções, resultantes da respetiva ocultação pelo próprio triângulo (que é uma **figura opaca**).

Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O *triângulo fundamental* representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspectiva do triângulo representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspectivas das projeções do triângulo, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do rebatimento do plano projetante do eixo **Y** e do plano projetante do eixo **Z**, das perpendiculares à charneira e dos arcos de transporte das perspectivas das coordenadas), representaram-se a **leve**.

240.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados* que fazem, entre si, três ângulos de 120°. Há a salientar que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Em seguida, desenhou-se o triângulo **[RST]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[RST]** são arbitrárias.

Resolução:

As coordenadas do ponto **A** medem-se nos eixos a que se referem – a **abcissa** mede-se no eixo **X**, o **afastamento** mede-se no eixo **Y** e a **cota** no eixo **Z**. No entanto, nenhum dos três *eixos coordenados* é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que nenhuma das coordenadas do ponto **A** se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* – não é possível, de forma direta, medir as coordenadas do ponto **A** sobre as perspectivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva isométrica**, sabe-se que os três eixos sofrem a mesma redução (as perspectivas dos três eixos são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação).

Determinação gráfica dos coeficientes de deformação:

O processo geométrico auxiliar a que se recorreu para determinar os coeficientes de deformação foi o do **rebatimento dos planos coordenados**, tendo-se optado por rebater o plano **XY** para o *plano axonométrico* (mas poder-se-ia ter rebatido qualquer dos outros dois *planos coordenados*). Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XY*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta **e**) é a reta suporte do lado **[RS]** do *triângulo fundamental, que se identificou imediatamente.*

Os pontos **R** e **S** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos).

O triângulo **[ROS]** está contido no *plano coordenado XY* e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano coordenado **XY** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[RS]** (o ponto **M**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio $\overline{MR} = \overline{MS}$, desenhou-se a semicircunferência de que **[RS]** é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **O_r**, sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O** é, afinal, o plano projetante do eixo **Z**.

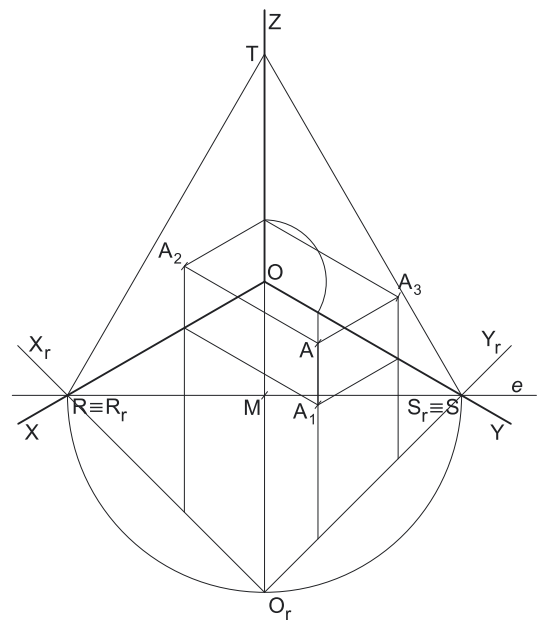
O eixo **X_r** fica definido por **O_r** e **R**, que é um ponto fixo. O eixo **Y_r** fica definido por **O_r** e **S**, que é outro ponto fixo. O triângulo **[R₀S₀]** é retângulo em **O_r**.

Determinação das perspectivas das coordenadas do ponto A:

O eixo **X_r** (o eixo **X** rebatido) e o eixo **Y_r** (o eixo **Y** rebatido) estão, ambos, em verdadeira grandeza. Tendo em conta que os três eixos apresentam o mesmo coeficiente de redução, é possível medir todas as coordenadas do ponto **A** sobre qualquer daqueles dois eixos.

Assim, sobre o eixo **X_r**, a partir de **O_r** e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abcissa** do ponto **A**, em verdadeira grandeza (3 cm). Sobre o eixo **Y_r**, a partir de **O_r** e no sentido positivo do eixo, representaram-se o **afastamento** e a **cota** do ponto **A**, em verdadeira grandeza (5 cm e 2 cm, respetivamente). Invertendo o rebatimento, com o recurso a retas perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se as coordenadas do ponto **A** já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de deformação) – sobre a perspectiva do eixo **X** está a perspectiva da **abcissa** do ponto **A** e sobre a perspectiva do eixo **Y** estão as perspectivas do **afastamento** e da **cota** do ponto **A**.

No entanto, a perspectiva da **cota** do ponto **A** está no eixo errado, pois deveria estar sobre a perspectiva do eixo **Z**. Assim, com o compasso, fazendo centro na perspectiva do ponto **O**, transportou-se a perspectiva da **cota** para a perspectiva do eixo **Z**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Determinação das perspectivas do ponto A:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **A** determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro (**A**₁, **A**₂ e **A**₃), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **A**. **A**₁ é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **A**. **A**₂ é a perspectiva da projeção frontal do ponto **A**. **A**₃ é a perspectiva da projeção lateral do ponto **A**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **A**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de **A**₁, a perspectiva da reta projetante horizontal de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **A**₂ conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **A**₃ conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas interseitam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **A**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **A** são dois vértices espacialmente opostos.

Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O pedido é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do rebatimento do plano coordenado **XY**, das perpendiculares à charneira e do arco de transporte da perspectiva da cota), representaram-se a **leve**.

241.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que as perspectivas do eixo **X** e do eixo **Z** fazem, entre si, um ângulo de 110°, restam 250° para os outros dois ângulos (360° – 110° = 250°). O eixo **Y** é o eixo que sofre uma redução isolada, pelo que a sua perspectiva faz ângulos iguais com as perspectivas dos outros dois eixos, ou seja, ângulos de 125° (250° : 2 = 125°). Em seguida, desenhou-se o triângulo **[ABC]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[ABC]** são arbitrárias.

Resolução:

As coordenadas do ponto **M** medem-se nos eixos a que se referem – a **abscissa** mede-se no eixo **X**, o **afastamento** mede-se no eixo **Y** e a **cota** no eixo **Z**. No entanto, nenhum dos três eixos coordenados é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que nenhuma das coordenadas do ponto **M** se projeta em verdadeira grandeza no plano axonométrico – não é possível, de forma direta, medir as coordenadas do ponto **M** sobre as perspectivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva dimétrica**, sabe-se que dois eixos sofrem a mesma redução, que é diferente da redução do terceiro eixo (as perspectivas dos três eixos são afetadas por dois coeficientes de deformação distintos).

Por outro lado, e como refere o enunciado expressamente, o eixo **Y** é o eixo que sofre uma redução isolada – tal significa que os outros dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Z**) sofrem a mesma redução (as suas perspectivas são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação), redução essa que é diferente da redução (do coeficiente de deformação) que afeta a perspectiva do eixo **Y**.

Uma vez que existem **dois coeficientes de deformação** distintos, há que rebater dois dos eixos coordenados – dois eixos que apresentem diferentes coeficientes de deformação, de forma a ser possível determinar os dois coeficientes de deformação.

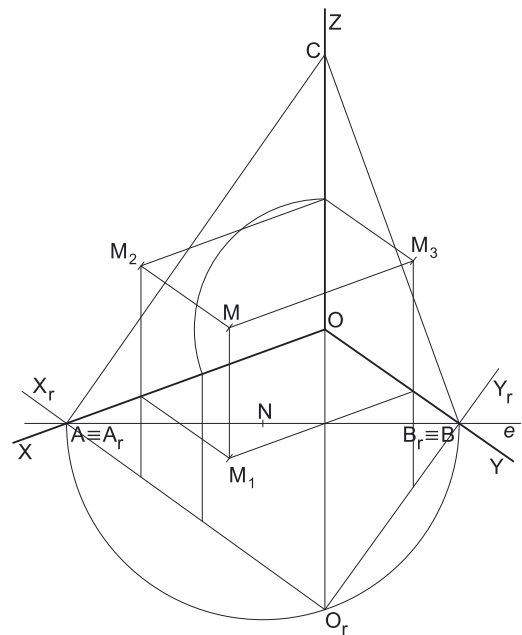
Determinação gráfica dos coeficientes de deformação:

O processo geométrico auxiliar a que se recorreu para determinar os coeficientes de deformação foi o do **rebatimento dos planos coordenados**, tendo-se optado por rebater o plano **XY**, pois o plano coordenado **XY** contém dois eixos com coeficientes de deformação diferentes – com **um único rebatimento** é possível determinar os **dois coeficientes de deformação**. Nesse sentido, poder-se-ia ter optado por rebater o plano coordenado **YZ** (que contém igualmente dois eixos com reduções diferentes), mas não o plano coordenado **XZ**, pois o eixo **X** e o eixo **Z** sofrem a mesma redução (e isso implicaria o recurso a um outro rebatimento, para se determinar o coeficiente de deformação do eixo **Y**).

Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano coordenado **XY**) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta **e**) é a reta suporte do lado **[AB]** do triângulo fundamental, que se identificou imediatamente. Os pontos **A** e **B** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos).

O triângulo **[AOB]** está contido no plano coordenado **XY** e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano coordenado **XY** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao plano axonométrico (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[AB]** (o ponto **N**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **N** e com raio $\overline{NA} = \overline{NB}$, desenhou-se a semicircunferência de que **[AB]** é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **O_r**, sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O** é, afinal, o plano projetante do eixo **Z**.

O eixo **X_r** fica definido por **O_r** e **A**, que é um ponto fixo. O eixo **Y_r** fica definido por **O_r** e **B**, que é outro ponto fixo. O triângulo **[AO_rB]** é retângulo em **O_r**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Determinação das perspectivas das coordenadas do ponto **M**:

O eixo X_r (o eixo **X** rebatido) e o eixo Y_r (o eixo **Y** rebatido) estão, ambos, em verdadeira grandeza. Tendo em conta que o eixo **X** e o eixo **Z** apresentam o mesmo coeficiente de redução e que o eixo **Y** apresenta um coeficiente de redução diferente, o rebatimento dos dois eixos permitiu-nos determinar graficamente os dois coeficientes de redução desta perspectiva. Assim, é possível medir todas as coordenadas do ponto **M** (em verdadeira grandeza) sobre aqueles dois eixos, como em seguida se expõe.

Nesse sentido, sobre o eixo X_r , a partir de O_r e no sentido positivo do eixo, representaram-se a **abcissa** e a **cota** do ponto **M**, em verdadeira grandeza (6 cm e 4 cm, respetivamente). Sobre o eixo Y_r , a partir de O_r e no sentido positivo do eixo, representou-se o **afastamento** do ponto **M**, em verdadeira grandeza (4 cm). Invertendo o rebatimento, com o recurso a retas perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se as coordenadas do ponto **M** já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de deformação) – sobre a perspectiva do eixo **X** estão as perspectivas da **abcissa** e da **cota** do ponto **M** e sobre a perspectiva do eixo **Y** está a perspectiva do **afastamento** do ponto **M**.

No entanto, a perspectiva da **cota** do ponto **M** está no eixo errado, pois deveria estar sobre a perspectiva do eixo **Z**. Assim, com o compasso, fazendo centro na perspectiva do ponto **O**, transportou-se a perspectiva da **cota** para a perspectiva do eixo **Z**.

Determinação das perspectivas do ponto **M**:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **M** determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro (M_1 , M_2 e M_3), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **M**. M_1 é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **M**. M_2 é a perspectiva da projeção frontal do ponto **M**. M_3 é a perspectiva da projeção lateral do ponto **M**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **M**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de M_1 , a perspectiva da reta projetante horizontal de **M** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de M_2 conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **M** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de M_3 conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **M** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas interseitam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **M**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **M** são dois vértices espacialmente opostos.

Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O pedido é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do rebatimento do plano coordenado **XY**, das perpendiculares à charneira e do arco de transporte da perspectiva da cota), representaram-se a **leve**.

242.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo **Z** faz um ângulo de 110° com a perspectiva do eixo **X** e um ângulo de 130° com a perspectiva do eixo **Y**, as perspectivas destes dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Y**) fazem, entre si, um ângulo de 120° ($110^\circ + 130^\circ + 120^\circ = 360^\circ$). Em seguida, desenhou-se o triângulo **[ABC]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[ABC]** são arbitrárias.

Resolução:

As coordenadas do ponto **R** medem-se nos eixos a que se referem – a **abcissa** mede-se no eixo **X**, o **afastamento** mede-se no eixo **Y** e a **cota** no eixo **Z**. No entanto, nenhum dos três eixos coordenados é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que nenhuma das coordenadas do ponto **R** se projeta em verdadeira grandeza no plano axonométrico – não é possível, de forma direta, medir as coordenadas do ponto **R** sobre as perspectivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

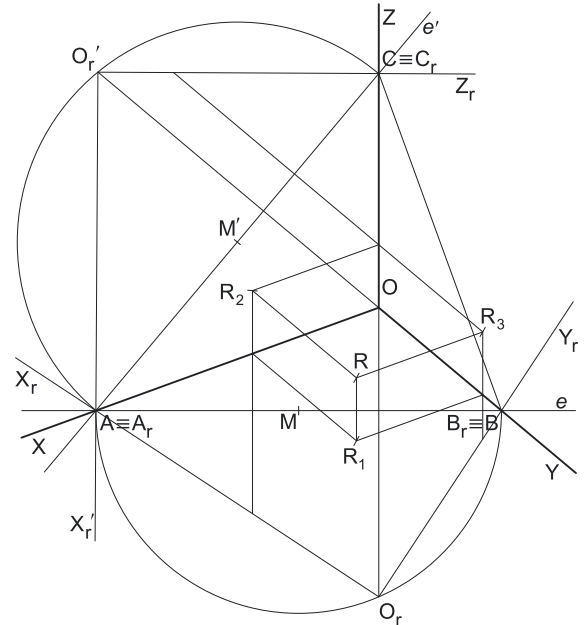
Tratando-se de uma **perspectiva trimétrica**, sabe-se que os três eixos sofrem, todos, uma redução diferente (as perspectivas dos três eixos são afetadas por três coeficientes de deformação distintos).

Uma vez que existem **três coeficientes de deformação** distintos, há que rebater os três eixos coordenados, de forma a ser possível determinar os três coeficientes de deformação.

Determinação gráfica dos coeficientes de deformação do eixo **X** e do eixo **Y**:

O processo geométrico auxiliar a que se recorreu para determinar os coeficientes de deformação foi o do **rebatimento dos planos coordenados**, tendo-se optado por rebater o plano **XY**, pois o plano coordenado **XY** contém imediatamente dois eixos com coeficientes de deformação diferentes. Sublinha-se que se poderia ter optado por rebater um outro plano coordenado qualquer, pois, na prática, será necessário rebater outro plano coordenado, de forma a rebater os **três eixos coordenados** – é necessário, na prática, rebater dois planos coordenados.

Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano coordenado **XY**) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta **e**) é a reta suporte do lado **[AB]** do triângulo fundamental, que se identificou imediatamente. Os pontos **A** e **B** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O triângulo $[AOB]$ está contido no *plano coordenado XY* e é um **triângulo retângulo** em O . O rebatimento do plano coordenado XY processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto O ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto O). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de $[AB]$ (o ponto M) – com o compasso, fazendo centro no ponto M e com raio $MA = MB$, desenhou-se a semicircunferência de que $[AB]$ é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto O conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se O_r , sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto O é, afinal, o plano projetante do eixo Z .

O eixo X_r fica definido por O_r e A , que é um ponto fixo. O eixo Y_r fica definido por O_r e B , que é outro ponto fixo. O triângulo $[AO_rB]$ é retângulo em O_r .

Determinação das perspectivas da abcissa e do afastamento do ponto R:

O eixo X_r (o eixo X rebatido) e o eixo Y_r (o eixo Y rebatido) estão, ambos, em verdadeira grandeza. Assim, é possível medir a **abcissa** e o **afastamento** do ponto R (em verdadeira grandeza) sobre aqueles dois eixos (respetivamente), como em seguida se expõe.

Nesse sentido, sobre o eixo X_r , a partir de O_r e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abcissa** do ponto R , em verdadeira grandeza (4 cm). Sobre o eixo Y_r , a partir de O_r e no sentido positivo do eixo, representou-se o **afastamento** do ponto R , em verdadeira grandeza (5 cm). Invertendo o rebatimento, com o recurso a retas perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se aquelas coordenadas do ponto R , já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de deformação) – sobre a perspectiva do eixo X está a perspectiva da **abcissa** do ponto R e sobre a perspectiva do eixo Y está a perspectiva do **afastamento** do ponto R .

Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo Z:

Tendo em conta que o eixo Z apresenta um coeficiente de deformação diferente dos coeficientes de deformação dos outros dois eixos, é necessário determinar o coeficiente de deformação do eixo Z , o que se processou rebatendo o eixo Z , pelo **rebatimento dos planos coordenados**. Nesse sentido, optou-se por rebater o plano XZ (que contém o eixo Z), mas poder-se-ia ter rebatido o plano YZ , pois é outro *plano coordenado* que também contém o eixo Z .

Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta e'), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XZ*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta e') é a reta suporte do lado $[AC]$ do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente. Os pontos A e C são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos).

O triângulo $[AOC]$ está contido no *plano coordenado XZ* e é um **triângulo retângulo** em O . O rebatimento do plano coordenado XZ processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto O ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto O). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de $[AC]$ (o ponto M') – com o compasso, fazendo centro no ponto M' e com raio $M'A = M'C$, desenhou-se a semicircunferência de que $[AC]$ é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto O conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se O_r' , sobre a semicircunferência (O_r' é o ponto O , rebatido pelo seu segundo rebatimento – pelo rebatimento do *plano coordenado XZ*). Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto O é, afinal, o plano projetante do eixo Y .

O eixo X_r' fica definido por O_r' e A , que é um ponto fixo (O_r' é o ponto O , rebatido pelo seu segundo rebatimento – pelo rebatimento do *plano coordenado XZ*). O eixo Z_r fica definido por O_r' e C , que é outro ponto fixo. O triângulo $[AO_r'C]$ é retângulo em O_r' . Note que existe uma repetição no rebatimento do eixo X – o eixo X foi rebatido duas vezes, pelo rebatimento de diferentes *planos coordenados*.

Determinação da perspectiva da cota do ponto R:

O eixo X_r' (o eixo X rebatido pela segunda vez) e o eixo Z_r (o eixo Z rebatido) estão, ambos, em verdadeira grandeza. Assim, é possível medir a **abcissa** e o **afastamento** do ponto R (em verdadeira grandeza) sobre aqueles dois eixos (respetivamente), como em seguida se expõe.

No entanto, como já se havia determinado previamente a perspectiva da **abcissa** do ponto R (através do rebatimento do plano coordenado XY), a utilidade do eixo X_r' para a sequência do exercício é nula.

Assim, sobre o eixo Z_r , a partir de O_r' e no sentido positivo do eixo, representou-se a **cota** do ponto R , em verdadeira grandeza (3 cm). Invertendo o rebatimento, com o recurso a uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira), determinou-se a **cota** do ponto R , já reduzida (afetada pelo coeficiente de deformação), sobre a perspectiva do eixo Z .

Determinação das perspectivas do ponto R:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto R determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro (R_1 , R_2 e R_3), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em O e o outro na respetiva projeção do ponto R . R_1 é a perspectiva da projeção horizontal do ponto R . R_2 é a perspectiva da projeção frontal do ponto R . R_3 é a perspectiva da projeção lateral do ponto R .

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto R . Para tal conduziu-se, pela perspectiva de R_1 , a perspectiva da reta projetante horizontal de R (que é paralela à perspectiva do eixo Z), pela perspectiva de R_2 conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de R (que é paralela à perspectiva do eixo Y) e pela perspectiva de R_3 conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de R (que é paralela à perspectiva do eixo X) – as três retas interseitam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto R , definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos O e R são dois vértices espacialmente opostos.

Eixo que sofre a maior deformação perspética:

O eixo que sofre **maior deformação perspética** é o eixo Y .

Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo X , eixo Y e eixo Z) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O pedido é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do rebatimento dos *planos coordenados XY* e XZ e das perpendiculares às charneiras), representaram-se a **leve**.

243.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados*. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo **Z** faz um ângulo de 110° com a perspectiva do eixo **X** e um ângulo de 130° com a perspectiva do eixo **Y**, as perspectivas destes dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Y**) fazem, entre si, um ângulo de 120° ($110^\circ + 130^\circ + 120^\circ = 360^\circ$). Em seguida, desenhou-se o triângulo [ABC], que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo [ABC] são arbitrárias.

Resolução:

Como o cubo se apoia, por três das suas faces, nos três *planos coordenados*, é possível concluir, de forma imediata, que três das arestas do cubo estão contidas nos três *eixos coordenados* e um dos seus vértices é a origem do referencial – o ponto **O**. Assim, é necessário medir os 5 cm (a medida da aresta do cubo) em cada um dos *eixos coordenados*. No entanto, nenhum dos três *eixos coordenados* é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que nenhum dos eixos se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* – não é possível, de forma direta, medir o comprimento da aresta do cubo sobre as perspectivas dos eixos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva trimétrica**, sabe-se que os três eixos sofrem, todos, uma redução diferente (as perspetivas dos três eixos são afetadas por três coeficientes de deformação distintos).

Uma vez que existem **três coeficientes de deformação** distintos, há que rebater os três *eixos coordenados*, de forma a ser possível determinar os três coeficientes de deformação.

Determinação gráfica dos coeficientes de deformação do eixo X e do eixo Y:

O processo geométrico auxiliar a que se recorreu para determinar os coeficientes de deformação foi o do **rebatimento dos planos coordenados**, tendo-se optado por rebater o plano **XY**, pois o plano coordenado **XY** contém imediatamente dois eixos com coeficientes de deformação diferentes. Sublinha-se que se poderia ter optado por rebater um outro *plano coordenado* qualquer, pois, na prática, será necessário rebater outro *plano coordenado*, de forma a rebater os **três eixos coordenados** – é necessário, na prática, rebater dois *planos coordenados*.

Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XY*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta **e**) é a reta suporte do lado [AB] do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente. Os pontos **A** e **B** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos).

O triângulo [AOB] está contido no *plano coordenado XY* e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano coordenado **XY** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de [AB] (o ponto **M**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio $\overline{MA} = \overline{MB}$, desenhou-se a semicircunferência de que [AB] é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **O_r**, sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O** é, afinal, o plano projetante do eixo **Z**.

O eixo **X_r** fica definido por **O_r** e **A**, que é um ponto fixo. O eixo **Y_r** fica definido por **O_r** e **B**, que é outro ponto fixo. O triângulo [AO_rB] é retângulo em **O_r**.

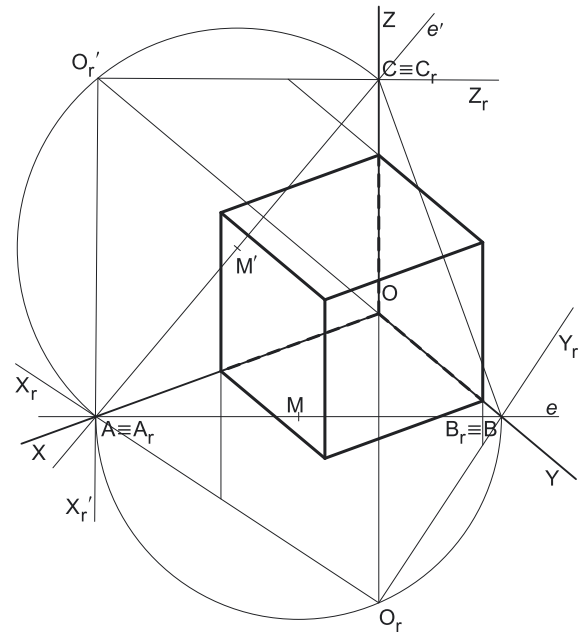
Determinação gráfica do coeficiente de deformação do eixo Z:

Tendo em conta que o eixo **Z** apresenta um coeficiente de deformação diferente dos coeficientes de deformação dos outros dois eixos, é necessário determinar o coeficiente de deformação do eixo **Z**, o que se processou rebatendo o eixo **Z**, pelo **rebatimento dos planos coordenados**. Nesse sentido, optou-se por rebater o plano **XZ** (que contém o eixo **Z**), mas poder-se-ia ter rebatido o plano **YZ**, pois é outro *plano coordenado* que também contém o eixo **Z**.

Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e'**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XZ*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta **e'**) é a reta suporte do lado [AC] do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente. Os pontos **A** e **C** são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos).

O triângulo [AOC] está contido no *plano coordenado XZ* e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano coordenado **XZ** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de [AC] (o ponto **M'**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M'** e com raio $\overline{M'A} = \overline{M'C}$, desenhou-se a semicircunferência de que [AC] é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **O_r'**, sobre a semicircunferência (**O_r'** é o ponto **O**, rebatido pelo seu segundo rebatimento – pelo rebatimento do *plano coordenado XZ*). Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O** é, afinal, o plano projetante do eixo **Y**.

O eixo **X_r'** fica definido por **O_r'** e **A**, que é um ponto fixo (**O_r'** é o ponto **O**, rebatido pelo seu segundo rebatimento – pelo rebatimento do *plano coordenado XZ*). O eixo **Z_r** fica definido por **O_r'** e **C**, que é outro ponto fixo. O triângulo [AO_r'C] é retângulo em **O_r'**. Note que existe uma repetição no rebatimento do eixo **X** – o eixo **X** foi rebatido duas vezes, pelo rebatimento de diferentes *planos coordenados*.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Determinação das perspectivas da medida da aresta do cubo:

O eixo X_r (o eixo X rebatido, pelo rebatimento do plano coordenado XY) está em verdadeira grandeza – já é possível medir a medida da aresta do cubo sobre o eixo X_r . Assim, sobre o eixo X_r , a partir de O_r e no sentido positivo do eixo, mediram-se os 5 cm (a medida da aresta do cubo) e, em seguida, inverteu-se o rebatimento, com o recurso a uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira) – isto permitiu-nos determinar, sobre a perspectiva do eixo X , a perspectiva da medida da aresta do sólido (já reduzida – afetada pelo coeficiente de deformação do eixo X).

O eixo Y_r (o eixo Y rebatido) está em verdadeira grandeza – já é possível medir a medida da aresta do cubo sobre o eixo Y_r . Assim, sobre o eixo Y_r , a partir de O_r e no sentido positivo do eixo, mediram-se os 5 cm (a medida da aresta do cubo) e, em seguida, inverteu-se o rebatimento, com o recurso a uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira) – isto permitiu-nos determinar, sobre a perspectiva do eixo Y , a perspectiva da medida da aresta do sólido (já reduzida – afetada pelo coeficiente de deformação do eixo Y).

O eixo Z_r (o eixo Z rebatido) está em verdadeira grandeza – já é possível medir a medida da aresta do cubo sobre o eixo Z_r . Assim, sobre o eixo Z_r , a partir de O_r e no sentido positivo do eixo, mediram-se os 5 cm (a medida da aresta do cubo) e, em seguida, inverteu-se o rebatimento, com o recurso a uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira) – isto permitiu-nos determinar, sobre a perspectiva do eixo Z , a perspectiva da medida da aresta do sólido (já reduzida – afetada pelo coeficiente de deformação do eixo Z).

Este procedimento permitiu-nos obter os **três vértices** do cubo que se situam nos eixos coordenados (para além do ponto O , que é um outro vértice do cubo).

Determinação da perspectiva do cubo:

A partir da perspectiva da medida da aresta do cubo sobre as perspectivas dos três eixos, desenharam-se os três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em O – esses paralelogramos são as perspectivas das três faces do cubo que pertencem aos planos coordenados. O desenho desses paralelogramos permitiu-nos determinar as perspectivas de mais **três vértices** do cubo (que não se identificaram).

Tendo em conta que um cubo tem **oito vértices** e que já temos as perspectivas de sete deles, falta-nos a perspectiva do último vértice, que é o vértice espacialmente oposto ao vértice O . Assim, determinou-se a perspectiva desse vértice conduzindo, pelas perspectivas dos três vértices anteriores, as perspectivas das arestas em falta (que são paralelas às perspectivas dos eixos) – o ponto de concorrência das três arestas é a perspectiva do oitavo vértice do cubo.

Por fim, desenhou-se a perspectiva do cubo, identificando convenientemente as arestas invisíveis do sólido (as arestas que estão contidas nos eixos coordenados).

Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo X , eixo Y e eixo Z) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspectiva do cubo representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do rebatimento dos planos coordenados XY e XZ e das perpendiculares às charneiras), representaram-se a **leve**.

244.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados que fazem, entre si, três ângulos de 120° . Há a salientar que a perspectiva do eixo Z se representa, convencionalmente, na vertical. Em seguida, desenhou-se o triângulo $[RST]$, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo $[RST]$ são arbitrárias.

Resolução:

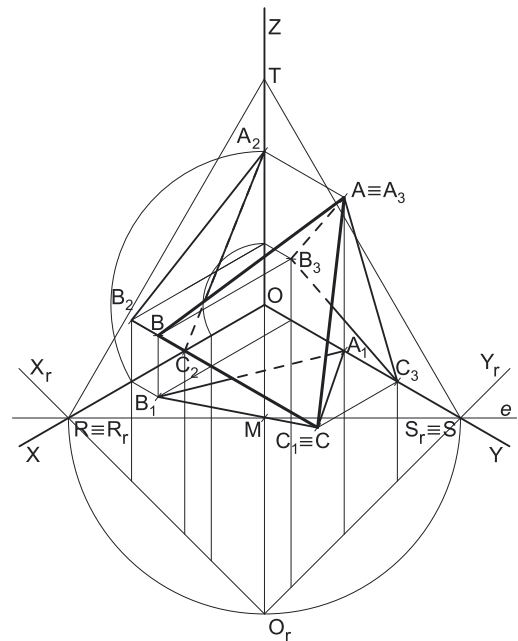
As coordenadas dos três pontos medem-se nos eixos a que se referem – as abcissas medem-se no eixo X , os afastamentos medem-se no eixo Y e as cotas no eixo Z . No entanto, nenhum dos três eixos coordenados é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que nenhuma das coordenadas se projeta em verdadeira grandeza no plano axonométrico – não é possível, de forma direta, medir qualquer das coordenadas dos pontos sobre as perspectivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva isométrica**, sabe-se que os três eixos sofrem a mesma redução (as perspectivas dos três eixos são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação).

Determinação gráfica dos coeficientes de deformação:

O processo geométrico auxiliar a que se recorreu para determinar os coeficientes de deformação foi o do **rebatimento dos planos coordenados**, tendo-se optado por rebater o plano XY para o plano axonométrico (mas poder-se-ia ter rebatido qualquer dos outros dois planos coordenados). Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta e), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano coordenado XY) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta e) é a reta suporte do lado $[RS]$ do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente.

Os pontos R e S são dois pontos da charneira, pelo que rodam sobre si próprios (são dois pontos fixos).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O triângulo [ROS] está contido no plano coordenado XY e é um triângulo retângulo em O. O rebatimento do plano coordenado XY processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto O ao plano axonométrico (o raio do arco do rebatimento do ponto O). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de [RS] (o ponto M) – com o compasso, fazendo centro no ponto M e com raio $\overline{MR} = \overline{MS}$, desenhou-se a semicircunferência de que [RS] é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto O conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se O_r , sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto O é, afinal, o plano projetante do eixo Z.

O eixo X_r fica definido por O_r e R, que é um ponto fixo. O eixo Y_r fica definido por O_r e S, que é outro ponto fixo. O triângulo $[RO_rS]$ é retângulo em O_r .

Determinação das perspectivas das coordenadas dos três pontos:

O eixo X_r (o eixo X rebatido) e o eixo Y_r (o eixo Y rebatido) estão, ambos, em verdadeira grandeza. Tendo em conta que os três eixos apresentam o mesmo coeficiente de redução, é possível medir todas as coordenadas dos três pontos sobre qualquer daqueles dois eixos.

Assim, sobre o eixo X_r , a partir de O_r e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abscissas** e as **cotas** dos três pontos, em verdadeira grandeza (tendo em conta que A tem abscissa nula). Sobre o eixo Y_r , a partir de O_r e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos três pontos, em verdadeira grandeza (tendo em conta que C tem cota nula). Invertendo o rebatimento, com o recurso a retas perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se as coordenadas dos três pontos já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de deformação) – sobre a perspectiva do eixo X estão as perspectivas das **abscissas** e das **cotas** dos três pontos e sobre a perspectiva do eixo Y estão as perspectivas dos **afastamentos** dos três pontos.

No entanto, a perspectiva da **cota** do ponto A está no eixo errado, pois deveria estar sobre a perspectiva do eixo Z. Assim, com o compasso, fazendo centro na perspectiva do ponto O, transportou-se a perspectiva da **cota** para a perspectiva do eixo Z.

Determinação das perspectivas dos três pontos e do triângulo:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto B determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro (B_1 , B_2 e B_3), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em O e o outro na respetiva projeção do ponto B. B_1 é a perspectiva da projeção horizontal do ponto B. B_2 é a perspectiva da projeção frontal do ponto B. B_3 é a perspectiva da projeção lateral do ponto B.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto B. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de B_1 , a perspectiva da reta projetante horizontal de B (que é paralela à perspectiva do eixo Z), pela perspectiva de B_2 conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de B (que é paralela à perspectiva do eixo Y) e pela perspectiva de B_3 conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de B (que é paralela à perspectiva do eixo X) – as três retas interseccionam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto B, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos O e B são dois vértices espacialmente opostos.

As perspectivas dos pontos A e C determinaram-se repetindo, para cada um deles, o processo acima exposto para a determinação das perspectivas do ponto B. No entanto, uma vez que o ponto A tem abscissa nula, o ponto A situa-se no plano YZ, pelo que se tem $A_3 \equiv A$. De forma semelhante, atendendo a que o ponto C tem cota nula, o ponto C situa-se no plano XY, pelo que se tem $A_1 \equiv 1$.

Por fim, desenharam-se as perspectivas do triângulo. O triângulo [ABC] é a perspectiva propriamente dita do triângulo. O triângulo $[A_1B_1C_1]$ é a perspectiva da projeção horizontal do triângulo. O triângulo $[A_2B_2C_2]$ é a perspectiva da projeção frontal do triângulo. O triângulo $[A_3B_3C_3]$ é a perspectiva da projeção lateral do triângulo. Tenha em conta que se respeitaram as invisibilidades das projeções, resultantes da respetiva ocultação pelo próprio triângulo (que é uma **figura opaca**).

Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo X, eixo Y e eixo Z) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspectiva do triângulo representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspectivas das projeções do triângulo, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do rebatimento do plano projetante do eixo Y e do plano projetante do eixo Z, das perpendiculares à charneira e dos arcos de transporte das perspectivas das coordenadas), representaram-se a **leve**.

245.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados que fazem, entre si, três ângulos de 120° . Há a salientar que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Em seguida, desenhou-se o triângulo **[ABC]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[ABC]** são arbitrárias.

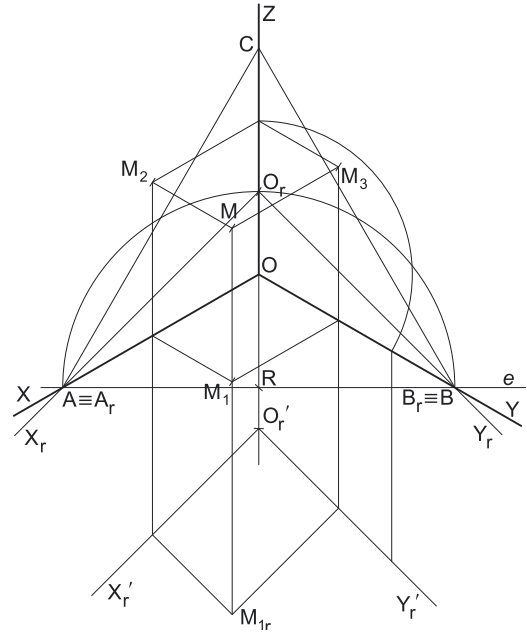
Resolução:

As coordenadas do ponto **M** medem-se nos eixos a que se referem – a **abscissa** mede-se no eixo **X**, o **afastamento** mede-se no eixo **Y** e a **cota** no eixo **Z**. No entanto, nenhum dos três eixos coordenados é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que nenhuma das coordenadas se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico*, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva isométrica**, sabe-se que os três eixos sofrem a mesma redução (as perspetivas dos três eixos são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação).

Determinação gráfica dos coeficientes de deformação:

O processo geométrico auxiliar a que se recorreu para determinar os coeficientes de deformação foi o **método dos cortes** (que se fundamenta no **rebatimento dos planos coordenados**), tendo-se optado por rebater o plano **XY** (mas poder-se-ia ter rebatido qualquer dos outros dois *planos coordenados*). Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XY*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta **e**) é a reta suporte do lado **[AB]** do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente.



A grande diferença entre este processo (o **método dos cortes**) e o anterior (o **rebatimento dos planos coordenados**) consiste no facto de, neste processo, o *plano coordenado* ser rebatido para o interior da *pirâmide axonométrica* e, em seguida, ser transladado para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (das perpendiculares à charneira). Sublinha-se que, no **rebatimento dos planos coordenados**, o rebatimento do *plano coordenado* processava-se para fora da *pirâmide axonométrica*

O triângulo **[AOB]** está contido no *plano coordenado XY* e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano coordenado **XY** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[AB]** (o ponto **R**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **R** e com raio $\overline{RA} = \overline{RB}$, desenhou-se a semicircunferência de que **[AB]** é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **Or**, sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O**, é, afinal, o plano projetante do eixo **Z**. Note ainda que, efetuando o rebatimento do plano **XY** para o interior da *pirâmide axonométrica*, o ponto **Or** fica sobre a perspetiva do eixo **Z**.

O eixo **Xr** fica definido por **Or** e **A**, que é um ponto fixo. O eixo **Yr** fica definido por **Or** e **B**, que é outro ponto fixo. O triângulo **[RO,S]** é retângulo em **O**.

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **XY** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento). Nesse sentido, deslocou-se o ponto **Or**, ao longo da perpendicular à charneira que por ele passa (que é a perspetiva do eixo **Z**) – o comprimento da deslocação a efetuar é completamente arbitrário.

O ponto **Or'** é o ponto **O** rebatido, após a translação efetuada. O eixo **Xr'** passa por **Or'** e é paralelo ao eixo **Xr** (o eixo **Xr'** está definido por um ponto e uma direção). O eixo **Yr'** passa por **Or'** e é paralelo ao eixo **Yr** (o eixo **Yr'** está definido por um ponto e uma direção). O plano **XY**, rebatido e transladado, é o plano **Xr'O'r'Yr'**.

Determinação das perspetivas das coordenadas do ponto R:

O eixo **Xr'** (o eixo **X** rebatido e transladado) e o eixo **Yr'** (o eixo **Y** rebatido e transladado) estão, ambos, em verdadeira grandeza. Tendo em conta que os três eixos apresentam o mesmo coeficiente de redução, é possível medir todas as coordenadas do ponto **R** sobre qualquer daqueles dois eixos.

Assim, sobre o eixo **Xr'**, a partir de **Or'** e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abscissa** do ponto **M**, em verdadeira grandeza (4 cm). Sobre o eixo **Yr'**, a partir de **Or'** e no sentido positivo do eixo, representaram-se o **afastamento** e a **cota** do ponto **M**, em verdadeira grandeza (3 cm e 5 cm, respetivamente). Invertendo o rebatimento, com o recurso a retas perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se as coordenadas do ponto **M** já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de deformação) – sobre a perspetiva do eixo **X** está a perspetiva da **abscissa** do ponto **M** e sobre a perspetiva do eixo **Y** estão as perspetivas do **afastamento** e da **cota** do ponto **M**.

No entanto, a perspetiva da **cota** do ponto **M** está no eixo errado, pois deveria estar sobre a perspetiva do eixo **Z**. Assim, com o compasso, fazendo centro na perspetiva do ponto **O**, transportou-se a perspetiva da **cota** para a perspetiva do eixo **Z**.

Determinação das perspetivas do ponto M:

A partir das perspetivas das três coordenadas do ponto **M** determinaram-se as perspetivas das suas projeções nas faces do triedro (**M1**, **M2** e **M3**), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspetivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **M**. **M1** é a perspetiva da projeção horizontal do ponto **M**. **M2** é a perspetiva da projeção frontal do ponto **M**. **M3** é a perspetiva da projeção lateral do ponto **M**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **M**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de **M₁**, a perspectiva da reta projetante horizontal de **M** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **M₂** conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **M** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **M₃** conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **M** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas intersectam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **M**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **M** são dois vértices espacialmente opostos.

Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O pedido é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do rebatimento do plano coordenado **XY**, da translação do plano **XY** rebatido, das perpendiculares à charneira e do arco de transporte da perspectiva da cota), representaram-se a **leve**.

246.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que o eixo **Y** faz ângulos iguais (de 125°) com as perspectivas dos outros dois eixos, sabe-se imediatamente que o eixo **Y** é o eixo que sofre uma redução isolada. Assim, as perspectivas do eixo **X** e do eixo **Z** fazem, entre si, um ângulo de 110° ($2 \times 125^\circ + 110^\circ = 360^\circ$). Em seguida, desenhou-se o triângulo **[RST]**, que é o triângulo fundamental – as dimensões do triângulo **[RST]** são arbitrárias.

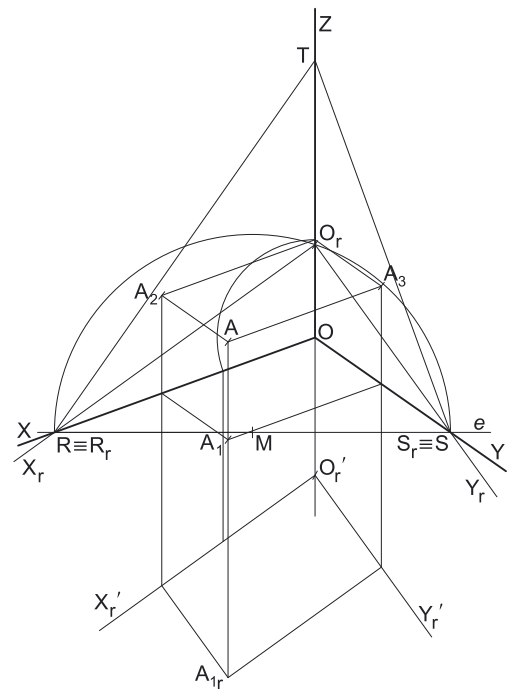
Resolução:

As coordenadas do ponto **A** medem-se nos eixos a que se referem – a **abscissa** mede-se no eixo **X**, o **afastamento** mede-se no eixo **Y** e a **cota** no eixo **Z**. No entanto, nenhum dos três eixos coordenados é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que nenhuma das coordenadas se projeta em verdadeira grandeza no plano axonométrico, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma perspectiva dimétrica, sabe-se que dois eixos sofrem a mesma redução, que é diferente da redução do terceiro eixo (as perspectivas dos três eixos são afetadas por dois coeficientes de deformação distintos).

Por outro lado, e como acima se referiu, o eixo **Y** é o eixo que sofre uma redução isolada – tal significa que os outros dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Z**) sofrem a mesma redução (as suas perspectivas são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação), redução essa que é diferente da redução (do coeficiente de deformação) que afeta a perspectiva do eixo **Y**.

Uma vez que existem dois coeficientes de deformação distintos, há que rebater dois dos eixos coordenados – dois eixos que apresentem diferentes coeficientes de deformação, de forma a ser possível determinar os dois coeficientes de deformação.



Determinação gráfica dos coeficientes de deformação:

O processo geométrico auxiliar a que se recorreu para determinar os coeficientes de deformação foi o **método dos cortes** (que se fundamenta no **rebatimento dos planos coordenados**), tendo-se optado por rebater o plano **XY**, pois o plano coordenado **XY** contém dois eixos com coeficientes de deformação diferentes – com um **único rebatimento** é possível determinar os **dois coeficientes de deformação**. Nesse sentido, poder-se-ia ter optado por rebater o plano coordenado **YZ** (que contém igualmente dois eixos com reduções diferentes), mas não o plano coordenado **XZ**, pois o eixo **X** e o eixo **Z** sofrem a mesma redução (e isso implicaria o recurso a um outro rebatimento, para se determinar o coeficiente de deformação do eixo **Y**).

Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano coordenado **XY**) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta **e**) é a reta suporte do lado **[RS]** do triângulo fundamental, que se identificou imediatamente.

A grande diferença entre este processo (o **método dos cortes**) e o anterior (o **rebatimento dos planos coordenados**) consiste no facto de, neste processo, o plano coordenado ser rebatido para o interior da pirâmide axonométrica e, em seguida, ser transladado para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (das perpendiculares à charneira). Sublinha-se que, no **rebatimento dos planos coordenados**, o rebatimento do plano coordenado processava-se para fora da pirâmide axonométrica.

O triângulo **[ROS]** está contido no plano coordenado **XY** e é um triângulo retângulo em **O**. O rebatimento do plano coordenado **XY** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao plano axonométrico (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[RS]** (o ponto **M**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio $\overline{MR} = \overline{MS}$, desenhou-se a semicircunferência de que **[RS]** é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **O_r**, sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O** é, afinal, o plano projetante do eixo **Z**. Note ainda que, efetuando o rebatimento do plano **XY** para o interior da pirâmide axonométrica, o ponto **O_r** fica sobre a perspectiva do eixo **Z**.

O eixo **X_r** fica definido por **O_r** e **R**, que é um ponto fixo. O eixo **Y_r** fica definido por **O_r** e **S**, que é outro ponto fixo. O triângulo **[RO_rS]** é retângulo em **O_r**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **XY** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento). Nesse sentido, deslocou-se o ponto **O_r** ao longo da perpendicular à charneira que por ele passa (que é a perspectiva do eixo **Z**) – o comprimento da deslocação a efetuar é completamente arbitrário.

O ponto **O_r'** é o ponto **O** rebatido, após a translação efetuada. O eixo **X_r'** passa por **O_r'** e é paralelo ao eixo **X_r** (o eixo **X_r'** está definido por um ponto e uma direção). O eixo **Y_r'** passa por **O_r'** e é paralelo ao eixo **Y_r** (o eixo **Y_r'** está definido por um ponto e uma direção). O plano **XY**, rebatido e transladado, é o plano **X_r'O_r'Y_r'**.

Determinação das perspectivas das coordenadas do ponto **A**:

O eixo **X_r'** (o eixo **X** rebatido e transladado) e o eixo **Y_r'** (o eixo **Y** rebatido e transladado) estão, ambos, em verdadeira grandeza. Tendo em conta que o eixo **X** e o eixo **Z** apresentam o mesmo coeficiente de redução e que o eixo **Y** apresenta um coeficiente de redução diferente, o rebatimento dos dois eixos permitiu-nos determinar graficamente os dois coeficientes de redução desta perspectiva. Assim, é possível medir todas as coordenadas do ponto **A** (em verdadeira grandeza) sobre aqueles dois eixos, como em seguida se expõe.

Nesse sentido, sobre o eixo **X_r'**, a partir de **O_r'** e no sentido positivo do eixo, representaram-se a **abscissa** e a **cota** do ponto **A**, em verdadeira grandeza (5 cm e 3 cm, respetivamente). Sobre o eixo **Y_r'**, a partir de **O_r'** e no sentido positivo do eixo, representou-se o **afastamento** do ponto **A**, em verdadeira grandeza (3 cm). Invertendo o rebatimento, com o recurso a retas perpendiculares à charneira (que correspondem aos planos ortogonais à charneira), determinaram-se as coordenadas do ponto **A** já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de deformação) – sobre a perspectiva do eixo **X** estão as perspectivas da **abscissa** e da **cota** do ponto **A** e sobre a perspectiva do eixo **Y** está a perspectiva do **afastamento** do ponto **A**.

No entanto, a perspectiva da **cota** do ponto **A** está no eixo errado, pois deveria estar sobre a perspectiva do eixo **Z**. Assim, com o compasso, fazendo centro na perspectiva do ponto **O**, transportou-se a perspectiva da **cota** para a perspectiva do eixo **Z**.

Determinação das perspectivas do ponto **A**:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **A** determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro (**A₁**, **A₂** e **A₃**), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **A**. **A₁** é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **A**. **A₂** é a perspectiva da projeção frontal do ponto **A**. **A₃** é a perspectiva da projeção lateral do ponto **A**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **A**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de **A₁**, a perspectiva da reta projetante horizontal de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **A₂** conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **A₃** conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas interseitam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **A**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **A** são dois vértices espacialmente opostos.

Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O pedido é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do rebatimento do plano coordenado **XY**, da translação do plano **XY** rebatido, das perpendiculares à charneira e do arco de transporte da perspectiva da cota), representaram-se a **leve**.

247.

Dados:

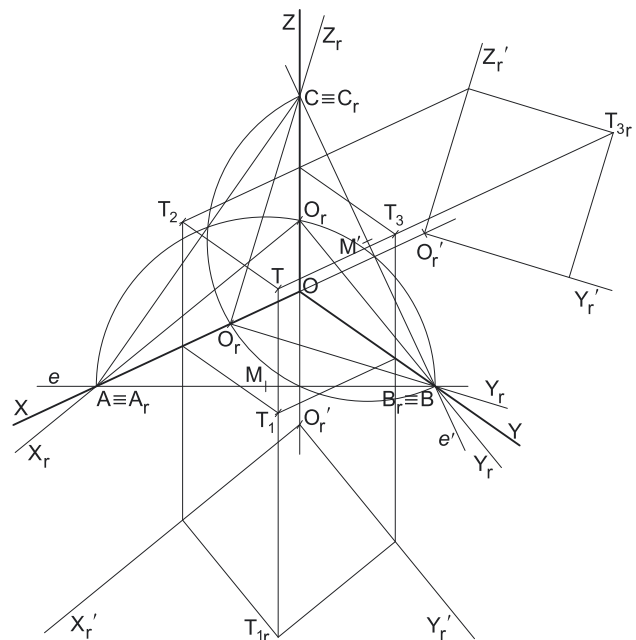
Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo **Z** faz um ângulo de 115° com a perspectiva do eixo **X** e um ângulo de 125° com a perspectiva do eixo **Y**, as perspectivas destes dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Y**) fazem, entre si, um ângulo de 120° (115° + 125° + 120° = 360°). Em seguida, desenhou-se o triângulo **[ABC]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[ABC]** são arbitrárias.

Resolução:

As coordenadas do ponto **T** medem-se nos eixos a que se referem – a **abscissa** mede-se no eixo **X**, o **afastamento** mede-se no eixo **Y** e a **cota** no eixo **Z**. No entanto, nenhum dos três eixos coordenados é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que nenhuma das coordenadas se projeta em verdadeira grandeza no plano axonométrico, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspectiva trimétrica**, sabe-se que os três eixos sofrem, todos, uma redução diferente (as perspectivas dos três eixos são afetadas por três coeficientes de deformação distintos).

Uma vez que existem **três coeficientes de deformação** distintos, há que rebater os três eixos coordenados, de forma a ser possível determinar os três coeficientes de deformação.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Determinação gráfica dos coeficientes de deformação:

O processo geométrico auxiliar a que se recorreu para determinar os coeficientes de deformação foi o **método dos cortes** (que se fundamenta no **rebatimento dos planos coordenados**), tendo-se optado por rebater o plano **XY**, pois o plano coordenado **XY** contém imediatamente dois eixos com coeficientes de deformação diferentes. Sublinha-se que se poderia ter optado por rebater um outro *plano coordenado* qualquer, pois, na prática, será necessário rebater outro *plano coordenado*, de forma a rebater os **três eixos coordenados** – é necessário, na prática, rebater dois *planos coordenados*.

Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XY*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta **e**) é a reta suporte do lado **[AB]** do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente.

A grande diferença entre este processo (o **método dos cortes**) e o anterior (o **rebatimento dos planos coordenados**) consiste no facto de, neste processo, o *plano coordenado* ser rebatido para o interior da *pirâmide axonométrica* e, em seguida, ser transladado para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (das perpendiculares à charneira). Sublinha-se que, no **rebatimento dos planos coordenados**, o rebatimento do *plano coordenado* processava-se para fora da pirâmide axonométrica.

O triângulo **[AOB]** está contido no *plano coordenado XY* e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano coordenado **XY** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[AB]** (o ponto **M**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio $\overline{MA} = \overline{MB}$, desenhou-se a semicircunferência de que **[AB]** é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **O_r**, sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O** é, afinal, o plano projetante do eixo **Z**. Note ainda que, efetuando o rebatimento do plano **XY** para o interior da pirâmide axonométrica, o ponto **O_r** fica sobre a perspectiva do eixo **Z**.

O eixo **X_r** fica definido por **O_r** e **A**, que é um ponto fixo. O eixo **Y_r** fica definido por **O_r** e **B**, que é outro ponto fixo. O triângulo **[AO_rB]** é retângulo em **O_r**.

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **XY** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento). Nesse sentido, deslocou-se o ponto **O_r** ao longo da perpendicular à charneira que por ele passa (que é a perspectiva do eixo **Z**) – o comprimento da deslocação a efetuar é completamente arbitrário.

O ponto **O_r'** é o ponto **O** rebatido e após a translação efetuada. O eixo **X_r'** passa por **O_r'** e é paralelo ao eixo **X_r** (o eixo **X_r'** está definido por um ponto e uma direção). O eixo **Y_r'** é paralelo ao eixo **Y_r** (o eixo **Y_r'** está definido por um ponto e uma direção). O plano **XY**, rebatido e transladado, é o plano **X_r'O_r'Y_r'**.

Tendo em conta que, numa **perspetiva trimétrica**, é necessário rebater os três eixos coordenados (porque os três apresentam coeficientes de deformação diferentes), é necessário, agora, rebater um dos outros dois *planos coordenados* (ambos contêm o eixo que nos falta rebater – o eixo **Z**). Optou-se por rebater o *plano coordenado YZ*.

Assim, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta **e'**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado YZ*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta **e'**) é a reta suporte do lado **[BC]** do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente.

O triângulo **[BOC]** está contido no *plano coordenado YZ* e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano coordenado **YZ** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[BC]** (o ponto **M'**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M'** e com raio $\overline{M'B} = \overline{M'C}$, desenhou-se a semicircunferência de que **[BC]** é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **O_r**, sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O** é, afinal, o plano projetante do eixo **X**. Note ainda que, efetuando o rebatimento do plano **YZ** para o interior da pirâmide axonométrica, o ponto **O_r** fica sobre a perspectiva do eixo **X**.

O eixo **Y_r** fica definido por **O_r** e **B**, que é um ponto fixo. O eixo **Z_r** fica definido por **O_r** e **C**, que é outro ponto fixo. O triângulo **[BO_rC]** é retângulo em **O_r**. Note que existe uma repetição no rebatimento do eixo **Y** – o eixo **Y** foi rebatido duas vezes, pelo rebatimento de diferentes *planos coordenados*.

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **YZ** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento). Nesse sentido, deslocou-se o ponto **O_r** ao longo da perpendicular à charneira que por ele passa (que é a perspectiva do eixo **X**) – o comprimento da deslocação a efetuar é completamente arbitrário.

O ponto **O_r'** é o ponto **O** rebatido e após a translação efetuada. O eixo **Y_r'** passa por **O_r'** e é paralelo ao eixo **Y_r** (o eixo **Y_r'** está definido por um ponto e uma direção). O eixo **Z_r'** é paralelo ao eixo **Z_r** (o eixo **Z_r'** está definido por um ponto e uma direção). O plano **YZ**, rebatido e transladado, é o plano **Y_r'O_r'Z_r'**.

Sublinha-se que, neste processo (o **método dos cortes**) existe uma sistemática **repetição de notações**, à qual não é possível escapar. De facto, havendo dois rebatimentos de planos coordenados e duas translações desses planos coordenados rebatidos, existe um conjunto de notações que se repete necessariamente – existem dois **O_r**, dois **O_r'**, dois **Y_r** e dois **Y_r'**.

Determinação das perspetivas do ponto T:

A determinação das perspetivas do ponto **T** poder-se-ia processar a partir das perspetivas das suas coordenadas, como nas situações anteriores, mas, nesta situação, optou-se por um processo ligeiramente diferente – a representação, nos dois *planos coordenados* rebatidos (e transladados) das respetivas projeções do ponto **T**, em rebatimento.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, no plano **XY** rebatido e transladado, sobre o eixo X_r' , representou-se a **abscissa** do ponto **T** (4 cm, em verdadeira grandeza e a partir de O_r') e, no eixo Y_r' , representou-se o **afastamento** do ponto **T** (4 cm, em verdadeira grandeza e a partir de O_r'). A partir destas duas coordenadas foi possível representar T_{1r} , que é a **projeção horizontal** do ponto **T** em rebatimento (no rebatimento do plano **XY**).

Em seguida, no plano **YZ** rebatido e transladado, sobre o eixo Y_r' , representou-se o **afastamento** do ponto **T** (4 cm, em verdadeira grandeza e a partir de O_r') e, no eixo Z_r' , representou-se a **cota** do ponto **T** (4 cm, em verdadeira grandeza e a partir de O_r'). A partir destas duas coordenadas foi possível representar T_{3r} , que é a **projeção lateral** do ponto **T** em rebatimento (no rebatimento do plano **YZ**).

Em seguida, conduziu-se, por T_{1r} (a **projeção horizontal** do ponto **T** em rebatimento), uma perpendicular à charneira do respetivo rebatimento (reta **e**) e, por T_{3r} (a **projeção lateral** do ponto **T** em rebatimento), uma perpendicular à respetiva charneira do rebatimento (reta **e'**). O ponto de concorrência das duas perpendiculares às respetivas charneiras é a **perspetiva propriamente dita** do ponto **T**.

Em seguida, inverteram-se os dois rebatimentos (com o recurso a perpendiculares às respetivas charneiras), o que nos permitiu determinar as perspetivas das coordenadas do ponto **T** sobre as perspetivas dos respetivos *eixos coordenados* e, assim, concluir a construção da perspetiva do paralelepípedo de que as perspetivas dos pontos **O** e **T** são dois vértices espacialmente opostos. Nos vértices (opostos a **O**) das faces desse paralelepípedo que estão contidas nos *planos coordenados* foi possível, ainda, representar T_1 (a perspetiva da projeção horizontal do ponto **T**), T_2 (a perspetiva da projeção frontal do ponto **T**) e T_3 (a perspetiva da projeção lateral do ponto **T**).

Eixo que sofre a maior deformação perspética:

O eixo que sofre **maior deformação perspética** é o eixo **Y**.

Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O pedido é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do rebatimento dos *planos coordenados XY* e *YZ*, da translação daqueles planos em rebatimento e, ainda, das perpendiculares à charneira), representaram-se a **leve**.

248.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspetivas dos três *eixos coordenados*. A perspetiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que o eixo **Y** faz ângulos iguais (de 125°) com as perspetivas dos outros dois eixos, sabe-se imediatamente que o eixo **Y** é o eixo que sofre uma redução isolada. Assim, as perspetivas do eixo **X** e do eixo **Z** fazem, entre si, um ângulo de 110° ($2 \times 125^\circ + 110^\circ = 360^\circ$). Em seguida, desenhou-se o triângulo **[RST]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[RST]** são arbitrárias.

Resolução:

Como o cubo se apoia, por três das suas faces, nos três *planos coordenados*, é possível concluir, de forma imediata, que três das arestas do cubo estão contidas nos três *eixos coordenados* e um dos seus vértices é a origem do referencial – o ponto **O**. Assim, é necessário medir os 5 cm (a medida da aresta do cubo) em cada um dos *eixos coordenados*. No entanto, nenhum dos três *eixos coordenados* é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que nenhum dos eixos se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* – não é possível, de forma direta, medir o comprimento da aresta do cubo sobre as perspetivas dos eixos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

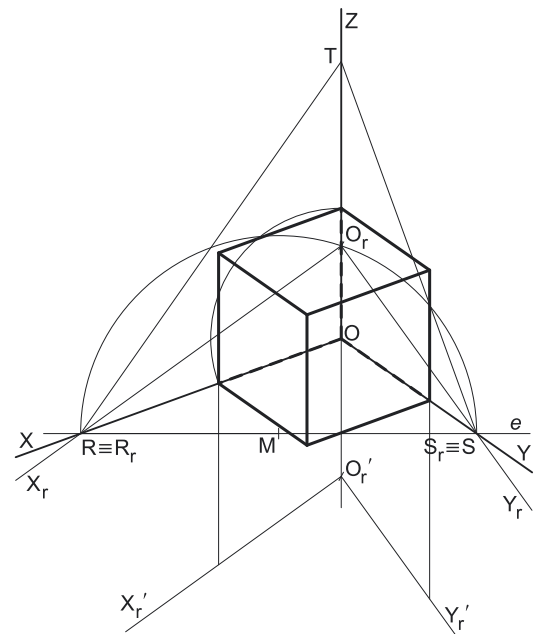
Tratando-se de uma **perspetiva dimétrica**, sabe-se que dois eixos sofrem a mesma redução, que é diferente da redução do terceiro eixo (as perspetivas dos três eixos são afetadas por dois coeficientes de deformação distintos).

Por outro lado, e como acima se referiu, o eixo **Y** é o eixo que sofre uma redução isolada – tal significa que os outros dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Z**) sofrem a mesma redução (as suas perspetivas são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação), redução essa que é diferente da redução (do coeficiente de deformação) que afeta a perspetiva do eixo **Y**.

Uma vez que existem **dois coeficientes de deformação** distintos, há que rebater dois dos *eixos coordenados* – dois eixos que apresentem diferentes coeficientes de deformação, de forma a ser possível determinar os dois coeficientes de deformação.

Determinação gráfica dos coeficientes de deformação:

O processo geométrico auxiliar a que se recorreu para determinar os coeficientes de deformação foi o **método dos cortes** (que se fundamenta no **rebatimento dos planos coordenados**), tendo-se optado por rebater o plano **XY**, pois o plano coordenado **XY** contém dois eixos com coeficientes de deformação diferentes – com **um único rebatimento** é possível determinar os **dois coeficientes de deformação**. Nesse sentido, poder-se-ia ter optado por rebater o *plano coordenado YZ* (que contém igualmente dois eixos com reduções diferentes), mas não o *plano coordenado XZ*, pois o eixo **X** e o eixo **Z** sofrem a mesma redução (e isso implicaria o recurso a um outro rebatimento, para se determinar o coeficiente de deformação do eixo **Y**).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta e), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XY*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta e) é a reta suporte do lado [RS] do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente.

A grande diferença entre este processo (o **método dos cortes**) e o anterior (o **rebatimento dos planos coordenados**) consiste no facto de, neste processo, o *plano coordenado* ser rebatido para o interior da *pirâmide axonométrica* e, em seguida, ser transladado para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (das perpendiculares à charneira). Sublinha-se que, no **rebatimento dos planos coordenados**, o rebatimento do *plano coordenado* processava-se para fora da pirâmide axonométrica)

O triângulo [ROS] está contido no *plano coordenado XY* e é um **triângulo retângulo** em O. O rebatimento do plano coordenado XY processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto O ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto O). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de [RS] (o ponto M) – com o compasso, fazendo centro no ponto M e com raio $\overline{MR} = \overline{MS}$, desenhou-se a semicircunferência de que [RS] é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto O conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se O_r , sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto O é, afinal, o plano projetante do eixo Z. Note ainda que, efetuando o rebatimento do plano XY para o interior da pirâmide axonométrica, o ponto O_r fica sobre a perspectiva do eixo Z.

O eixo X_r fica definido por O_r e R, que é um ponto fixo. O eixo Y_r fica definido por O_r e S, que é outro ponto fixo. O triângulo [RO $_r$ S] é retângulo em O_r .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano XY rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento). Nesse sentido, deslocou-se o ponto O_r ao longo da perpendicular à charneira que por ele passa (que é a perspectiva do eixo Z) – o comprimento da deslocação a efetuar é completamente arbitrário.

O ponto O_r' é o ponto O rebatido, após a translação efetuada. O eixo X_r' passa por O_r' e é paralelo ao eixo X_r (o eixo X_r' está definido por um ponto e uma direção). O eixo Y_r' passa por O_r' e é paralelo ao eixo Y_r (o eixo Y_r' está definido por um ponto e uma direção). O plano XY, rebatido e transladado, é o plano $X_r'O_r'Y_r'$.

Determinação das perspectivas da medida da aresta do cubo:

O eixo X_r (o eixo X rebatido, pelo rebatimento do *plano coordenado XY*) está em verdadeira grandeza – já é possível medir a medida da aresta do cubo sobre o eixo X_r . Assim, sobre o eixo X_r , a partir de O_r e no sentido positivo do eixo, mediram-se os 4 cm (a medida da aresta do cubo) e, em seguida, inverteu-se o rebatimento, com o recurso a uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira) – isto permitiu-nos determinar, sobre a perspectiva do eixo X, a perspectiva da medida da aresta do sólido (já reduzida – afetada pelo coeficiente de deformação do eixo X).

Tendo em conta que o eixo X e o eixo Z sofrem a mesma redução (as suas perspectivas são afetadas pelo mesmo coeficiente de deformação), há que transportar essa medida para a perspectiva do eixo Z, onde se situa uma outra aresta do cubo. Assim, com o compasso, fazendo centro na perspectiva do ponto O, transportou-se a perspectiva da medida da aresta do cubo para a perspectiva do eixo Z.

O eixo Y_r (o eixo Y rebatido) está em verdadeira grandeza – já é possível medir a medida da aresta do cubo sobre o eixo Y_r . Assim, sobre o eixo Y_r , a partir de O_r e no sentido positivo do eixo, mediram-se os 4 cm (a medida da aresta do cubo) e, em seguida, inverteu-se o rebatimento, com o recurso a uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira) – isto permitiu-nos determinar, sobre a perspectiva do eixo Y, a perspectiva da medida da aresta do sólido (já reduzida – afetada pelo coeficiente de deformação do eixo Y).

Este procedimento permitiu-nos obter os **três vértices** do cubo que se situam nos *eixos coordenados* (para além do ponto O, que é um outro vértice do cubo).

Determinação da perspectiva do cubo:

A partir da perspectiva da medida da aresta do cubo sobre as perspectivas dos três eixos, desenharam-se os três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em O – esses paralelogramos são as perspectivas das três faces do cubo que pertencem aos *planos coordenados*. O desenho desses paralelogramos permitiu-nos determinar as perspectivas de mais **três vértices** do cubo (que não se identificaram).

Tendo em conta que um cubo tem **oito vértices** e que já temos as perspectivas de sete deles, falta-nos a perspectiva do último vértice, que é o vértice espacialmente oposto ao vértice O. Assim, determinou-se a perspectiva desse vértice conduzindo, pelas perspectivas dos três vértices anteriores, as perspectivas das arestas em falta (que são paralelas às perspectivas dos eixos) – o ponto de concorrência das três arestas é a perspectiva do oitavo vértice do cubo.

Por fim, desenhou-se a perspectiva do cubo, identificando convenientemente as arestas invisíveis do sólido (as arestas que estão contidas nos *eixos coordenados*).

Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo X, eixo Y e eixo Z) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. O pedido é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do rebatimento do *plano coordenado XY*, da translação do plano XY rebatido, das perpendiculares à charneira e do arco de transporte da perspectiva da medida da aresta do cubo), representaram-se a **leve**.

249.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo Z representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo Z faz um ângulo de 115° com a perspectiva do eixo X e um ângulo de 125° com a perspectiva do eixo Y , as perspectivas destes dois eixos (o eixo X e o eixo Y) fazem, entre si, um ângulo de 120° ($115^\circ + 125^\circ + 120^\circ = 360^\circ$). Em seguida, desenhou-se o triângulo $[RST]$, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo $[RST]$ são arbitrárias.

Resolução:

As coordenadas dos três pontos medem-se nos eixos a que se referem – as abscissas medem-se no eixo X , os afastamentos medem-se no eixo Y e as cotas no eixo Z . No entanto, nenhum dos três eixos coordenados é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que nenhuma das coordenadas se projeta em verdadeira grandeza no plano axonométrico – não é possível, de forma direta, medir qualquer das coordenadas dos pontos sobre as perspectivas dos eixos respetivos, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tratando-se de uma **perspetiva trimétrica**, sabe-se que os três eixos sofrem, todos, uma redução diferente (as perspetivas dos três eixos são afetadas por três coeficientes de deformação distintos).

Uma vez que existem **três coeficientes de deformação** distintos, há que rebater os três eixos coordenados, de forma a ser possível determinar os três coeficientes de deformação.

Determinação gráfica dos coeficientes de deformação:

O processo geométrico auxiliar a que se recorreu para determinar os coeficientes de deformação foi o **método dos cortes** (que se fundamenta no **rebatimento dos planos coordenados**), tendo-se optado por rebater o plano XY , pois o plano coordenado XY contém imediatamente dois eixos com coeficientes de deformação diferentes. Sublinha-se que se poderia ter optado por rebater um outro plano coordenado qualquer, pois, na prática, será necessário rebater outro plano coordenado, de forma a rebater os **três eixos coordenados** – é necessário, na prática, rebater dois planos coordenados.

Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta e), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano coordenado XY) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta e) é a reta suporte do lado $[RS]$ do triângulo fundamental, que se identificou imediatamente.

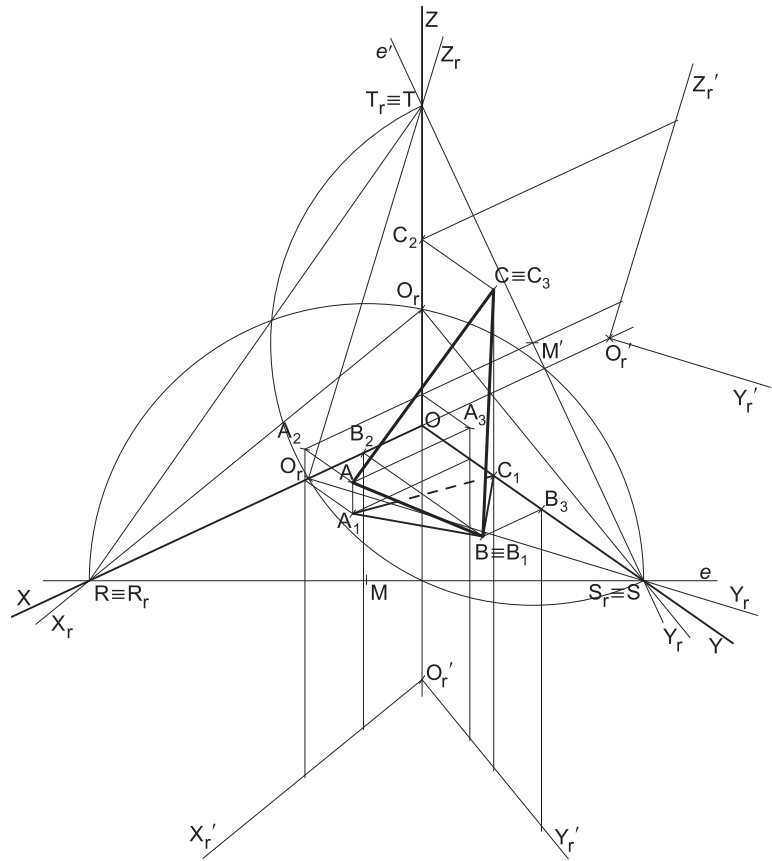
A grande diferença entre este processo (o **método dos cortes**) e o anterior (o **rebatimento dos planos coordenados**) consiste no facto de, neste processo, o plano coordenado ser rebatido para o interior da pirâmide axonométrica e, em seguida, ser transladado para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (das perpendiculares à charneira). Sublinha-se que, no **rebatimento dos planos coordenados**, o rebatimento do plano coordenado processava-se para fora da pirâmide axonométrica).

O triângulo $[ROS]$ está contido no plano coordenado XY e é um **triângulo retângulo** em O . O rebatimento do plano coordenado XY processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto O ao plano axonométrico (o raio do arco do rebatimento do ponto O). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de $[RS]$ (o ponto M) – com o compasso, fazendo centro no ponto M e com raio $\overline{MR} = \overline{MS}$, desenhou-se a semicircunferência de que $[RS]$ é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto O conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se O_r , sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto O é, afinal, o plano projetante do eixo Z . Note ainda que, efetuando o rebatimento do plano XY para o interior da pirâmide axonométrica, o ponto O_r fica sobre a perspetiva do eixo Z .

O eixo X_r fica definido por O_r e R , que é um ponto fixo. O eixo Y_r fica definido por O_r e S , que é outro ponto fixo. O triângulo $[RO_rS]$ é retângulo em O_r .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano XY rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento). Nesse sentido, deslocou-se o ponto O_r ao longo da perpendicular à charneira que por ele passa (que é a perspetiva do eixo Z) – o comprimento da deslocação a efetuar é completamente arbitrário.

O ponto O_r' é o ponto O rebatido, após a translação efetuada. O eixo X_r' passa por O_r' e é paralelo ao eixo X_r (o eixo X_r' está definido por um ponto e uma direção). O eixo Y_r' passa por O_r' e é paralelo ao eixo Y_r (o eixo Y_r' está definido por um ponto e uma direção). O plano XY , rebatido e transladado, é o plano $X_r'O_r'Y_r'$.



(continua na página seguinte)

Tendo em conta que, numa **perspetiva trimétrica**, é necessário rebater os três eixos coordenados (porque os três apresentam coeficientes de deformação diferentes), é necessário, agora, rebater um dos outros dois *planos coordenados* (ambos contêm o eixo que nos falta rebater – o eixo **Z**). Optou-se por rebater o *plano coordenado YZ*.

Assim, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta e'), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado YZ*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta e') é a reta suporte do lado **[ST]** do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente.

O triângulo **[SOT]** está contido no *plano coordenado YZ* e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano coordenado **YZ** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza), pois não é conhecida a distância do ponto **O** ao *plano axonométrico* (o raio do arco do rebatimento do ponto **O**). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[ST]** (o ponto **M'**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M'** e com raio $\overline{M'S} = \overline{M'T}$, desenhou-se a semicircunferência de que **[ST]** é um diâmetro. Pela perspetiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **O_r**, sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O** é, afinal, o plano projetante do eixo **X**. Note ainda que, efetuando o rebatimento do plano **YZ** para o interior da pirâmide axonométrica, o ponto **O_r** fica sobre a perspetiva do eixo **X**.

O eixo **Y_r** fica definido por **O_r** e **S**, que é um ponto fixo. O eixo **Z_r** fica definido por **O_r** e **T**, que é outro ponto fixo. O triângulo **[SO_rT]** é retângulo em **O_r**. Note que existe uma repetição no rebatimento do eixo **Y** – o eixo **Y** foi rebatido duas vezes, pelo rebatimento de diferentes *planos coordenados*.

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **YZ** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento). Nesse sentido, deslocou-se o ponto **O_r** ao longo da perpendicular à charneira que por ele passa (que é a perspetiva do eixo **X**) – o comprimento da deslocação a efetuar é completamente arbitrário.

O ponto **O_r'** é o ponto **O** rebatido e após a translação efetuada. O eixo **Y_r'** passa por **O_r'** e é paralelo ao eixo **Y_r** (o eixo **Y_r'** está definido por um ponto e uma direção). O eixo **Z_r'** é paralelo ao eixo **Z_r** (o eixo **Z_r'** está definido por um ponto e uma direção). O plano **YZ**, rebatido e trasladado, é o plano **Y_r'O_r'Z_r'**.

Sublinha-se que, neste processo (o **método dos cortes**) existe uma sistemática **repetição de notações**, à qual não é possível escapar. De facto, havendo dois rebatimentos de planos coordenados e duas translações desses planos coordenados rebatidos, existe um conjunto de notações que se repete necessariamente – existem dois **O_r**, dois **O_r'**, dois **Y_r** e dois **Y_r'**.

Determinação das perspetivas das coordenadas dos três pontos:

O eixo **X_r'** (o eixo **X** rebatido e trasladado), o eixo **Y_r'** (o eixo **Y** rebatido e trasladado) e o eixo **Z_r'** (o eixo **Z** rebatido e trasladado) estão, todos, em verdadeira grandeza.

Assim, sobre o eixo **X_r'**, a partir de **O_r'** e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abscissas** dos três pontos, em verdadeira grandeza (tendo em conta que **C** tem abscissa nula). Sobre o eixo **Y_r'** (no rebatimento do plano **XY**), a partir de **O_r'** e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos três pontos, em verdadeira grandeza. Sobre o eixo **Z_r'**, a partir de **O_r'** e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **cotas** dos três pontos, em verdadeira grandeza (tendo em conta que **B** tem cota nula). Invertendo o rebatimento, com o recurso a retas perpendiculares às respetivas charneiras dos dois rebatimentos efetuados, determinaram-se as coordenadas dos três pontos já reduzidas (afetadas pelo coeficiente de deformação) e nos respetivos eixos – sobre a perspetiva do eixo **X** estão as perspetivas das **abscissas** dos três pontos, sobre a perspetiva do eixo **Y** estão as perspetivas dos **afastamentos** dos três pontos e sobre a perspetiva do eixo **Z** estão as perspetivas das **cotas** dos três pontos.

Determinação das perspetivas dos três pontos e do triângulo:

A partir das perspetivas das três coordenadas do ponto **A** determinaram-se as perspetivas das suas projeções nas faces do triedro (**A₁**, **A₂** e **A₃**), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspetivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **A**. **A₁** é a perspetiva da projeção horizontal do ponto **A**. **A₂** é a perspetiva da projeção frontal do ponto **A**. **A₃** é a perspetiva da projeção lateral do ponto **A**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspetiva propriamente dita do ponto **A**. Para tal conduziu-se, pela perspetiva de **A₁**, a perspetiva da reta projetante horizontal de **A** (que é paralela à perspetiva do eixo **Z**), pela perspetiva de **A₂** conduziu-se a perspetiva da reta projetante frontal de **A** (que é paralela à perspetiva do eixo **Y**) e pela perspetiva de **A₃** conduziu-se a perspetiva da reta projetante lateral de **A** (que é paralela à perspetiva do eixo **X**) – as três retas interseccionam-se num ponto, que é a perspetiva propriamente dita do ponto **A**, definindo a perspetiva de um paralelepípedo de que as perspetivas dos pontos **O** e **A** são dois vértices espacialmente opostos.

As perspetivas dos pontos **B** e **C** determinaram-se repetindo, para cada um deles, o processo acima exposto para a determinação das perspetivas do ponto **A**. No entanto, uma vez que o ponto **B** tem cota nula, o ponto **B** situa-se no plano **XY**, pelo que se tem **B₁ ≡ B**. De forma semelhante, atendendo a que o ponto **C** tem abscissa nula, o ponto **C** situa-se no plano **YZ**, pelo que se tem **C₃ ≡ C**.

Por fim, desenharam-se as perspetivas do triângulo. O triângulo **[ABC]** é a perspetiva propriamente dita do triângulo. O triângulo **[A₁B₁C₁]** é a perspetiva da projeção horizontal do triângulo. O triângulo **[A₂B₂C₂]** é a perspetiva da projeção frontal do triângulo. O triângulo **[A₃B₃C₃]** é a perspetiva da projeção lateral do triângulo. Tenha em conta que se respeitaram as invisibilidades das projeções, resultantes da respetiva ocultação pelo próprio triângulo (que é uma **figura opaca**).

Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O *triângulo fundamental* representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspetiva do triângulo representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspetivas das projeções do triângulo, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do rebatimento dos *planos coordenados XY* e **YZ**, da translação daqueles planos em rebatimento e, ainda, das perpendiculares à charneira), representaram-se a **leve**.

250.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados que fazem, entre si, três ângulos de 120° . Há a salientar que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical.

Resolução:

Atendendo a que, numa perspectiva isométrica normalizada, os coeficientes de redução são desprezados (considera-se que não existe qualquer deformação), representaram-se as coordenadas de **A** sobre os respetivos eixos, em verdadeira grandeza.

Assim, sobre a perspectiva do eixo **X**, a partir da perspectiva do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abscissa** o ponto **A** em verdadeira grandeza (3 cm). De forma semelhante, sobre a perspectiva do eixo **Y**, a partir da perspectiva do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se o **afastamento** o ponto **A** em verdadeira grandeza (2 cm). Por fim, sobre a perspectiva do eixo **Z**, a partir da perspectiva do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se a **cota** o ponto **A** em verdadeira grandeza (5 cm).

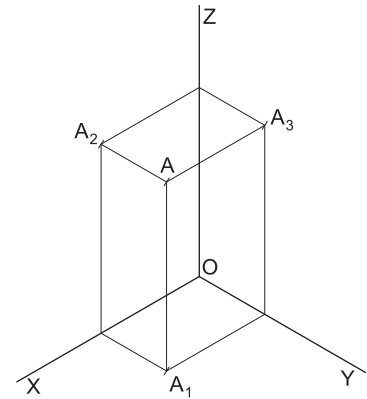
Determinação das perspectivas do ponto A:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **A** determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro (**A₁**, **A₂** e **A₃**), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **A**. **A₁** é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **A**. **A₂** é a perspectiva da projeção frontal do ponto **A**. **A₃** é a perspectiva da projeção lateral do ponto **A**.

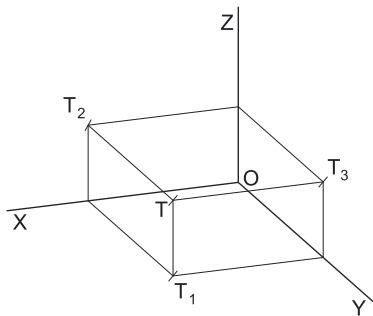
Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **A**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de **A₁**, a perspectiva da reta projetante horizontal de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **A₂** conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **A₃** conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas interseccionam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **A**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **A** são dois vértices espacialmente opostos.

Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O pedido é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada, representaram-se a **leve**.



251.



Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos, fazendo, entre si, os ângulos normalizados e tendo em conta que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. A perspectiva do eixo **Y** faz ângulos de $131^\circ 30'$ com as perspectivas do eixo **X** e do eixo **Z** ($2 \times 131^\circ 30' = 263^\circ$) que, por sua vez, fazem um ângulo de 97° entre si ($263^\circ + 97^\circ = 360^\circ$).

Resolução:

Numa perspectiva dimétrica normalizada, o coeficiente de redução do eixo **X** e do eixo **Z** é desprezado (considera-se que não existe deformação), enquanto o eixo **Y** apresenta um coeficiente de redução isolado de 0,5.

Assim, sobre a perspectiva do eixo **X**, a partir da perspectiva do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abscissa** o ponto **T** em verdadeira grandeza (4 cm). De forma semelhante, sobre a perspectiva do eixo **Z**, a partir da perspectiva do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se a **cota** o ponto **T** em verdadeira grandeza (2 cm)

Por fim, sobre a perspectiva do eixo **Y**, a partir da perspectiva do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se o **afastamento** do ponto **T** multiplicado pelo coeficiente de redução normalizado ($6 \text{ cm} \times 0,5 = 3 \text{ cm}$).

Determinação das perspectivas do ponto T:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **T** determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro (**T₁**, **T₂** e **T₃**), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **T**. **T₁** é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **T**. **T₂** é a perspectiva da projeção frontal do ponto **T**. **T₃** é a perspectiva da projeção lateral do ponto **T**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **T**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de **T₁**, a perspectiva da reta projetante horizontal de **T** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **T₂** conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **T** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **T₃** conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **T** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas interseccionam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **T**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **T** são dois vértices espacialmente opostos.

Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O pedido é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada, representaram-se a **leve**.

252.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos, fazendo, entre si, os ângulos normalizados e tendo em conta que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. As perspectivas do eixo **X** e do eixo **Z** fazem, entre si, um ângulo de 95° e as perspectivas do eixo **Y** e do eixo **Z** fazem, entre si, um ângulo de 108° (o ângulo entre as perspectivas do eixo **X** e do eixo **Y** é 157° (o ângulo restante, pois $95^\circ + 108^\circ + 157^\circ = 360^\circ$)).

Resolução:

Numa perspectiva trimétrica normalizada, o coeficiente de redução do eixo **Z** é desprezado (considera-se que não existe deformação), enquanto o eixo **X** apresenta um coeficiente de redução de 0,9 e o eixo **Y** apresenta um coeficiente de redução de 0,5.

Assim, sobre a perspectiva do eixo **Z**, a partir da perspectiva do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se a **cota** do ponto **M** em **verdadeira grandeza** (3 cm).

Em seguida, sobre a perspectiva do eixo **X**, a partir da perspectiva do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abscissa** do ponto **M** multiplicada pelo coeficiente de redução normalizado (5 cm x 0,9 = 4,5 cm).

Por fim, sobre a perspectiva do eixo **Y**, a partir da perspectiva do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se o **afastamento** do ponto **M** multiplicado pelo coeficiente de redução normalizado (6 cm x 0,5 = 3 cm).

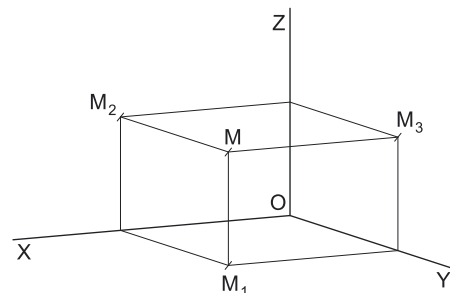
Determinação das perspectivas do ponto M:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **M** determinaram-se as perspectivas das suas projeções nas faces do triedro (**M₁**, **M₂** e **M₃**), recorrendo aos três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** e o outro na respetiva projeção do ponto **M**. **M₁** é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **M**. **M₂** é a perspectiva da projeção frontal do ponto **M**. **M₃** é a perspectiva da projeção lateral do ponto **M**.

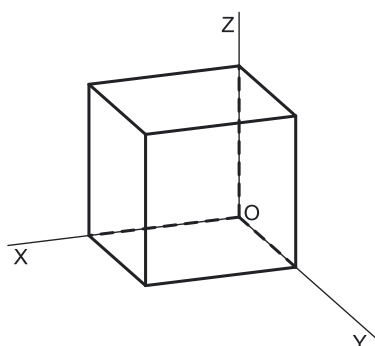
Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **M**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de **M₁**, a perspectiva da reta projetante horizontal de **M** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **M₂** conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **M** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **M₃** conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **M** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas interseitam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **M**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **M** são dois vértices espacialmente opostos.

Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O pedido é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada, representaram-se a **leve**.



253.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos, fazendo, entre si, os ângulos normalizados e tendo em conta que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. A perspectiva do eixo **Y** faz ângulos de $131^\circ 30'$ com as perspectivas do eixo **X** e do eixo **Z** ($2 \times 131^\circ 30' = 263^\circ$) que, por sua vez, fazem um ângulo de 97° entre si ($263^\circ + 97^\circ = 360^\circ$).

Resolução:

Como o cubo se apoia, por três das suas faces, nos três *planos coordenados*, é possível concluir, de forma imediata, que três das arestas do cubo estão contidas nos três *eixos coordenados* e um dos seus vértices é a origem do referencial – o ponto **O**. Assim, é necessário medir os 4 cm (a medida da aresta do cubo) em cada um dos *eixos coordenados*. Numa perspectiva dimétrica normalizada, o coeficiente de redução do eixo **X** e do eixo **Z** é desprezado (considera-se que não existe deformação), enquanto o eixo **Y** apresenta um coeficiente de redução isolado de 0,5.

Assim, sobre a perspectiva do eixo **X**, a partir da perspectiva do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se a medida da aresta do cubo em **verdadeira grandeza** (4 cm). De forma semelhante, sobre a perspectiva do eixo **Z**, a partir da perspectiva do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se a medida da aresta do cubo, em **verdadeira grandeza**.

Por fim, sobre a perspectiva do eixo **Y**, a partir da perspectiva do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se a medida da aresta do cubo multiplicada pelo coeficiente de redução normalizado (4 cm x 0,5 = 2 cm).

Determinação da perspectiva do cubo:

A partir da perspectiva da medida da aresta do cubo sobre as perspectivas dos três eixos, desenharam-se os três paralelogramos de que as perspectivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** – esses paralelogramos são as perspectivas das três faces do cubo que pertencem aos *planos coordenados*. O desenho desses paralelogramos permitiu-nos determinar as perspectivas de mais **três vértices** do cubo (que não se identificaram).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Tendo em conta que um cubo tem **oito vértices** e que já temos as perspetivas de sete deles, falta-nos a perspetiva do último vértice, que é o vértice espacialmente oposto ao vértice **O**. Assim, determinou-se a perspetiva desse vértice conduzindo, pelas perspetivas dos três vértices anteriores, as perspetivas das arestas em falta (que são paralelas as perspetivas dos eixos) – o ponto de concorrência das três arestas é a perspetiva do oitavo vértice do cubo.

Por fim, desenhou-se a perspetiva do cubo, identificando convenientemente as arestas invisíveis do sólido (as arestas que estão contidas nos *eixos coordenados*).

Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspetiva do cubo representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada, representaram-se a **leve**.

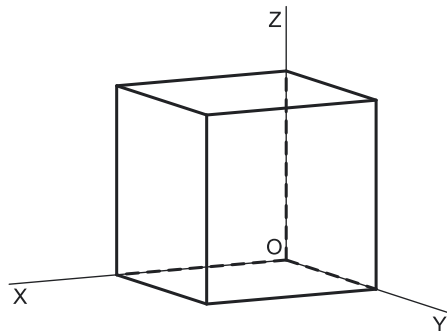
254.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspetivas dos três eixos, fazendo, entre si, os ângulos normalizados e tendo em conta que a perspetiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. As perspetivas do eixo **X** e do eixo **Z** fazem, entre si, um ângulo de 95° e as perspetivas do eixo **Y** e do eixo **Z** fazem, entre si, um ângulo de 108° (o ângulo entre as perspetivas do eixo **X** e do eixo **Y** é 157° (o ângulo restante, pois $95^\circ + 108^\circ + 157^\circ = 360^\circ$)).

Resolução:

Como o cubo se apoia, por três das suas faces, nos três *planos coordenados*, é possível concluir, de forma imediata, que três das arestas do cubo estão contidas nos três *eixos coordenados* e um dos seus vértices é a origem do referencial – o ponto **O**. Assim, é necessário medir os 5 cm (a medida da aresta do cubo) em cada um dos *eixos coordenados*. Numa perspetiva trimétrica normalizada, o coeficiente de redução do eixo **Z** é desprezado (considera-se que não existe deformação), enquanto o eixo **X** apresenta um coeficiente de redução de 0,9 e o eixo **Y** apresenta um coeficiente de redução de 0,5.



Assim, sobre a perspetiva do eixo **Z**, a partir da perspetiva do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se a medida da aresta do cubo em **verdadeira grandeza** (5 cm).

Em seguida, sobre a perspetiva do eixo **X**, a partir da perspetiva do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se a medida da aresta do cubo multiplicada pelo coeficiente de redução normalizado (5 cm x 0,9 = 4,5 cm).

Por fim, sobre a perspetiva do eixo **Y**, a partir da perspetiva do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se a medida da aresta do cubo multiplicada pelo coeficiente de redução normalizado (5 cm x 0,5 = 2,5 cm).

Determinação da perspetiva do cubo:

A partir da perspetiva da medida da aresta do cubo sobre as perspetivas dos três eixos, desenharam-se os três paralelogramos de que as perspetivas das coordenadas são dois lados (duas a duas) e que têm um vértice em **O** – esses paralelogramos são as perspetivas das três faces do cubo que pertencem aos *planos coordenados*. O desenho desses paralelogramos permitiu-nos determinar as perspetivas de mais **três vértices** do cubo (que não se identificaram).

Tendo em conta que um cubo tem **oito vértices** e que já temos as perspetivas de sete deles, falta-nos a perspetiva do último vértice, que é o vértice espacialmente oposto ao vértice **O**. Assim, determinou-se a perspetiva desse vértice conduzindo, pelas perspetivas dos três vértices anteriores, as perspetivas das arestas em falta (que são paralelas as perspetivas dos eixos) – o ponto de concorrência das três arestas é a perspetiva do oitavo vértice do cubo.

Por fim, desenhou-se a perspetiva do cubo, identificando convenientemente as arestas invisíveis do sólido (as arestas que estão contidas nos *eixos coordenados*).

Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspetiva do cubo representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada, representaram-se a **leve**.

(continua na página seguinte)

255.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados que fazem, entre si, três ângulos de 120° . Há a salientar que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Em seguida, desenhou-se o triângulo [RST], que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo [RST] são arbitrárias.

Resolução:

O plano que contém o quadrado [ABCD] (o plano coordenado **YXY**) não é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que o quadrado [ABCD] **não se projeta em verdadeira grandeza** no plano axonométrico (a perspectiva do quadrado não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Esse processo geométrico auxiliar tem de ser necessariamente o **rebatimento do plano coordenado XY** (o plano que contém o quadrado) para o plano axonométrico (o plano de projeção).

O rebatimento do plano coordenado **XY** pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes**. Optou-se por recorrer ao **método dos cortes**, em função da grande vantagem que este processo apresenta, na resolução dos exercícios futuros.

Rebatimento do plano coordenado XY:

Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano coordenado **XY**) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta **e**) é a reta suporte do lado [RS] do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente.

O triângulo [ROS] está contido no plano coordenado **XY** e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano coordenado **XY** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de [RS] (o ponto **M**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio $\overline{MR} = \overline{MS}$, desenhou-se a semicircunferência de que [RS] é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **O_r**, sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O** é, afinal, o plano projetante do eixo **Z**. Note ainda que, efetuando o rebatimento do plano **XY** para o interior da pirâmide axonométrica, o ponto **O_r** fica sobre a perspectiva do eixo **Z**.

O eixo **X_r** fica definido por **O_r** e **R**, que é um ponto fixo. O eixo **Y_r** fica definido por **O_r** e **S**, que é outro ponto fixo. O triângulo [RO_rS] é retângulo em **O_r**.

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **XY** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento). Nesse sentido, deslocou-se o ponto **O_r** ao longo da perpendicular à charneira que por ele passa (que é a perspectiva do eixo **Z**) – o comprimento da deslocação a efetuar é completamente arbitrário.

O ponto **O_r'** é o ponto **O** rebatido, e após a translação efetuada. O eixo **X_r'** passa por **O_r'** e é paralelo ao eixo **X_r** (o eixo **X_r'** está definido por um ponto e uma direção). O eixo **Y_r'** passa por **O_r'** e é paralelo ao eixo **Y_r** (o eixo **Y_r'** está definido por um ponto e uma direção). O plano **XY**, rebatido e transladado, é o plano **X_r'O_r'Y_r'**.

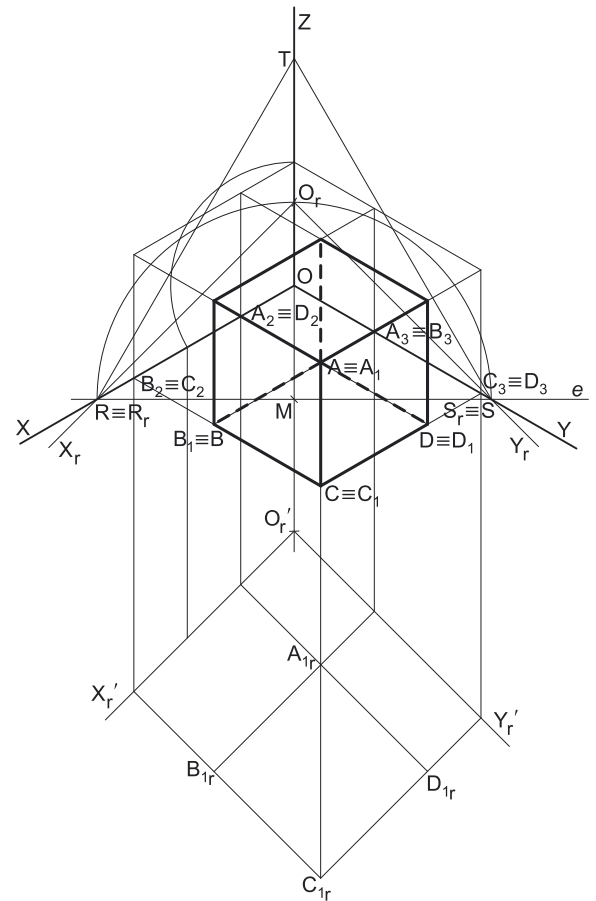
Construção da projeção horizontal do quadrado, em verdadeira grandeza:

No plano **XY** rebatido e transladado, representou-se a **abscissa** do ponto **A** sobre o eixo **X_r'** (2 cm, em verdadeira grandeza e a partir de **O_r'**) e representou-se o **afastamento** do ponto **A** no eixo **Y_r'** (3 cm, em verdadeira grandeza e a partir de **O_r'**). Este procedimento permitiu-nos determinar **A_{1r}**, a projeção horizontal do ponto **A** em rebatimento.

Tenha em conta que, nesta situação particular, em que o quadrado está contido no plano coordenado **XY** (todos os seus vértices têm cota nula), os vértices do quadrado estão coincidentes com as suas projeções horizontais. No entanto, porque essa é uma situação particular e não uma situação universal, optou-se por apresentar a situação universal – ao rebater o plano coordenado **XY**, estamos a rebater a **projeção horizontal da figura**, razão pela qual se optou por representar as projeções horizontais dos pontos (em rebatimento) e não os próprios pontos.

Assim, a partir de **A_{1r}**, efetuou a construção da **projeção horizontal do quadrado**, em verdadeira grandeza (em rebatimento), atendendo aos dados do enunciado – o lado [AB] é paralelo ao eixo **X** e o cubo tem 4 cm de aresta. Assim, por **A_{1r}**, conduziu-se uma paralela ao eixo **X_r'**, sobre a qual se mediram os 4 cm, o que nos permitiu obter **B_{1r}** (a projeção horizontal do ponto **B**, em rebatimento). Em seguida, a partir de **A_{1r}** e **B_{1r}**, efetuou-se a construção da projeções horizontal do quadrado em verdadeira grandeza (em rebatimento), o que nos permitiu determinar as projeções horizontais dos outros dois vértices da figura (**C_{1r}** e **D_{1r}**) – o quadrado [A_{1r}B_{1r}C_{1r}D_{1r}] é a projeção horizontal do quadrado [ABCD], em verdadeira grandeza (em rebatimento). Note que os lados do quadrado são paralelos, dois a dois, aos dois eixos coordenados que definem o plano **XY** – o eixo **X** e o eixo **Y**.

Para determinar a perspectiva do quadrado [ABCD] é necessário inverter o rebatimento, o que se processa com o recurso a perpendiculares à charneira.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Determinação da perspectiva do quadrado [ABCD]:

Em primeiro lugar, transportaram-se, para o eixo X_r' , as abscissas dos quatro vértices do quadrado (ortogonalmente ao eixo X_r') e transportaram-se, para o eixo Y_r' , os afastamentos dos quatro vértices do quadrado (ortogonalmente ao eixo Y_r'). A partir das perspectivas destas duas coordenadas de cada ponto, determinaram-se as perspectivas das suas projeções horizontais (A_1, B_1, C_1 e D_1). Os pontos têm cota nula, pelo que os pontos estão coincidentes com as suas projeções horizontais – tem-se, imediatamente, $A_1 \equiv A, B_1 \equiv B, C_1 \equiv C$ e $D_1 \equiv D$. As perspectivas das projeções frontais dos quatro pontos situam-se sobre a perspectiva do eixo X e as perspectivas das suas projeções laterais situam-se sobre a perspectiva do eixo Y .

A partir das perspectivas dos quatro vértices, desenhou-se a perspectiva propriamente dita do quadrado [ABCD].

Determinação da perspectiva do cubo:

Para determinar a perspectiva do cubo, há que determinar as perspectivas dos vértices da face superior, o que se processa em função das respetivas cotas. A cota dos vértices da face superior do sólido é igual à medida da aresta do cubo. Por outro lado, tratando-se de uma perspectiva isométrica, todos os eixos sofrem a mesma deformação. Assim, sobre o eixo X_r' , a partir de O_r' e no sentido positivo do eixo, mediram-se os 4 cm (a aresta do cubo) e transportou-se essa medida para a perspectiva do eixo X , com o recurso a uma perpendicular à charneira. Este procedimento permitiu-nos obter, sobre a perspectiva do eixo X , a medida da aresta do sólido, só que, para o efeito pretendido (obter a cota dos vértices da face superior), está no eixo errado (deveria estar sobre a perspectiva do eixo Z).

Assim, com o compasso, fazendo centro na perspectiva do ponto O , transportou-se a perspectiva da medida da aresta do cubo para a perspectiva do eixo Z (que tem a mesma redução que a perspectiva do eixo X), o que nos permitiu obter, sobre a perspectiva do eixo Z , a perspectiva da medida da aresta do sólido.

Em seguida, transportou-se essa medida (a cota da face superior do sólido), ao longo de paralelas às perspectivas dos outros dois eixos (o eixo X e o eixo Y), para as linhas de chamada correspondentes das projeções frontais e das projeções laterais dos vértices da face inferior, o que nos permitiu determinar as perspectivas as projeções frontais e das projeções laterais dos quatro vértices da face superior (que, todavia, não se identificaram).

Por fim, determinaram-se as perspectivas propriamente ditas dos quatro vértices da face superior (que também não se identificaram, para evitar o excesso de notações) e desenhou-se a perspectiva do sólido, identificando convenientemente as arestas invisíveis do sólido.

Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo X , eixo Y e eixo Z) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspectiva do cubo representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do rebatimento do plano coordenado XY , da translação do plano XY rebatido, da construção da projeção horizontal do quadrado em rebatimento ou, ainda, das perpendiculares à charneira), representaram-se a **leve**.

256.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo Z representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que as perspectivas do eixo X e do eixo Z fazem, entre si, um ângulo de 100° , restam 260° para os outros dois ângulos ($360^\circ - 100^\circ = 260^\circ$). O eixo Y é o eixo que sofre uma redução isolada, pelo que a sua perspectiva faz ângulos iguais com as perspectivas dos outros dois eixos, ou seja, ângulos de 130° ($260^\circ : 2 = 130^\circ$). Em seguida, desenhou-se o triângulo [RST], que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo [RST] são arbitrárias.

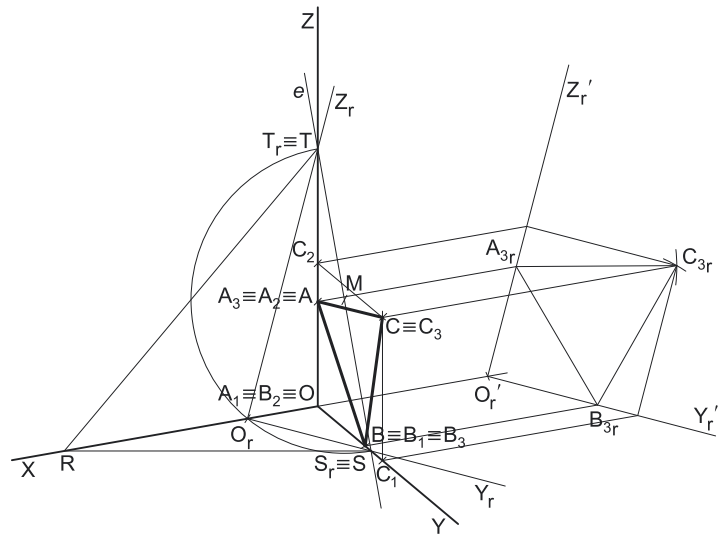
Resolução:

O plano que contém o triângulo [ABC] (o plano coordenado YZ) não é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que o triângulo [ABC] não se projeta em verdadeira grandeza no plano axonométrico (a perspectiva do triângulo não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Esse processo geométrico auxiliar tem de ser necessariamente o **rebatimento do plano coordenado YZ** (o plano que contém o triângulo) para o plano axonométrico (o plano de projeção).

O rebatimento do plano coordenado YZ pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes**. Optou-se por recorrer ao **método dos cortes**, em função da grande vantagem que este processo apresenta, na resolução dos exercícios futuros.

Rebatimento do plano coordenado YZ :

Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta e), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano coordenado YZ) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta e) é a reta suporte do lado [ST] do triângulo fundamental, que se identificou imediatamente.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O triângulo [SOT] está contido no *plano coordenado YZ* e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano coordenado **YZ** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de [ST] (o ponto **M**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio $\overline{MS} = \overline{MT}$, desenhou-se a semicircunferência de que [ST] é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se O_r , sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O** é, afinal, o plano projetante do eixo **X**. Note ainda que, efetuando o rebatimento do plano **YZ** para o interior da pirâmide axonométrica, o ponto O_r fica sobre a perspectiva do eixo **X**.

O eixo Y_r fica definido por O_r e **S**, que é um ponto fixo. O eixo Z_r fica definido por O_r e **T**, que é outro ponto fixo. O triângulo [SO_rT] é retângulo em O_r .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **YZ** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento). Nesse sentido, deslocou-se o ponto O_r ao longo da perpendicular à charneira que por ele passa (que é a perspectiva do eixo **X**) – o comprimento da deslocção a efetuar é completamente arbitrário.

O ponto O_r' é o ponto **O** rebatido, após a translação efetuada. O eixo Y_r' passa por O_r' e é paralelo ao eixo Y_r (o eixo Y_r' está definido por um ponto e uma direção). O eixo Z_r' passa por O_r' e é paralelo ao eixo Z_r (o eixo Z_r' está definido por um ponto e uma direção). O plano **YZ**, rebatido e transladado, é o plano $Y_r'O_r'Z_r'$.

Construção da projeção lateral do triângulo, em verdadeira grandeza:

No plano **YZ** rebatido e transladado, sobre o eixo Y_r' , representou-se o **afastamento** do ponto **B** (4 cm, em verdadeira grandeza e a partir de O_r') – tendo em conta que o ponto **B** tem cota nula, foi possível representar, de imediato, B_{3r} , que é a projeção lateral do ponto **B**, em rebatimento (que se situa no eixo Y_r'). Em seguida, no eixo Z_r' , representou-se a **cota** do ponto **A** (3 cm, em verdadeira grandeza e a partir de O_r') – tendo em conta que o ponto **A** tem afastamento nulo, foi possível representar, de imediato, A_{3r} , que é a projeção lateral do ponto **A**, em rebatimento (que se situa no eixo Z_r').

Tenha em conta que, nesta situação particular, em que o triângulo está contido no *plano coordenado YZ* (todos os seus vértices têm abcissa nula), os pontos **A** e **B** estão coincidentes com as suas projeções laterais. No entanto, porque essa é uma situação particular e não uma situação universal, optou-se por apresentar a situação universal – ao rebater o *plano coordenado YZ*, estamos a rebater a **projeção lateral da figura**, razão pela qual se optou por representar as projeções laterais dos pontos (em rebatimento) e não os próprios pontos.

A partir de A_{3r} e B_{3r} , e porque tudo o que está contido no plano coordenado **YZ** está em verdadeira grandeza (em rebatimento), foi possível efetuar a construção da **projeção lateral do triângulo**, em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar C_{3r} (a projeção lateral do terceiro vértice do triângulo) – o triângulo [$A_{3r}B_{3r}C_{3r}$] é a projeção lateral do triângulo [ABC], em verdadeira grandeza (em rebatimento).

Para determinar a perspectiva do triângulo [ABC] é necessário inverter o rebatimento o que se processa com o recurso a perpendiculares à charneira.

Determinação da perspectiva do triângulo [ABC]:

Por A_{3r} , conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – tendo em conta que o ponto **A** é um ponto do eixo **Z**, a perspectiva de A_3 (a projeção lateral do ponto **A**) está imediatamente sobre a perspectiva do eixo **Z**. Em seguida, determinaram-se as restantes perspectivas do ponto **A** – **A** tem abcissa nula, pelo que se tem $A \equiv A_3$ (sendo **A** a perspectiva propriamente dita do ponto **A**). O ponto **A** tem afastamento nulo, pelo que está coincidente com a sua projeção frontal (tem-se imediatamente $A_2 \equiv A \equiv A_3$) e a sua projeção horizontal situa-se no eixo **X** (A_1 está coincidente com o ponto **O**, neste caso, pelo que as suas perspectivas estão coincidentes).

Por B_{3r} , conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – tendo em conta que o ponto **B** é um ponto do eixo **Y**, a perspectiva de B_3 (a projeção lateral do ponto **B**) está imediatamente sobre a perspectiva do eixo **Y**. Em seguida, determinaram-se as restantes perspectivas do ponto **B** – **B** tem abcissa nula, pelo que se tem $B \equiv B_3$ (sendo **B** a perspectiva propriamente dita do ponto **B**). O ponto **B** tem cota nula, pelo que está coincidente com a sua projeção horizontal (tem-se imediatamente $B_1 \equiv B \equiv B_3$) e a sua projeção frontal situa-se no eixo **X** (B_2 está coincidente com o ponto **O**, neste caso, pelo que as suas perspectivas estão coincidentes).

Para inverter o rebatimento do ponto **C** transportou-se a sua cota para o eixo Z_r' (a partir de C_{3r} e ortogonalmente ao eixo Z_r') e, deste, para a perspectiva do eixo **Z**, com uma perpendicular à charneira – este procedimento permitiu-nos determinar C_2 (a perspectiva da projeção frontal do ponto **C**), sobre a perspectiva do eixo **Z**. Em seguida, transportou-se o afastamento do ponto **C** para o eixo Y_r' (a partir de C_{3r} e ortogonalmente ao eixo Y_r') e, deste, para a perspectiva do eixo **Y**, com uma perpendicular à charneira – este procedimento permitiu-nos determinar C_1 (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **C**), sobre a perspectiva do eixo **Y**.

Por fim, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **C**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de C_1 , a perspectiva da reta projetante horizontal de **C** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**) e pela perspectiva de C_2 conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **C** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) – o ponto de concorrência entre as duas retas é C_3 , a perspectiva da projeção lateral do ponto **C**. Note que C_3 se situa na perpendicular à charneira que passa por C_{3r} . Tendo em conta que **C** tem abcissa nula (situa-se no plano **YZ**), tem-se imediatamente $C \equiv C_3$ (sendo **C** a perspectiva propriamente dita do ponto **C**).

A partir das perspectivas dos três vértices, desenhou-se a perspectiva do triângulo [ABC].

Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspectiva do triângulo representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do rebatimento do *plano coordenado YZ*, da translação do plano **YZ** rebatido, da construção da projeção lateral do triângulo em rebatimento ou, ainda, das perpendiculares à charneira), representaram-se a **leve**.

257.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos *coordenados*. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo **X** faz um ângulo de 120° com a perspectiva do eixo **Z** e um ângulo de 110° com a perspectiva do eixo **Y**, as perspectivas destes dois eixos (o eixo **Y** e o eixo **Z**) fazem, entre si, um ângulo de 130° ($120^\circ + 110^\circ + 130^\circ = 360^\circ$). Em seguida, desenhou-se o triângulo **[RST]**, que é o *triângulo fundamental* – as dimensões do triângulo **[RST]** são arbitrárias.

Resolução:

O plano que contém o quadrado **[ABCD]** (o *plano coordenado XZ*) não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que o quadrado **[ABCD]** **não se projeta em verdadeira grandeza no plano axonométrico** (a perspectiva do quadrado não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Esse processo geométrico auxiliar tem de ser necessariamente o **rebatimento do plano coordenado XZ** (o plano que contém o quadrado) para o *plano axonométrico* (o plano de projeção).

O rebatimento do *plano coordenado XZ* pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes**. Optou-se por recorrer ao **método dos cortes**, em função da grande vantagem que este processo apresenta, na resolução dos exercícios futuros.

Rebatimento do plano coordenado XZ:

Assim, em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XZ*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, a charneira do rebatimento (reta **e**) é a reta suporte do lado **[RT]** do *triângulo fundamental*, que se identificou imediatamente.

O triângulo **[ROT]** está contido no *plano coordenado XZ* e é um **triângulo retângulo** em **O**. O rebatimento do plano coordenado **XZ** processa-se através da construção deste triângulo em rebatimento (em verdadeira grandeza). Nesse sentido, determinou-se o ponto médio de **[RT]** (o ponto **M**) – com o compasso, fazendo centro no ponto **M** e com raio $MR = MT$, desenhou-se a semicircunferência de que **[RT]** é um diâmetro. Pela perspectiva do ponto **O** conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) e determinou-se **O_r**, sobre a semicircunferência. Note que o plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **O** é, afinal, o plano projetante do eixo **X**. Note ainda que, efetuando o rebatimento do plano **XZ** para o interior da pirâmide axonométrica, o ponto **O_r** fica sobre a perspectiva do eixo **Y**.

O eixo **X_r** fica definido por **O_r** e **R**, que é um ponto fixo. O eixo **Z_r** fica definido por **O_r** e **T**, que é outro ponto fixo. O triângulo **[RO_rT]** é retângulo em **O_r**.

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **XZ** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento). Nesse sentido, deslocou-se o ponto **O_r** ao longo da perpendicular à charneira que por ele passa (que é a perspectiva do eixo **Y**) – o comprimento da deslocação a efetuar é completamente arbitrário.

O ponto **O_r'** é o ponto **O** rebatido, após a translação efetuada. O eixo **X_r'** passa por **O_r'** e é paralelo ao eixo **X_r** (o eixo **X_r'** está definido por um ponto e uma direção). O eixo **Z_r'** passa por **O_r'** e é paralelo ao eixo **Z_r** (o eixo **Z_r'** está definido por um ponto e uma direção). O plano **XZ**, rebatido e transladado, é o plano **X_r'O_r'Z_r'**.

Construção da projeção frontal do quadrado, em verdadeira grandeza:

No plano **XZ** rebatido e transladado, sobre o eixo **X_r'**, representou-se a **abscissa** do ponto **A** (2 cm, em verdadeira grandeza e a partir de **O_r'**) – tendo em conta que o ponto **A** tem cota nula, foi possível representar, de imediato, **A_{2r}**, que é a projeção frontal do ponto **A**, em rebatimento (que se situa no eixo **X_r'**). Em seguida, no eixo **Z_r'**, representou-se a **cota** do ponto **B** (3 cm, em verdadeira grandeza e a partir de **O_r'**) – tendo em conta que o ponto **B** tem afastamento nulo, foi possível representar, de imediato, **B_{2r}**, que é a projeção frontal do ponto **B**, em rebatimento (que se situa no eixo **Z_r'**).

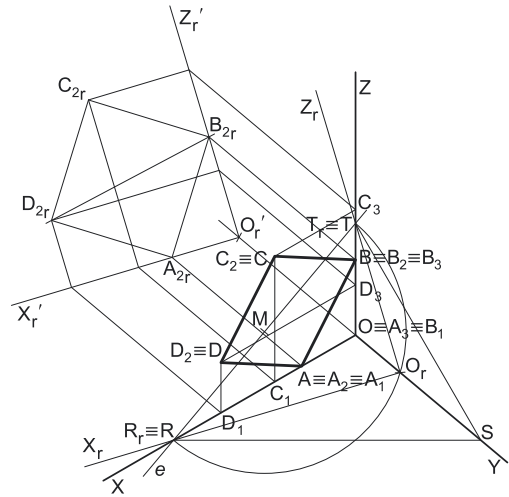
Tenha em conta que, nesta situação particular, em que o quadrado está contido no *plano coordenado XZ* (todos os seus vértices têm afastamento nulo), os pontos **A** e **B** estão coincidentes com as suas projeções frontais. No entanto, porque essa é uma situação particular e não uma situação universal, optou-se por apresentar a situação universal – ao rebater o *plano coordenado XZ*, estamos a rebater a **projeção frontal da figura**, razão pela qual se optou por representar as projeções frontais dos pontos (em rebatimento) e não os próprios pontos.

A partir de **A_{2r}** e **B_{2r}**, e porque tudo o que está contido no plano coordenado **XZ** está em verdadeira grandeza (em rebatimento), foi possível efetuar a construção da **projeção frontal do quadrado**, em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar **C_{2r}** e **D_{2r}**, (as projeções frontais dos outros dois vértice do quadrado) – o quadrado **[A_{2r}B_{2r}C_{2r}D_{2r}]** é a projeção frontal do quadrado **[ABCD]**, em verdadeira grandeza (em rebatimento).

Para determinar a perspectiva do quadrado **[ABCD]** é necessário inverter o rebatimento o que se processa com o recurso a perpendiculares à charneira.

Determinação da perspectiva do quadrado [ABCD]:

Por **A_{2r}**, conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – tendo em conta que o ponto **A** é um ponto do eixo **X**, a perspectiva de **A₂** (a projeção frontal do ponto **A**) está imediatamente sobre a perspectiva do eixo **X**. Em seguida, determinaram-se as restantes perspectivas do ponto **A** – **A** tem afastamento nulo, pelo que se tem $A \equiv A_2$ (sendo **A** a perspectiva propriamente dita do ponto **A**). O ponto **A** tem cota nula, pelo que está coincidente com a sua projeção horizontal (tem-se imediatamente $A_1 \equiv A \equiv A_2$) e a sua projeção lateral situa-se no eixo **Y** (**A₃** está coincidente com o ponto **O**, neste caso, pelo que as suas perspectivas estão coincidentes).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por B_2 , conduziu-se uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do seu rebatimento) – tendo em conta que o ponto B é um ponto do eixo Z , a perspectiva de B_2 (a projeção frontal do ponto B) está imediatamente sobre a perspectiva do eixo Z . Em seguida, determinaram-se as restantes perspectivas do ponto B – B tem afastamento nulo, pelo que se tem $B \equiv B_2$ (sendo B a perspectiva propriamente dita do ponto B). O ponto B tem abcissa nula, pelo que está coincidente com a sua projeção lateral (tem-se imediatamente $B_3 \equiv B \equiv B_2$) e a sua projeção horizontal situa-se no eixo Y (B_3 está coincidente com o ponto O , neste caso, pelo que as suas perspectivas estão coincidentes).

Para inverter o rebatimento do ponto C transportou-se a sua cota para o eixo Z_r' (a partir de C_{2r} e ortogonalmente ao eixo Z_r') e, deste, para a perspectiva do eixo Z , com uma perpendicular à charneira – este procedimento permitiu-nos determinar C_3 (a perspectiva da projeção lateral do ponto C), sobre a perspectiva do eixo Z . Em seguida, transportou-se a abcissa do ponto C para o eixo X_r' (a partir de C_{2r} e ortogonalmente ao eixo X_r') e, deste, para a perspectiva do eixo X , com uma perpendicular à charneira – este procedimento permitiu-nos determinar C_1 (a perspectiva da projeção horizontal do ponto C), sobre a perspectiva do eixo X .

Por fim, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto C . Para tal conduziu-se, pela perspectiva de C_1 , a perspectiva da reta projetante horizontal de C (que é paralela à perspectiva do eixo Z) e pela perspectiva de C_3 conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de C (que é paralela à perspectiva do eixo X) – o ponto de concorrência entre as duas retas é C_2 , a perspectiva da projeção frontal do ponto C . Note que C_2 se situa na perpendicular à charneira que passa por C_{2r} . Tendo em conta que C tem afastamento nulo (situa-se no plano XZ), tem-se imediatamente $C \equiv C_2$ (sendo C a perspectiva propriamente dita do ponto C).

A inversão do rebatimento do ponto D e a determinação das suas perspectivas processou-se de forma idêntica à exposta para o ponto C . A partir das perspectivas dos quatro vértices, desenhou-se a perspectiva do quadrado $[ABCD]$ – note que a perspectiva do quadrado $[ABCD]$ é um losango, pois está deformada (o quadrado não se projeta em verdadeira grandeza no plano axonométrico).

Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo X , eixo Y e eixo Z) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspectiva do quadrado representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do rebatimento do plano coordenado XZ , da translação do plano XZ rebatido, da construção da projeção frontal do quadrado em rebatimento ou, ainda, das perpendiculares à charneira), representaram-se a **leve**.

258.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos, fazendo, entre si, os ângulos normalizados e tendo em conta que a perspectiva do eixo Z se representa, convencionalmente, na vertical. A perspectiva do eixo Y faz ângulos de $131^\circ 30'$ com as perspectivas do eixo X e do eixo Z ($2 \times 131^\circ 30' = 263^\circ$) que, por sua vez, fazem um ângulo de 97° entre si ($263^\circ + 97^\circ = 360^\circ$).

Resolução:

Numa perspectiva dimétrica normalizada, o coeficiente de redução do eixo X e do eixo Z é desprezado (considera-se que não existe deformação), enquanto o eixo Y apresenta um coeficiente de redução isolado de 0,5.

Como o sólido se apoia, por três das suas faces, nos três planos coordenados, é possível concluir, de forma imediata, que três das arestas do sólido estão contidas nos três eixos coordenados e um dos seus vértices é a origem do referencial – o ponto O . Assim, há que representar, sobre cada eixo e a partir da perspectiva do ponto O , a medida da respetiva aresta do sólido.

Nesse sentido, sobre a perspectiva do eixo X , a partir da perspectiva do ponto O e no sentido positivo do eixo, representou-se (em verdadeira grandeza) a medida da aresta do sólido que está contida no eixo X (6 cm). De forma semelhante, sobre a perspectiva do eixo Z , a partir da perspectiva do ponto O e no sentido positivo do eixo, representou-se (em verdadeira grandeza) a medida da aresta do objeto que está contida no eixo Z .

Por fim, sobre a perspectiva do eixo Y , a partir da perspectiva do ponto O e no sentido positivo do eixo, representou-se (em verdadeira grandeza) a medida da aresta do sólido que está contida no eixo Y (5 cm), mas multiplicada pelo coeficiente de redução normalizado ($5 \text{ cm} \times 0,5 = 2,5 \text{ cm}$).

A partir das medições efetuadas (sobre as perspectivas dos eixos), construíram-se as projeções do objeto sobre os respetivos planos coordenados, baseadas em paralelas às perspectivas dos eixos.

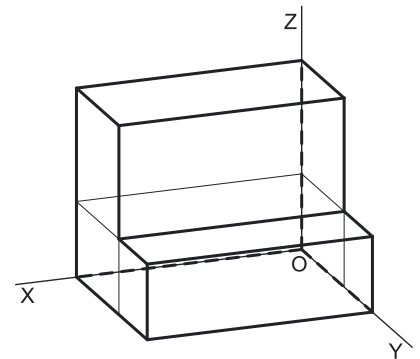
Determinação da perspectiva do objeto:

Pelas perspectivas das projeções de cada um dos vértices do objeto (que não se identificaram) conduziram-se as perspectivas das respetivas retas projetantes, obtendo as respetivas perspectivas (a semelhança do que se processa na determinação das perspectivas de um ponto).

Esse procedimento permitiu-nos determinar, sucessiva e simultaneamente, as perspectivas de cada uma das arestas do sólido. Estas permitiram-nos desenhar a perspectiva do objeto, na qual se assinalaram convenientemente as invisibilidades existentes.

Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo X , eixo Y e eixo Z) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do objeto representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada, representaram-se a **leve**.



24

AXONOMETRIAS CLINOGONAIS (OU OBLÍQUAS): CAVALEIRA E PLANOMÉTRICA

259.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. Há a salientar que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Uma vez que os ângulos da direção das projetantes se referem ao eixo **X** e ao eixo **Z**, conclui-se que o plano axonométrico é o plano **XZ** – o eixo **X** e o eixo **Z** fazem, entre si, um ângulo de 90° . A perspectiva do eixo **Y** (o eixo que não está contido no plano axonométrico) faz, com a parte positiva do eixo **X** um ângulo de 120° (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo **Z**, um ângulo de 150° (que é outro ângulo obtuso).

Resolução:

As coordenadas do ponto **A** medem-se nos eixos a que se referem – a abscissa do ponto **A** mede-se no eixo **X**, o afastamento do ponto **A** mede-se no eixo **Y** e a cota do ponto **A** no eixo **Z**. Uma vez que o plano axonométrico é o plano **XZ**, dois dos eixos coordenados estão contidos no plano axonométrico, ou seja, estão em verdadeira grandeza – o eixo **X** e o eixo **Z** (estes dois eixos não apresentam qualquer deformação).

Assim, sobre o eixo **X**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se a abscissa do ponto **A** (2 cm) em verdadeira grandeza. De forma semelhante, sobre o eixo **Z**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se a cota do ponto **A** (5 cm) em verdadeira grandeza. A partir da abscissa e da cota do ponto **A** foi possível determinar, de forma direta, a perspectiva da projeção frontal do ponto **A** – **A**₂.

Já no que respeita ao eixo **Y** (onde se mede o afastamento do ponto **A**), este eixo não é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que o afastamento do ponto **A** não se projeta em verdadeira grandeza no plano axonométrico (o afastamento é a coordenada do ponto **A** que apresenta deformação) – não é possível, de forma direta, medir o afastamento do ponto **A** sobre a perspectiva do eixo **Y**, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Determinação gráfica do coeficiente de deformação:

O afastamento do ponto **A**, porque se mede no eixo **Y**, está afetado pela deformação inerente à projeção do eixo. Para determinar a deformação, há que recorrer ao rebatimento do plano projetante do eixo **Y** para o plano axonométrico (o plano **XZ**). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a própria perspectiva do eixo **Y**. O eixo **Y** rebatido (o eixo **Y**_r) fica perpendicular à perspectiva do eixo **Y**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio).

A partir do ponto **O**, sobre o eixo **Y**_r (e no sentido positivo do eixo), mediu-se o afastamento do ponto **A**, em verdadeira grandeza (4 cm), obtendo-se um ponto **P**_r – o ponto **P** é um ponto do eixo **Y** com o afastamento do ponto **A** (**OP**_r é o afastamento do ponto **A**, em verdadeira grandeza). Por **P**_r conduziu-se uma reta **r**_r, com a inclinação das projetantes (um ângulo de 50°) – a reta **r**_r é a reta projetante do ponto **P**, em rebatimento.

A inclinação das projetantes é de 50° , pelo que o ângulo que a reta **r** faz, no espaço, com o plano axonométrico, é um ângulo de 50° – esse ângulo está contido no plano que contém o eixo **Y** e é ortogonal ao plano axonométrico (trata-se do ângulo entre uma reta e um plano) e corresponde, na prática, ao ângulo entre a reta dada (o eixo **Y**) e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspectiva do eixo **Y**). Assim, esse ângulo, em rebatimento, está no ângulo que a reta **r**_r faz com a perspectiva do eixo **Y** (que é a charneira **e**, e, por isso, roda sobre si própria). O ponto de interseção da reta **r**_r com a perspectiva do eixo **Y** é a perspectiva do ponto **P** (é o vértice do ângulo entre a reta **r**_r e a perspectiva do eixo **Y**).

O segmento **[OP]** é, assim, um segmento representativo da perspectiva do afastamento do ponto **A** – **OP** é a perspectiva do afastamento do ponto **A**.

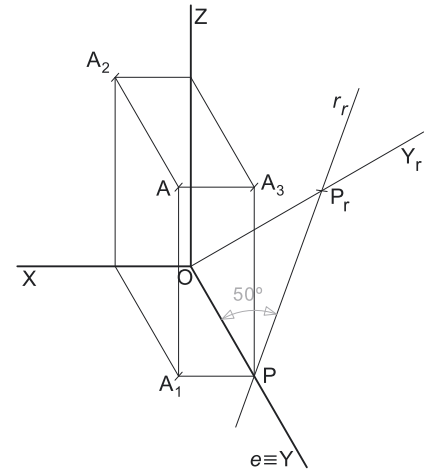
Determinação das perspectivas do ponto **A**:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **A** determinaram-se as perspectivas da sua projeção horizontal (**A**₁) e da sua projeção lateral (**A**₃), recorrendo aos dois paralelogramos respetivos (o paralelogramo de que **A**₁ e **O** são dois vértices opostos e o paralelogramo de que **A**₃ e **O** são dois vértices opostos) – **A**₁ é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **A** e **A**₃ é a perspectiva da projeção lateral do ponto **A**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **A**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de **A**₁, a perspectiva da reta projetante horizontal de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **A**₂ conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **A**₃ conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas interseccionam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **A**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **A** são dois vértices espacialmente opostos.

Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a médio, pois são as linhas estruturantes do exercício. O pedido é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a forte. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do eixo **Y**_r e da reta **r**_r), representaram-se a leve.



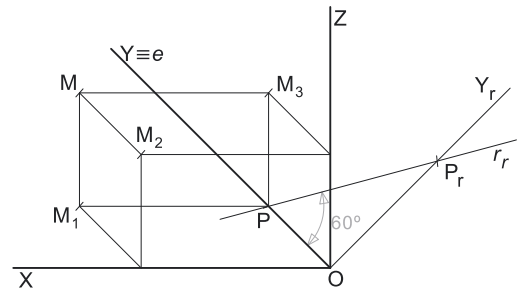
260.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. Há a salientar que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. O enunciado refere expressamente que o plano axonométrico é o plano **XZ** – assim, o eixo **X** e o eixo **Z** fazem, entre si, um ângulo de 90° . A perspectiva do eixo **Y** (o eixo que não está contido no plano axonométrico) faz, com as partes positivas do eixo **X** e do eixo **Z** ângulos de 45° (dois ângulos agudos).

Resolução:

As coordenadas do ponto **M** medem-se nos eixos a que se referem – a abcissa do ponto **M** mede-se no eixo **X**, o afastamento do ponto **M** mede-se no eixo **Y** e a cota do ponto **M** no eixo **Z**. Uma vez que o plano axonométrico é o plano **XZ**, dois dos eixos coordenados estão contidos no plano axonométrico, ou seja, estão em verdadeira grandeza – o eixo **X** e o eixo **Z** (estes dois eixos não apresentam qualquer deformação).



Assim, sobre o eixo **X**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abcissa** do ponto **M** (5 cm) em verdadeira grandeza. De forma semelhante, sobre o eixo **Z**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se a **cota** do ponto **M** (3 cm) em verdadeira grandeza. A partir da abcissa e da cota do ponto **M** foi possível determinar, de forma direta, a perspectiva da projeção frontal do ponto **M** – **M**₂.

Já no que respeita ao eixo **Y** (onde se mede o afastamento do ponto **M**), este eixo não é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que o **afastamento** do ponto **M** não se projeta em verdadeira grandeza no plano axonométrico (o **afastamento** é a coordenada do ponto **M** que apresenta **deformação**) – não é possível, de forma direta, medir o **afastamento** do ponto **M** sobre a perspectiva do eixo **Y**, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Determinação gráfica do coeficiente de deformação:

O **afastamento** do ponto **M**, porque se mede no eixo **Y**, está afetado pela deformação inerente à projeção do eixo. Para determinar a deformação, há que recorrer ao rebatimento do plano projetante do eixo **Y** para o plano axonométrico (o plano **XZ**). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a própria perspectiva do eixo **Y**. O eixo **Y** rebatido (o eixo **Y**_r) fica perpendicular à perspectiva do eixo **Y**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio).

A partir do ponto **O**, sobre o eixo **Y**_r (e no sentido positivo do eixo), mediu-se o **afastamento** do ponto **M**, em verdadeira grandeza (4 cm), obtendo-se um ponto **P**_r – o ponto **P** é um ponto do eixo **Y** com o afastamento do ponto **M** (**OP**_r é o afastamento do ponto **M**, em verdadeira grandeza). Por **P**_r conduziu-se uma reta **r**_r, com a inclinação das projetantes (um ângulo de 60°) – a reta **r**_r é a reta projetante do ponto **P**, em rebatimento.

A inclinação das projetantes é de 60° , pelo que o ângulo que a reta **r** faz, **no espaço**, com o plano axonométrico, é um ângulo de 60° – esse ângulo está contido no plano que contém o eixo **Y** e é ortogonal ao plano axonométrico (trata-se do **ângulo entre uma reta e um plano**) e corresponde, na prática, ao ângulo entre a reta dada (o eixo **Y**) e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspectiva do eixo **Y**). Assim, esse ângulo, em rebatimento, está no ângulo que a reta **r**_r faz com a perspectiva do eixo **Y** (que é a charneira **e**, por isso, roda sobre si próprio). O ponto de interseção da reta **r**_r com a perspectiva do eixo **Y** é a perspectiva do ponto **P** (é o vértice do ângulo entre a reta **r**_r e a perspectiva do eixo **Y**).

O segmento **[OP]** é, assim, um segmento representativo da perspectiva do afastamento do ponto **M** – **OP** é a perspectiva do afastamento do ponto **M**.

Determinação das perspectivas do ponto M:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **M** determinaram-se as perspectivas da sua projeção horizontal (**M**₁) e da sua projeção lateral (**M**₃), recorrendo aos dois paralelogramos respetivos (o paralelogramo de que **M**₁ e **O** são dois vértices opostos e o paralelogramo de que **M**₃ e **O** são dois vértices opostos) – **M**₁ é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **M** e **M**₃ é a perspectiva da projeção lateral do ponto **M**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **M**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de **M**₁, a perspectiva da reta projetante horizontal de **M** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **M**₂ conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **M** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **M**₃ conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **M** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas intersectam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **M**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **M** são dois vértices espacialmente opostos.

Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O pedido é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do eixo **Y**_r e da reta **r**_r), representaram-se a **leve**.

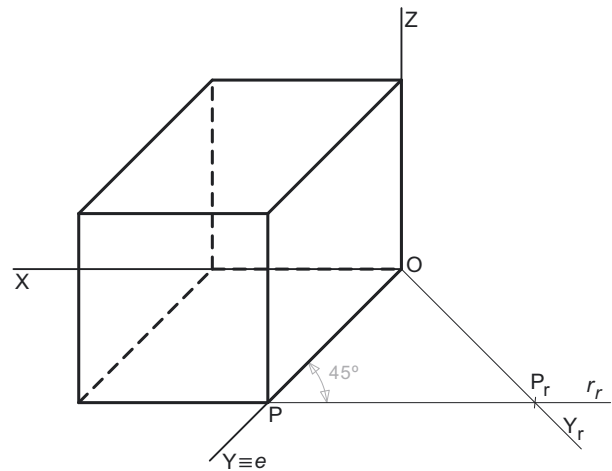
261.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados*. Há a salientar que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Uma vez que os ângulos da direção das projetantes se referem ao eixo **X** e ao eixo **Z**, conclui-se que o *plano axonométrico* é o plano **XZ** – o eixo **X** e o eixo **Z** fazem, entre si, um ângulo de 90° . A perspectiva do eixo **Y** (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com a parte positiva do eixo **X** um ângulo de 45° (que é um ângulo agudo) e, com a parte positiva do eixo **Z**, um ângulo de 135° (que é um ângulo obtuso).

Resolução:

Como o cubo se apoia, por três das suas faces, nos três *planos coordenados*, é possível concluir, de forma imediata, que três das arestas do cubo estão contidas nos três *eixos coordenados* e um dos seus vértices é a origem do referencial – o ponto **O**. Assim, é necessário medir os 5 cm (a medida da aresta do cubo) em cada um dos *eixos coordenados*. Uma vez que o *plano axonométrico* é o plano **XZ**, dois dos *eixos coordenados* estão contidos no *plano axonométrico*, ou seja, estão em verdadeira grandeza – o eixo **X** e o eixo **Z** (estes dois eixos não apresentam qualquer deformação).



Assim, sobre o eixo **X**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, mediram-se os 5 cm (a medida da aresta do cubo). De forma semelhante, sobre o eixo **Z**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, mediram-se os 5 cm (a medida da aresta do cubo). A partir destas duas arestas é possível construir, de forma direta, o quadrado que é a face do cubo que está contida no plano **XZ**. Este procedimento permitiu-nos determinar as perspectivas de **quatro vértices** do cubo (os quatro vértices que estão contidos no plano **XZ**).

Já no que respeita ao eixo **Y** (onde se situa uma outra aresta do cubo), este eixo não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que aquela aresta não se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* (esta aresta é a aresta que apresenta **deformação**) – não é possível, de forma direta, medir o comprimento da aresta do cubo sobre a perspectiva do eixo **Y**, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Determinação gráfica do coeficiente de deformação:

A aresta do cubo que está contida no eixo **Y** está afetada pela deformação inerente à projeção do eixo. Para determinar a deformação, há que recorrer ao rebatimento do plano projetante do eixo **Y** para o *plano axonométrico* (o plano **XZ**). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a própria perspectiva do eixo **Y**. O eixo **Y** rebatido (o eixo **Y_r**) fica perpendicular à perspectiva do eixo **Y**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio).

A partir do ponto **O**, sobre o eixo **Y_r** (e no sentido positivo do eixo), mediram-se os 5 cm (a medida da aresta do cubo), em verdadeira grandeza, obtendo-se um ponto **P_r** – o ponto **P** é um ponto do eixo **Y** que dista 5 cm do ponto **O** (**OP_r** é a aresta do cubo, em verdadeira grandeza). Por **P_r** conduziu-se uma reta **r_r**, com a inclinação das projetantes (um ângulo de 45°) – a reta **r_r** é a reta projetante do ponto **P**, em rebatimento.

A inclinação das projetantes é de 45° , pelo que o ângulo que a reta **r** faz, **no espaço**, com o *plano axonométrico*, é um ângulo de 45° – esse ângulo está contido no plano que contém o eixo **Y** e é ortogonal ao *plano axonométrico* (trata-se do **ângulo entre uma reta e um plano**) e corresponde, na prática, ao ângulo entre a reta dada (o eixo **Y**) e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspectiva do eixo **Y**). Assim, esse ângulo, em rebatimento, está no ângulo que a reta **r_r** faz com a perspectiva do eixo **Y** (que é a charneira **e**, por isso, roda sobre si própria). O ponto de interseção da reta **r_r** com a perspectiva do eixo **Y** é a perspectiva do ponto **P** (é o vértice do ângulo entre a reta **r_r** e a perspectiva do eixo **Y**).

O segmento **[OP]** é, assim, a perspectiva da aresta do cubo que está contida no eixo **Y** – **OP** é a perspectiva do comprimento da aresta.

Determinação da perspectiva do cubo:

A partir da perspectiva da medida da aresta do cubo que está contida no eixo **Y**, desenharam-se os dois paralelogramos que são as perspectivas das faces do cubo que estão contidas no plano **XY** e no plano **YZ**. O desenho desses dois paralelogramos permitiu-nos determinar as perspectivas de mais **dois vértices** do cubo (que não se identificaram).

Tendo em conta que um cubo tem **oito vértices** e que já temos as perspectivas de sete deles, falta-nos a perspectiva do último vértice, que é o vértice espacialmente oposto ao vértice **O**. Assim, determinou-se a perspectiva desse vértice conduzindo as perspectivas das arestas em falta (que são paralelas às perspectivas dos eixos) – o ponto de concorrência das três arestas é a perspectiva do oitavo vértice do cubo.

Por fim, desenhou-se a perspectiva do cubo, identificando convenientemente as arestas invisíveis do sólido (as arestas que estão contidas nos *eixos coordenados*).

Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do cubo representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do eixo **Y_r** e da reta **r_r**), representaram-se a **leve**.

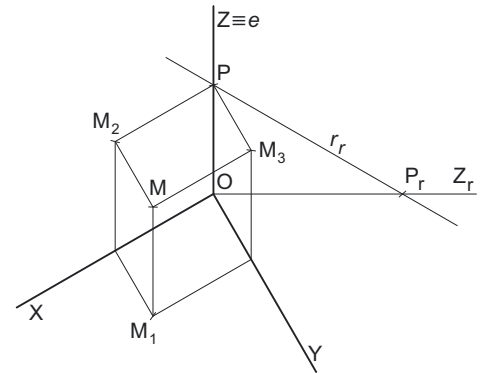
262.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados*. Há a salientar que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Trata-se de uma **perspectiva militar** (ou **planométrica**), pelo que o *plano axonométrico* é o plano **XY** – assim, o eixo **X** e o eixo **Y** fazem, entre si, um ângulo de 90° . A perspectiva do eixo **Z** (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com a parte positiva do eixo **X** um ângulo de 120° (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo **Y**, um ângulo de 150° (que é outro ângulo obtuso).

Resolução:

As coordenadas do ponto **M** medem-se nos eixos a que se referem – a abscissa do ponto **M** mede-se no eixo **X**, o afastamento do ponto **M** mede-se no eixo **Y** e a cota do ponto **M** no eixo **Z**. Uma vez que o *plano axonométrico* é o plano **XY**, dois dos *eixos coordenados* estão contidos no *plano axonométrico*, ou seja, estão em verdadeira grandeza – o eixo **X** e o eixo **Y** (estes dois eixos não apresentam qualquer deformação).



Assim, sobre o eixo **X**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abscissa** do ponto **M** (3 cm) em verdadeira grandeza. De forma semelhante, sobre o eixo **Y**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se o **afastamento** do ponto **M** (2 cm) em verdadeira grandeza. A partir da abscissa e do afastamento do ponto **M** foi possível determinar, de forma direta, a perspectiva da projeção horizontal do ponto **M** – **M₁**.

Já no que respeita ao eixo **Z** (onde se mede a cota do ponto **M**), este eixo não é paralelo ao plano de projeção (*o plano axonométrico*), pelo que a **cota** do ponto **M** não se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* (a **cota** é a coordenada do ponto **M** que apresenta **deformação**) – não é possível, de forma direta, medir a **cota** do ponto **M** sobre a perspectiva do eixo **Z**, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Determinação gráfica do coeficiente de deformação:

A **cota** do ponto **M**, porque se mede no eixo **Z**, está afetada pela deformação inerente à projeção do eixo. Para determinar a deformação, há que recorrer ao rebatimento do plano projetante do eixo **Z** para o *plano axonométrico* (o plano **XY**). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a própria perspectiva do eixo **Z**. O eixo **Z** rebatido (o eixo **Z_r**) fica perpendicular à perspectiva do eixo **Z**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio).

A partir do ponto **O**, sobre o eixo **Z_r** (e no sentido positivo do eixo), mediu-se a **cota** do ponto **M**, em verdadeira grandeza (5 cm), obtendo-se um ponto **P_r** – o ponto **P** é um ponto do eixo **Z** com a cota do ponto **M** (**OP_r** é a cota do ponto **M**, em verdadeira grandeza). Por **P_r** conduziu-se uma reta **r_r**, com a inclinação das projetantes (um ângulo de 60°) – a reta **r_r** é a reta projetante do ponto **P**, em rebatimento.

A inclinação das projetantes é de 60° , pelo que o ângulo que a reta **r** faz, **no espaço**, com o *plano axonométrico*, é um ângulo de 60° – esse ângulo está contido no plano que contém o eixo **Z** e é ortogonal ao *plano axonométrico* (trata-se do **ângulo entre uma reta e um plano**) e corresponde, na prática, ao ângulo entre a reta dada (o eixo **Z**) e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspectiva do eixo **Z**). Assim, esse ângulo, em rebatimento, está no ângulo que a reta **r_r** faz com a perspectiva do eixo **Z** (que é a charneira e, por isso, roda sobre si própria). O ponto de interseção da reta **r_r** com a perspectiva do eixo **Z** é a perspectiva do ponto **P** (é o vértice do ângulo entre a reta **r_r** e a perspectiva do eixo **Z**).

O segmento **[OP]** é, assim, um segmento representativo da perspectiva da cota do ponto **M** – **OP** é a perspectiva da cota do ponto **M**.

Determinação das perspectivas do ponto M:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **M** determinaram-se as perspectivas da sua projeção frontal (**M₂**) e da sua projeção lateral (**M₃**), recorrendo aos dois paralelogramos respetivos (o paralelogramo de que **M₂** e **O** são dois vértices opostos e o paralelogramo de que **M₃** e **O** são dois vértices opostos) – **M₂** é a perspectiva da projeção frontal do ponto **M** e **M₃** é a perspectiva da projeção lateral do ponto **M**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **M**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de **M₁**, a perspectiva da reta projetante horizontal de **M** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **M₂** conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **M** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **M₃** conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **M** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas intersectam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **M**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **M** são dois vértices espacialmente opostos.

Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O pedido é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do eixo **Z_r** e da reta **r_r**), representaram-se a **leve**.

263.

Dados:

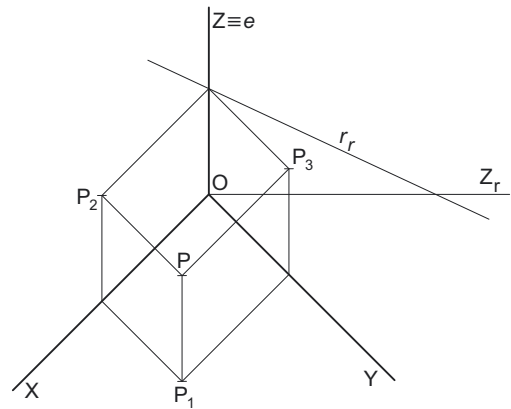
Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. Há a salientar que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Trata-se de uma **perspetiva militar** (ou **planométrica**), pelo que o *plano axonométrico* é o plano **XY** – assim, o eixo **X** e o eixo **Y** fazem, entre si, um ângulo de 90° . A perspectiva do eixo **Z** (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com as partes positivas do eixo **X** e do eixo **Z** ângulos de 135° (dois ângulos obtusos).

Resolução:

As coordenadas do ponto **P** medem-se nos eixos a que se referem – a abscissa do ponto **P** mede-se no eixo **X**, o afastamento do ponto **P** mede-se no eixo **Y** e a cota do ponto **P** no eixo **Z**. Uma vez que o *plano axonométrico* é o plano **XY**, dois dos eixos coordenados estão contidos no *plano axonométrico*, ou seja, estão em verdadeira grandeza – o eixo **X** e o eixo **Y** (estes dois eixos não apresentam qualquer deformação).

Assim, sobre o eixo **X**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abscissa** do ponto **P** (4 cm) em verdadeira grandeza. De forma semelhante, sobre o eixo **Y**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se o **afastamento** do ponto **P** (3 cm) em verdadeira grandeza. A partir da abscissa e do afastamento do ponto **P** foi possível determinar, de forma direta, a perspectiva da projeção horizontal do ponto **P** – **P**₁.

Já no que respeita ao eixo **Z** (onde se mede a cota do ponto **P**), este eixo não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que a **cota** do ponto **P** não se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* (a **cota** é a coordenada do ponto **P** que apresenta **deformação**) – não é possível, de forma direta, medir a **cota** do ponto **P** sobre a perspectiva do eixo **Z**, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.



Determinação gráfica do coeficiente de deformação:

A **cota** do ponto **P**, porque se mede no eixo **Z**, está afetada pela deformação inerente à projeção do eixo. Para determinar a deformação, há que recorrer ao rebatimento do plano projetante do eixo **Z** para o *plano axonométrico* (o plano **XY**). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a própria perspectiva do eixo **Z**. O eixo **Z** rebatido (o eixo **Z**_r) fica perpendicular à perspectiva do eixo **Z**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio).

A partir do ponto **O**, sobre o eixo **Z**_r (e no sentido positivo do eixo), mediu-se a **cota** do ponto **P**, em verdadeira grandeza (6 cm), obtendo-se um ponto (que não se identificou) – esse ponto é um ponto do eixo **Z** com a cota do ponto **P**. Por esse ponto conduziu-se uma reta **r**_r, com a inclinação das projetantes (um ângulo de 65°) – a reta **r**_r é a reta projetante daquele ponto, em rebatimento.

A inclinação das projetantes é de 65° , pelo que o ângulo que a reta **r** faz, **no espaço**, com o *plano axonométrico*, é um ângulo de 65° – esse ângulo está contido no plano que contém o eixo **Z** e é ortogonal ao *plano axonométrico* (trata-se do **ângulo entre uma reta e um plano**) e corresponde, na prática, ao ângulo entre a reta dada (o eixo **Z**) e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspectiva do eixo **Z**). Assim, esse ângulo, em rebatimento, está no ângulo que a reta **r**_r faz com a perspectiva do eixo **Z** (que é a charneira e, por isso, roda sobre si própria). O ponto de interseção da reta **r**_r com a perspectiva do eixo **Z** é o vértice do ângulo entre a reta **r**_r e a perspectiva do eixo **Z** e é o ponto que nos dá a perspectiva da cota do ponto **P** (sobre a perspectiva do eixo **Z**).

Determinação das perspetivas do ponto P:

A partir das perspetivas das três coordenadas do ponto **P** determinaram-se as perspetivas da sua projeção frontal (**P**₂) e da sua projeção lateral (**P**₃), recorrendo aos dois paralelogramos respetivos (o paralelogramo de que **P**₂ e **O** são dois vértices opostos e o paralelogramo de que **P**₃ e **O** são dois vértices opostos) – **P**₂ é a perspectiva da projeção frontal do ponto **P** e **P**₃ é a perspectiva da projeção lateral do ponto **P**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **P**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de **P**₁, a perspectiva da reta projetante horizontal de **P** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **P**₂ conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **P** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **P**₃ conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **P** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas interseccionam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **P**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspetivas dos pontos **O** e **P** são dois vértices espacialmente opostos.

Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O pedido é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do eixo **Z**_r e da reta **r**_r), representaram-se a **leve**.

264.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados*. Há a salientar que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Trata-se de uma **perspetiva militar** (ou **planométrica**), pelo que o *plano axonométrico* é o plano **XY** – assim, o eixo **X** e o eixo **Y** fazem, entre si, um ângulo de 90° . A perspectiva do eixo **Z** (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com a parte positiva do eixo **X** um ângulo de 135° (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo **Y**, um ângulo de 45° (que é um ângulo agudo).

Resolução:

Como o cubo se apoia, por três das suas faces, nos três *planos coordenados*, é possível concluir, de forma imediata, que três das arestas do cubo estão contidas nos três *eixos coordenados* e um dos seus vértices é a origem do referencial – o ponto **O**. Assim, é necessário medir os 4 cm (a medida da aresta do cubo) em cada um dos *eixos coordenados*. Uma vez que o *plano axonométrico* é o plano **XY**, dois dos *eixos coordenados* estão contidos no *plano axonométrico*, ou seja, estão em verdadeira grandeza – o eixo **X** e o eixo **Y** (estes dois eixos não apresentam qualquer deformação).

Assim, sobre o eixo **X**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, mediram-se os 4 cm (a medida da aresta do cubo). De forma semelhante, sobre o eixo **Y**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, mediram-se os 4 cm (a medida da aresta do cubo). A partir destas duas arestas é possível construir, de forma direta, o quadrado que é a face do cubo que está contida no plano **XY**. Este procedimento permitiu-nos determinar as perspectivas de **quatro vértices** do cubo (os quatro vértices que estão contidos no plano **XY**).

Já no que respeita ao eixo **Z** (onde se situa uma outra aresta do cubo), este eixo não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que aquela aresta não se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* (esta aresta é a aresta que apresenta **deformação**) – não é possível, de forma direta, medir o comprimento da aresta do cubo sobre a perspectiva do eixo **Z**, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Determinação gráfica do coeficiente de deformação:

A aresta do cubo que está contida no eixo **Z** está afetada pela deformação inerente à projeção do eixo. Para determinar a deformação, há que recorrer ao rebatimento do plano projetante do eixo **Z** para o *plano axonométrico* (o plano **XY**). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a própria perspectiva do eixo **Z**. O eixo **Z** rebatido (o eixo **Z_r**) fica perpendicular à perspectiva do eixo **Z**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio).

A partir do ponto **O**, sobre o eixo **Z_r** (e no sentido positivo do eixo), mediram-se os 5 cm (a medida da aresta do cubo), em verdadeira grandeza, obtendo-se um ponto – esse ponto é um ponto do eixo **Z** que dista 5 cm do ponto **O**. Por esse ponto conduziu-se uma reta **r_r**, com a inclinação das projetantes (um ângulo de 40°) – a reta **r_r** é a reta projetante daquele ponto, em rebatimento.

A inclinação das projetantes é de 40° , pelo que o ângulo que a reta **r** faz, **no espaço**, com o *plano axonométrico*, é um ângulo de 40° – esse ângulo está contido no plano que contém o eixo **Z** e é ortogonal ao *plano axonométrico* (trata-se do **ângulo entre uma reta e um plano**) e corresponde, na prática, ao ângulo entre a reta dada (o eixo **Z**) e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspectiva do eixo **Z**). Assim, esse ângulo, em rebatimento, está no ângulo que a reta **r_r** faz com a perspectiva do eixo **Z** (que é a charneira **e**, por isso, roda sobre si própria). O ponto de interseção da reta **r_r** com a perspectiva do eixo **Z** é o vértice do ângulo entre a reta **r_r** e a perspectiva do eixo **Z** e é o ponto que nos dá a perspectiva da medida da aresta do cubo que está contida no eixo **Z**.

Determinação da perspectiva do cubo:

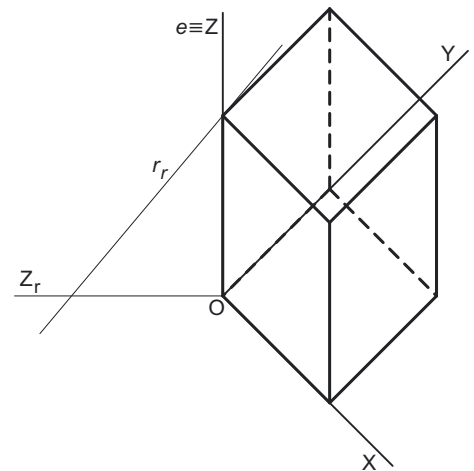
A partir da perspectiva da medida da aresta do cubo que está contida no eixo **Z**, desenharam-se os dois paralelogramos que são as perspectivas das faces do cubo que estão contidas no plano **XZ** e no plano **YZ**. O desenho desses dois paralelogramos permitiu-nos determinar as perspectivas de mais **dois vértices** do cubo (que não se identificaram).

Tendo em conta que um cubo tem **oito vértices** e que já temos as perspectivas de sete deles, falta-nos a perspectiva do último vértice, que é o vértice espacialmente oposto ao vértice **O**. Assim, determinou-se a perspectiva desse vértice conduzindo as perspectivas das arestas em falta (que são paralelas às perspectivas dos eixos) – o ponto de concorrência das três arestas é a perspectiva do oitavo vértice do cubo.

Por fim, desenhou-se a perspectiva do cubo, identificando convenientemente as arestas invisíveis do sólido (as arestas que estão contidas nos *eixos coordenados*).

Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do cubo representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do eixo **Z_r** e da reta **r_r**), representaram-se a **leve**.



(continuação da página anterior)

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano **XY** com a sua perspectiva – assim, a reta que passa por P_r' e pela perspectiva do ponto **P** (a reta **d**) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano **XY**).

Inversão do rebatimento do plano coordenado XY e determinação das perspectivas do ponto A:

As projeções do ponto **A** (a projeção frontal e a projeção horizontal) são dois extremos da linha de chamada do ponto **A** – a linha de chamada do ponto **A** é uma linha quebrada aberta, que tem um extremo em A_1 , outro extremo em A_2 e um vértice no eixo **X** (em A_0). A parte da linha de chamada do ponto **A** que está contida no plano **XY** é o segmento $[A_0A_1]$ – em rebatimento, essa parte da linha de chamada é o segmento $[A_0A_1]$. A perspectiva desse segmento tem um extremo em A_0 e é paralela à perspectiva do eixo **Y**.

Assim, desenhou-se a reta suporte da perspectiva do segmento de reta $[A_0A_1]$. Em seguida, por A_1 , conduziu-se uma reta paralela à reta **d** (a **direção de afinidade**) – o ponto em que esta intersesta a perspectiva da linha de chamada do ponto **A** (a reta suporte do segmento $[A_0A_1]$) é A_1 (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **A**). É neste procedimento que consiste a inversão do rebatimento do plano **XY**.

A partir das perspectivas do afastamento e da cota do ponto **A** determinou-se a perspectiva de A_3 , a sua projeção lateral (a projeção em falta), recorrendo ao paralelogramo correspondente (o paralelogramo de que A_3 e **O** são dois vértices opostos) – A_3 é a perspectiva da projeção lateral do ponto **A**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **A**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de A_1 , a perspectiva da reta projetante horizontal de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de A_2 conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de A_3 conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas intersestam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **A**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **A** são dois vértices espacialmente opostos.

Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O pedido é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do eixo Y_r , da reta r_r , da direção de afinidade **d** e, ainda dos traçados referentes ao rebatimento do plano **XY** e à inversão do seu rebatimento), representaram-se a **leve**.

266.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. Há a salientar que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Trata-se de uma **perspectiva militar** (ou **planométrica**), pelo que o plano axonométrico é o plano **XY** – assim, o eixo **X** e o eixo **Y** fazem, entre si, um ângulo de 90° . A perspectiva do eixo **Z** (o eixo que não está contido no plano axonométrico) faz, com a parte positiva do eixo **X** um ângulo de 110° (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo **Y**, um ângulo de 160° (que é outro ângulo obtuso).

Resolução:

As coordenadas do ponto **M** medem-se nos eixos a que se referem – a abcissa do ponto **M** mede-se no eixo **X**, o afastamento do ponto **M** mede-se no eixo **Y** e a cota do ponto **M** no eixo **Z**. Uma vez que o plano axonométrico é o plano **XY**, dois dos eixos coordenados estão contidos no plano axonométrico, ou seja, estão em verdadeira grandeza – o eixo **X** e o eixo **Y** (estes dois eixos não apresentam qualquer deformação).

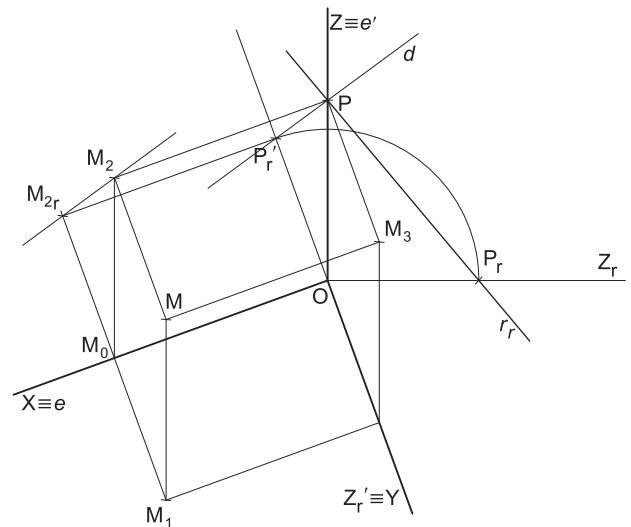
Assim, sobre o eixo **X**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abcissa** do ponto **M** (6 cm) em verdadeira grandeza. De forma semelhante, sobre o eixo **Y**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se o **afastamento** do ponto **M** (4 cm) em verdadeira grandeza. A partir da abcissa e do afastamento do ponto **A** foi possível determinar, de forma direta, a perspectiva da projeção horizontal do ponto **M** – M_1 .

Já no que respeita ao eixo **Z** (onde se mede a cota do ponto **M**), este eixo não é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que a **cota** do ponto **M** não se projeta em verdadeira grandeza no plano axonométrico (a **cota** é a coordenada do ponto **M** que apresenta **deformação**) – não é possível, de forma direta, medir a **cota** do ponto **M** sobre a perspectiva do eixo **Z**, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Determinação da direção de afinidade:

A **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento de um qualquer plano coordenado para o plano axonométrico. Assim, em primeiro lugar há que rebater um dos dois planos coordenados ortogonais ao plano axonométrico (o plano **XZ** ou o plano **YZ**) e, dessa forma, representar o ponto **M** através de quaisquer duas das suas três projeções (em Dupla Projeção Ortogonal, independentemente das duas projeções escolhidas).

Tendo em conta que já temos a projeção horizontal do ponto **M**, optou-se por rebater o plano coordenado **XZ** (o plano coordenado frontal) de forma a estabelecer um paralelismo com a Dupla Projeção Ortogonal já estudada e, assim, representar o ponto **M** pelas suas duas projeções – a sua projeção horizontal e a sua projeção frontal.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Ao rebater o plano **XZ** sobre o *plano axonométrico*, a charneira do rebatimento (reta **e**) é a perspectiva do eixo **X**, que se identificou imediatamente. O eixo **Z** rebatido (o eixo **Z_r'**) fica coincidente com o eixo **Y**, facto que se assinalou devidamente – $Y \equiv Z_r'$. O eixo **Z_r'** é o eixo **Z** rebatido pelo rebatimento do plano **XZ**, tendo-se optado por manter a notação **Z_r** para o eixo **Z** rebatido pelo rebatimento do seu plano projetante.

Sobre o eixo **Z_r'** mediu-se a **cota** do ponto **M**, em verdadeira grandeza (4 cm), o que nos permitiu determinar um ponto **P_r'** – o ponto **P** é um ponto do eixo **Z** com a cota do ponto **M** ($\overline{OP_r'}$ é a cota do ponto **M**, em verdadeira grandeza, pelo rebatimento do plano **XZ**). Em seguida, transportou-se a cota do ponto **M** para a linha de chamada do ponto **M** (que se prolongou para cima do eixo **X** e perpendicularmente a este), o que nos permitiu determinar **M_{2r}** – **M_{2r}** é a projeção frontal do ponto **M**, em rebatimento (no rebatimento do *plano coordenado XZ*).

Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano coordenado **XZ** (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano **XZ** com a sua perspectiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo **Z**, pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade**.

Para tal, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo **Z** para o *plano axonométrico* (o plano **XY**). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta **e'**), que é a própria perspectiva do eixo **Z**. O eixo **Z** rebatido (o eixo **Z_r**) fica perpendicular à perspectiva do eixo **Z**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio).

A partir do ponto **O**, sobre o eixo **Z_r** (e no sentido positivo do eixo), mediu-se a **cota** do ponto **M**, em verdadeira grandeza (4 cm), obtendo-se o ponto **P_r** – o ponto **P** é o ponto do eixo **Z** que tem a cota do ponto **M** ($\overline{OP_r}$ é a cota do ponto **M**, em verdadeira grandeza). Por **P_r** conduziu-se uma reta **r_r**, com a inclinação das projetantes (um ângulo de 40°) – a reta **r_r** é a reta projetante do ponto **P**, em rebatimento.

Note que o ponto **P_r** é o ponto **P** rebatido pelo rebatimento do plano projetante do eixo **Z**, enquanto o ponto **P_r'** era o ponto **P** (o mesmo ponto **P**) rebatido pelo rebatimento do plano coordenado **XZ**.

A inclinação das projetantes é de 40°, pelo que o ângulo que a reta **r** faz, **no espaço**, com o *plano axonométrico*, é um ângulo de 40° – esse ângulo está contido no plano que contém o eixo **Z** e é ortogonal ao *plano axonométrico* (trata-se do **ângulo entre uma reta e um plano**) e corresponde, na prática, ao ângulo entre a reta dada (o eixo **Z**) e a reta de interseção entre os dois planos (que é a perspectiva do eixo **Z**). Assim, esse ângulo, em rebatimento, está no ângulo que a reta **r_r** faz com a perspectiva do eixo **Z** (que é a charneira **e**, por isso, roda sobre si própria). O ponto de interseção da reta **r_r** com a perspectiva do eixo **Z** é a perspectiva do ponto **P** (é o vértice do ângulo entre a reta **r_r** e a perspectiva do eixo **Z**).

O segmento **[OP]** é, assim, um segmento representativo da perspectiva da cota do ponto **M** – \overline{OP} é a perspectiva da cota do ponto **M**.

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano **XZ** com a sua perspectiva – assim, a reta que passa por **P_r'** e pela perspectiva do ponto **P** (a reta **d**) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano **XZ**).

Inversão do rebatimento do plano coordenado XZ e determinação das perspectivas do ponto M:

As projeções do ponto **M** (a projeção frontal e a projeção horizontal) são dois extremos da linha de chamada do ponto **M** – a linha de chamada do ponto **M** é uma linha quebrada aberta, que tem um extremo em **M₁**, outro extremo em **M₂** e um vértice no eixo **X** (em **M₀**). A parte da linha de chamada do ponto **M** que está contida no plano **XZ** é o segmento **[M₀M₂]** – em rebatimento, essa parte da linha de chamada é o segmento **[M₀M_{2r}]**. A perspectiva desse segmento tem um extremo em **A₀** e é paralela à perspectiva do eixo **Z**.

Assim, desenhou-se a reta suporte da perspectiva do segmento de reta **[M₀M₂]**. Em seguida, por **M_{2r}**, conduziu-se uma reta paralela à reta **d** (a **direção de afinidade**) – o ponto em que esta interseja a perspectiva da linha de chamada do ponto **M** (a reta suporte do segmento **[M₀M₂]**) é **M₂** (a perspectiva da projeção frontal do ponto **M**). É neste procedimento que consiste a inversão do rebatimento do plano **XZ**.

A partir das perspectivas do afastamento e da cota do ponto **M** determinou-se a perspectiva de **M₃**, a sua projeção lateral (a projeção em falta), recorrendo ao paralelogramo correspondente (o paralelogramo de que **M₃** e **O** são dois vértices opostos) – **M₃** é a perspectiva da projeção lateral do ponto **M**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **M**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de **M₁**, a perspectiva da reta projetante horizontal de **M** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **M₂** conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **M** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **M₃** conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **M** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas intersejam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **M**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **M** são dois vértices espacialmente opostos.

Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O pedido é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do eixo **Y_r**, da reta **r_r**, da direção de afinidade **d** e, ainda dos traçados referentes ao rebatimento do plano **XZ** e à inversão do seu rebatimento), representaram-se a **leve**.

267.

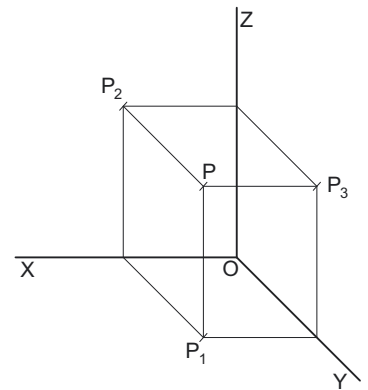
Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos, fazendo, entre si, os ângulos normalizados e tendo em conta que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Uma vez que o *plano axonométrico* é o plano **XZ**, a perspectiva do eixo **Y** (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com as partes positivas dos outros dois eixos ângulos de 135° (os ângulos normalizados).

Resolução:

As coordenadas do ponto **P** medem-se nos eixos a que se referem – a abcissa do ponto **P** mede-se no eixo **X**, o afastamento do ponto **P** mede-se no eixo **Y** e a cota do ponto **P** no eixo **Z**. Uma vez que o *plano axonométrico* é o plano **XZ**, dois dos *eixos coordenados* estão contidos no *plano axonométrico*, ou seja, estão em verdadeira grandeza – o eixo **X** e o eixo **Z** (estes dois eixos não apresentam qualquer deformação).

Assim, sobre o eixo **X**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abcissa** do ponto **P** (3 cm) em verdadeira grandeza. De forma semelhante, sobre o eixo **Z**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se a **cota** do ponto **P** (4 cm) em verdadeira grandeza. A partir da abcissa e da cota do ponto **P** foi possível determinar, de forma direta, a perspectiva da projeção frontal do ponto **P** – **P₂**.



Numa **perspetiva cavaleira normalizada**, o eixo **Y** apresenta um coeficiente de deformação de 0,5 – nesse sentido, todas as dimensões a medir sobre perspectiva do eixo **Y** têm de ser multiplicadas por aquele valor.

Assim, sobre a perspectiva do eixo **Y**, a partir da perspectiva do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se o **afastamento** do ponto **P** multiplicado pelo coeficiente de redução normalizado (6 cm x 0,5 = 3 cm).

Determinação das perspetivas do ponto P:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **P** determinaram-se as perspectivas da sua projeção horizontal (**P₁**) e da sua projeção lateral (**P₃**), recorrendo aos dois paralelogramos respetivos (o paralelogramo de que **P₁** e **O** são dois vértices opostos e o paralelogramo de que **P₃** e **O** são dois vértices opostos) – **P₁** é a perspectiva da projeção horizontal do ponto **P** e **P₃** é a perspectiva da projeção lateral do ponto **P**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **P**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de **P₁**, a perspectiva da reta projetante horizontal de **P** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **P₂** conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **P** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **P₃** conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **P** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas interseitam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **P**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **P** são dois vértices espacialmente opostos.

Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O pedido é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada, representaram-se a **leve**.

268.

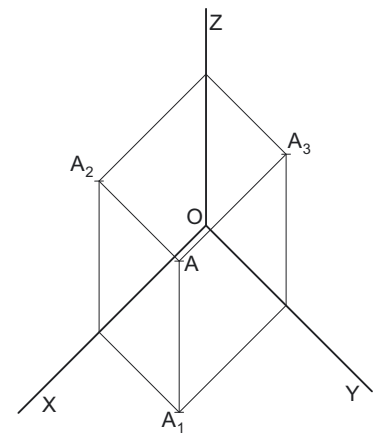
Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos, fazendo, entre si, os ângulos normalizados e tendo em conta que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Trata-se de uma **perspetiva militar** (ou **planométrica**), pelo que o *plano axonométrico* é o plano **XY** – assim, o eixo **X** e o eixo **Y** fazem, entre si, um ângulo de 90° . A perspectiva do eixo **Y** (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com as partes positivas dos outros dois eixos ângulos de 135° (os ângulos normalizados).

Resolução:

As coordenadas do ponto **A** medem-se nos eixos a que se referem – a abcissa do ponto **A** mede-se no eixo **X**, o afastamento do ponto **A** mede-se no eixo **Y** e a cota do ponto **A** no eixo **Z**. Uma vez que o *plano axonométrico* é o plano **XY**, dois dos *eixos coordenados* estão contidos no *plano axonométrico*, ou seja, estão em verdadeira grandeza – o eixo **X** e o eixo **Y** (estes dois eixos não apresentam qualquer deformação).

Assim, sobre o eixo **X**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se a **abcissa** do ponto **A** (3 cm) em verdadeira grandeza. De forma semelhante, sobre o eixo **Y**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se o **afastamento** do ponto **A** (3 cm) em verdadeira grandeza. A partir da abcissa e do afastamento do ponto **A** foi possível determinar, de forma direta, a perspectiva da projeção horizontal do ponto **A** – **A₁**.



Numa **perspetiva planométrica (militar) normalizada**, o eixo **Z** apresenta um coeficiente de deformação de $2/3$ – nesse sentido, todas as dimensões a medir sobre perspectiva do eixo **Z** têm de ser multiplicadas por aquele valor.

Assim, sobre a perspectiva do eixo **Z**, a partir da perspectiva do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se a **cota** do ponto **A** multiplicado pelo coeficiente de redução normalizado (6 cm x $2/3$ = 2 cm).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Determinação das perspectivas do ponto A:

A partir das perspectivas das três coordenadas do ponto **A** determinaram-se as perspectivas da sua projeção frontal (**A₂**) e da sua projeção lateral (**A₃**), recorrendo aos dois paralelogramos respetivos (o paralelogramo de que **A₂** e **O** são dois vértices opostos e o paralelogramo de que **A₃** e **O** são dois vértices opostos) – **A₂** é a perspectiva da projeção frontal do ponto **A** e **A₃** é a perspectiva da projeção lateral do ponto **A**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **A**. Para tal conduziu-se, pela perspectiva de **A₁**, a perspectiva da reta projetante horizontal de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), pela perspectiva de **A₂** conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) e pela perspectiva de **A₃** conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral de **A** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – as três retas interseam-se num ponto, que é a perspectiva propriamente dita do ponto **A**, definindo a perspectiva de um paralelepípedo de que as perspectivas dos pontos **O** e **A** são dois vértices espacialmente opostos.

Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O pedido é um ponto, pelo que não existe qualquer representação a **forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada, representaram-se a **leve**.

269.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos, fazendo, entre si, os ângulos normalizados e tendo em conta que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Uma vez que o *plano axonométrico* é o plano **YZ**, a perspectiva do eixo **X** (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com as partes positivas dos outros dois eixos ângulos de 135° (os ângulos normalizados).

Resolução:

Como o cubo se apoia, por três das suas faces, nos três *planos coordenados*, é possível concluir, de forma imediata, que três das arestas do cubo estão contidas nos três *eixos coordenados* e um dos seus vértices é a origem do referencial – o ponto **O**. Assim, é necessário medir os 4 cm (a medida da aresta do cubo) em cada um dos *eixos coordenados*. Uma vez que o *plano axonométrico* é o plano **YZ**, dois dos *eixos coordenados* estão contidos no *plano axonométrico*, ou seja, estão em verdadeira grandeza – o eixo **Y** e o eixo **Z** (estes dois eixos não apresentam qualquer deformação).

Assim, sobre o eixo **Y**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se a medida da aresta do cubo (4 cm) em verdadeira grandeza. De forma semelhante, sobre o eixo **Z**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se a medida da aresta do cubo (4 cm) em verdadeira grandeza. A partir destas duas arestas é possível construir, de forma direta, o quadrado que é a face do cubo que está contida no plano **YZ**. Este procedimento permitiu-nos determinar as perspectivas de **quatro vértices** do cubo (os quatro vértices que estão contidos no plano **YZ**).

Na **perspetiva cavaleira normalizada** desta situação, o eixo **X** apresenta um coeficiente de deformação de 0,5 – nesse sentido, todas as dimensões a medir sobre perspectiva do eixo **X** têm de ser multiplicadas por aquele valor.

Assim, sobre a perspectiva do eixo **X**, a partir da perspectiva do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se a medida da aresta do cubo (4 cm) multiplicada pelo coeficiente de redução normalizado ($4 \text{ cm} \times 0,5 = 2 \text{ cm}$).

Determinação da perspectiva do cubo:

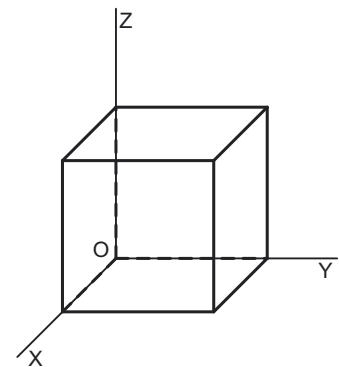
A partir da perspectiva da medida da aresta do cubo que está contida no eixo **X**, desenharam-se os dois paralelogramos que são as perspectivas das faces do cubo que estão contidas no plano **XY** e no plano **XZ**. O desenho desses dois paralelogramos permitiu-nos determinar as perspectivas de mais **dois vértices** do cubo (que não se identificaram).

Tendo em conta que um cubo tem **oito vértices** e que já temos as perspectivas de sete deles, falta-nos a perspectiva do último vértice, que é o vértice espacialmente oposto ao vértice **O**. Assim, determinou-se a perspectiva desse vértice conduzindo as perspectivas das arestas em falta (que são paralelas às perspectivas dos eixos) – o ponto de concorrência das três arestas é a perspectiva do oitavo vértice do cubo.

Por fim, desenhou-se a perspectiva do cubo, identificando convenientemente as arestas invisíveis do sólido (as arestas que estão contidas nos *eixos coordenados*).

Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do cubo representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada, representaram-se a **leve**.



270.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos, fazendo, entre si, os ângulos normalizados e tendo em conta que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Trata-se de uma **perspetiva militar** (ou **planométrica**), pelo que o *plano axonométrico* é o plano **XY** – assim, o eixo **X** e o eixo **Y** fazem, entre si, um ângulo de 90° . A perspectiva do eixo **Y** (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com as partes positivas dos outros dois eixos ângulos de 135° (os ângulos normalizados).

Resolução:

Como o cubo se apoia, por três das suas faces, nos três *planos coordenados*, é possível concluir, de forma imediata, que três das arestas do cubo estão contidas nos três *eixos coordenados* e um dos seus vértices é a origem do referencial – o ponto **O**. Assim, é necessário medir os 4 cm (a medida da aresta do cubo) em cada um dos *eixos coordenados*. Uma vez que o *plano axonométrico* é o plano **XY**, dois dos *eixos coordenados* estão contidos no *plano axonométrico*, ou seja, estão em verdadeira grandeza – o eixo **X** e o eixo **Y** (estes dois eixos não apresentam qualquer deformação).

Assim, sobre o eixo **X**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se a medida da aresta do cubo (4 cm) em verdadeira grandeza. De forma semelhante, sobre o eixo **Y**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se a medida da aresta do cubo (4 cm) em verdadeira grandeza. A partir destas duas arestas é possível construir, de forma direta, o quadrado que é a face do cubo que está contida no plano **XY**. Este procedimento permitiu-nos determinar as perspectivas de **quatro vértices** do cubo (os quatro vértices que estão contidos no plano **XY**).

Numa **perspetiva planométrica (militar)**, o eixo **Z** apresenta um coeficiente de deformação de $2/3$ – nesse sentido, todas as dimensões a medir sobre perspectiva do eixo **Z** têm de ser multiplicadas por aquele valor.

Assim, sobre a perspectiva do eixo **X**, a partir da perspectiva do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, há que representar a medida da aresta do cubo (4 cm) multiplicada pelo coeficiente de redução normalizado que, no entanto, não é um valor exato – ($4 \text{ cm} \times 2/3 = 2,6666\dots \text{ cm}$).

Assim, para obter a medida dessa aresta já reduzida (em perspectiva), optou-se por recorrer ao processo geométrico para a divisão de um segmento num qualquer número de partes iguais, processo esse que foi objeto de estudo na disciplina de Educação Visual dos 7.^o, 8.^o e 9.^o anos de escolaridade. Pretende-se representar, sobre a perspectiva do eixo **Z**, a partir do ponto **O**, a medida correspondente a $2/3$ de 4 cm. Em primeiro lugar, desenhou-se um segmento de reta, com extremidade no ponto **O** e uma direção diferente da da perspectiva do eixo **Z**, com um comprimento cujos $2/3$ tenham determinação direta.

Nesse sentido, o segmento **[OA]** é o segmento pretendido – tem uma extremidade no ponto **O**, não é paralelo à perspectiva do eixo **Z** e $\overline{OA} = 6 \text{ cm}$ (repare que $6 \text{ cm} \times 2/3 = 4 \text{ cm}$, que é um valor exato). O segmento **[OA]** é perpendicular à perspectiva do eixo **Z**, mas poderia ser oblíquo. O ponto **B** é o ponto da perspectiva do eixo **Z** tal que $\overline{OB} = 4 \text{ cm}$ (que é o resultado do produto $6 \text{ cm} \times 2/3$). A reta que passa por **A** e por **B** é a reta que relaciona os comprimentos em verdadeira grandeza com os seus transformados a $2/3$, o que quer dizer que qualquer comprimento sobre a semirreta **ÔA** é transformado, através de retas paralelas a **AB**, em $2/3$ da sua dimensão sobre a perspectiva do eixo **Z**.

Assim, o ponto **M** é um ponto da semirreta **ÔA** tal que $\overline{OM} = 4 \text{ cm}$ (a medida da aresta do cubo). Pelo ponto **M** conduziu-se uma reta paralela a **AB** – o ponto **N** é o ponto em que aquela reta intersesta a perspectiva do eixo **Z**. O ponto **N** é, assim, um ponto da perspectiva do eixo **Z** tal que $\overline{ON} = 2/3 \times \overline{OM}$, ou seja, $\overline{ON} = 2/3 \times 4 \text{ cm}$, pelo que **[ON]** é a perspectiva da aresta do cubo que está contida no eixo **Z**.

Determinação da perspetiva do cubo:

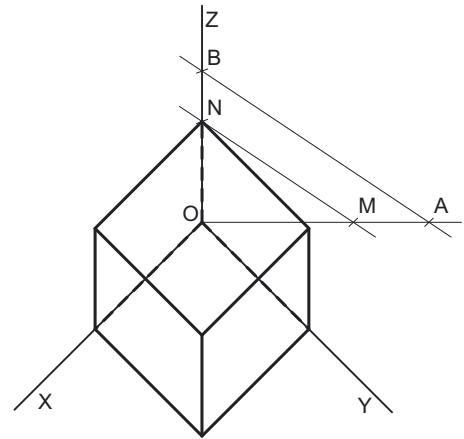
A partir da perspectiva da medida da aresta do cubo que está contida no eixo **Z**, desenharam-se os dois paralelogramos que são as perspectivas das faces do cubo que estão contidas no plano **XZ** e no plano **YZ**. O desenho desses dois paralelogramos permitiu-nos determinar as perspectivas de mais **dois vértices** do cubo (que não se identificaram).

Tendo em conta que um cubo tem **oito vértices** e que já temos as perspectivas de sete deles, falta-nos a perspectiva do último vértice, que é o vértice espacialmente oposto ao vértice **O**. Assim, determinou-se a perspectiva desse vértice conduzindo as perspectivas das arestas em falta (que são paralelas às perspectivas dos eixos) – o ponto de concorrência das três arestas é a perspectiva do oitavo vértice do cubo.

Por fim, desenhou-se a perspectiva do cubo, identificando convenientemente as arestas invisíveis do sólido (as arestas que estão contidas nos *eixos coordenados*).

Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do cubo representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (todas as linhas que nos permitiram determinar, sobre a perspectiva do eixo **Z**, $2/3$ de 4 cm), representaram-se a **leve**.



271.

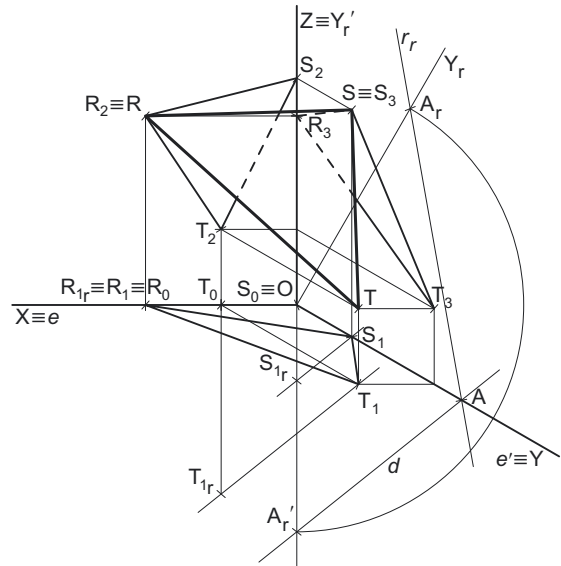
Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. Há a salientar que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Uma vez que os ângulos da direção das projetantes se referem ao eixo **X** e ao eixo **Z**, conclui-se que o plano axonométrico é o plano **XZ** – o eixo **X** e o eixo **Z** fazem, entre si, um ângulo de 90° . A perspectiva do eixo **Y** (o eixo que não está contido no plano axonométrico) faz, com a parte positiva do eixo **X** um ângulo de 150° (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo **Z**, um ângulo de 120° (que é outro ângulo obtuso).

Resolução:

As coordenadas dos pontos medem-se nos eixos a que se referem – as abcissas medem-se no eixo **X**, os afastamentos medem-se no eixo **Y** e as cotas no eixo **Z**. Uma vez que o plano axonométrico é o plano **XZ**, dois dos eixos coordenados estão contidos no plano axonométrico, ou seja, estão em verdadeira grandeza – o eixo **X** e o eixo **Z** (estes dois eixos não apresentam qualquer deformação).

Assim, sobre o eixo **X**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representaram-se as abcissas dos três pontos em verdadeira grandeza e, sobre o eixo **Z**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representaram-se as cotas dos três pontos, também em verdadeira grandeza. A partir das abcissas e das cotas dos três pontos foi possível determinar, de forma direta, as perspectivas das suas projeções frontais – **R₂**, **S₂** e **T₂** (as perspectivas das projeções frontais dos pontos **R**, **S** e **T**, respetivamente).



Já os afastamentos se medem no eixo **Y**, que não é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que os afastamentos não se projetam em verdadeira grandeza no plano axonométrico (os afastamentos são as coordenadas que apresentam deformação) – não é possível, de forma direta, medir os afastamentos sobre a perspectiva do eixo **Y**, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Determinação da direção de afinidade:

Optou-se por recorrer à direção de afinidade, que é a direção que nos permite inverter o rebatimento de um qualquer plano coordenado para o plano axonométrico. Assim, em primeiro lugar há que rebater um dos dois planos coordenados ortogonais ao plano axonométrico (o plano **XY** ou o plano **YZ**) e, dessa forma, representar os pontos através de duas das suas três projeções. Tendo em conta que já temos as projeções frontais dos três pontos, optou-se por rebater o plano coordenado **XY** (o plano coordenado horizontal) de forma a representar os pontos em Dupla Projeção Ortogonal.

Ao rebater o plano **XY** sobre o plano axonométrico, a charneira do rebatimento (reta **e**) é a perspectiva do eixo **X**, que se identificou imediatamente. O eixo **Y** rebatido (o eixo **Y_r'**) fica coincidente com o eixo **Z**, facto que se assinalou devidamente – $Z \equiv Y_r'$. O eixo **Y_r'** é o eixo **Y** rebatido pelo rebatimento do plano **XY**, tendo-se optado por manter a notação **Y_r'** para o eixo **Y** rebatido pelo rebatimento do seu plano projetante.

Sobre o eixo **Y_r'** representou-se um ponto **A_r'** – o ponto **A** é um ponto do eixo **Y** com um determinado afastamento ($\overline{OA_r'}$ é o afastamento desse ponto **A**, em verdadeira grandeza, pelo rebatimento do plano **XY**).

Tendo em conta que a direção de afinidade é a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano coordenado **XY** (nesta situação), a direção de afinidade é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano **XY** com a sua perspectiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo **Y**, pois só assim, será possível determinar a direção de afinidade.

Para tal, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo **Y** para o plano axonométrico (o plano **XZ**). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta **e'**), que é a própria perspectiva do eixo **Y**. O eixo **Y** rebatido (o eixo **Y_r**) fica perpendicular à perspectiva do eixo **Y**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio).

A partir do ponto **O**, sobre o eixo **Y_r** (e no sentido positivo do eixo), mediu-se $\overline{OA_r'}$ (que é o afastamento do ponto **A**), em verdadeira grandeza, obtendo-se o ponto **A_r** – **A_r** é o ponto **A** rebatido pelo rebatimento do plano projetante do eixo **Y**, enquanto o ponto **A_r'** era o ponto **A** (o mesmo ponto **A**) rebatido pelo rebatimento do plano coordenado **XY**. Tenha em conta que $\overline{OA_r'}$ é o afastamento do ponto **A**, em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano projetante do eixo **Y**, pelo que se tem necessariamente $\overline{OA_r'} = \overline{OA_r}$.

Por **A_r** conduziu-se uma reta **r_r**, com a inclinação das projetantes (um ângulo de 50°) – a reta **r_r** é a reta projetante do ponto **A**, em rebatimento. O ponto de interseção da reta **r_r** com a perspectiva do eixo **Y** é a perspectiva do ponto **P** (é o vértice do ângulo entre a reta **r_r** e a perspectiva do eixo **Y**). \overline{OA} é a perspectiva de $\overline{OA_r'} = \overline{OA_r}$ (o que é comprovado pelo arco de circunferência com centro na perspectiva do ponto **O** e extremos em **A_r'** e em **A_r**).

A direção de afinidade (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano **XY** com a sua perspectiva – assim, a reta que passa por **A_r'** e pela perspectiva do ponto **A** (a reta **d**) é a direção de afinidade (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano **XY**).

Inversão do rebatimento do plano coordenado XY e determinação da perspectiva do triângulo:

As projeções do ponto **T** (a projeção frontal e a projeção horizontal) são dois extremos da linha de chamada do ponto **T** – a sua linha de chamada é uma linha quebrada aberta, que tem um extremo em **T₁**, outro extremo em **T₂** e um vértice no eixo **X** (em **T₀**). A parte da linha de chamada do ponto **T** que está contida no plano **XY** é o segmento **[T₀T₁]** – rebatimento, essa parte da linha de chamada é o segmento **[T₀T_{1r}]**. A perspectiva desse segmento tem um extremo em **T₀** e é paralela à perspectiva do eixo **Y**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, desenhou-se a reta suporte da perspectiva do segmento de reta $[T_0T_1]$. Em seguida, por T_{1r} conduziu-se uma reta paralela à reta d (a **direção de afinidade**) – o ponto em que esta interseja a perspectiva da linha de chamada do ponto T (a reta suporte do segmento $[T_0T_1]$) é T_1 (a perspectiva da projeção horizontal do ponto T). É neste procedimento que consiste a inversão do rebatimento do plano XY .

A partir das perspectivas do afastamento e da cota do ponto T determinou-se a perspectiva de T_3 , a sua projeção lateral (a projeção em falta), recorrendo ao paralelogramo correspondente (o paralelogramo de que T_3 e O são dois vértices opostos) – T_3 é a perspectiva da projeção lateral do ponto T .

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto T , recorrendo às perspectivas das retas projetantes (projetante frontal, projetante horizontal e projetante lateral) do ponto T .

A determinação das perspectivas dos pontos R e S efetuou-se a partir da repetição do procedimento exposto (para a determinação das perspectivas do ponto T), aplicado a cada uma das situações. O ponto R tem afastamento nulo, pelo que o ponto R se situa no plano XZ – tem-se imediatamente $R_2 \equiv R$. Por outro lado, atendendo a que o ponto S tem abcissa nula, o ponto S situa-se no plano YZ , pelo que se tem imediatamente $S_3 \equiv S$.

Por fim, desenharam-se as perspectivas do triângulo. O triângulo $[RST]$ é a perspectiva propriamente dita do triângulo. O triângulo $[R_1S_1T_1]$ é a perspectiva da projeção horizontal do triângulo. O triângulo $[R_2S_2T_2]$ é a perspectiva da projeção frontal do triângulo. O triângulo $[R_3S_3T_3]$ é a perspectiva da projeção lateral do triângulo. Tenha em conta que se respeitaram as invisibilidades das projeções, resultantes da respetiva ocultação pelo próprio triângulo (que é uma **figura opaca**).

Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo X , eixo Y e eixo Z) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do triângulo representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspectivas das projeções do triângulo, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do eixo Y_r , da reta r_r , da direção de afinidade d e, ainda dos traçados referentes ao rebatimento do plano XY e à inversão do seu rebatimento), representaram-se a **leve**.

272.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados*. Há a salientar que a perspectiva do eixo Z se representa, convencionalmente, na vertical. Trata-se de uma **perspectiva militar** (ou **planométrica**), pelo que o *plano axonométrico* é o plano XY – assim, o eixo X e o eixo Y fazem, entre si, um ângulo de 90° . A perspectiva do eixo Z (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com a parte positiva do eixo X um ângulo de 140° (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo Y , um ângulo de 130° (que é outro ângulo obtuso).

Resolução:

As coordenadas dos pontos medem-se nos eixos a que se referem – as **abscissas** medem-se no eixo X , os **afastamentos** medem-se no eixo Y e as **cotas** no eixo Z . Uma vez que o *plano axonométrico* é o plano XY , dois dos *eixos coordenados* estão contidos no *plano axonométrico*, ou seja, estão em verdadeira grandeza – o eixo X e o eixo Y (estes dois eixos não apresentam qualquer deformação).

Assim, sobre o eixo X , a partir do ponto O e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abscissas** dos três pontos em verdadeira grandeza e, sobre o eixo Y , a partir do ponto O e no sentido positivo do eixo, representaram-se os **afastamentos** dos três pontos, também em verdadeira grandeza. A partir das abscissas e dos afastamentos dos três pontos foi possível determinar, de forma direta, as perspectivas das suas projeções horizontais – A_1 , B_1 e C_1 (as perspectivas das projeções horizontais dos pontos A , B e C , respetivamente).

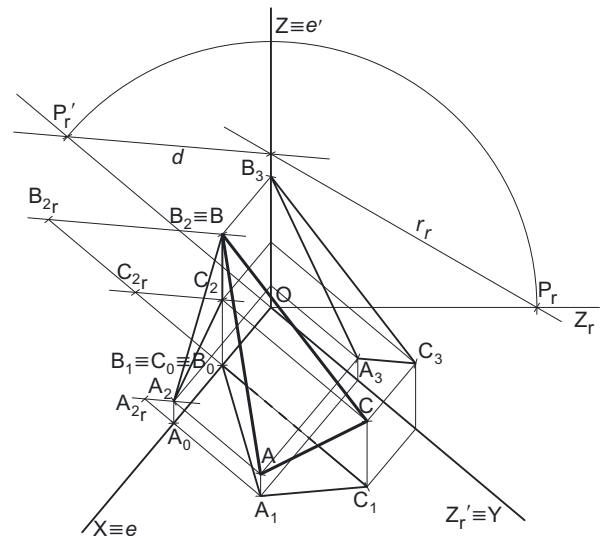
Já as cotas se medem no eixo Z , que não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que as **cotas** não se projetam em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* (as **cotas** são as coordenadas que apresentam **deformação**) – não é possível, de forma direta, medir as **cotas** sobre a perspectiva do eixo Z , pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Determinação da direção de afinidade:

Optou-se por recorrer à **direção de afinidade**, que é a direção que nos permite inverter o rebatimento de um qualquer *plano coordenado* para o *plano axonométrico*. Assim, em primeiro lugar há que rebater um dos dois planos coordenados ortogonais ao *plano axonométrico* (o plano XZ ou o plano YZ) e, dessa forma, representar os pontos através de duas das suas três projeções. Tendo em conta que já temos as projeções horizontais dos três pontos, optou-se por rebater o *plano coordenado XZ* (o *plano coordenado horizontal*) de forma a representar os pontos em Dupla Projeção Ortogonal.

Ao rebater o plano XZ sobre o *plano axonométrico*, a charneira do rebatimento (reta e') é a perspectiva do eixo X , que se identificou imediatamente. O eixo Z rebatido (o eixo Z_r') fica coincidente com o eixo Y , facto que se assinalou devidamente – $Y \equiv Z_r'$. O eixo Z_r' é o eixo Z rebatido pelo rebatimento do plano XZ , tendo-se optado por manter a notação Z_r' para o eixo Z rebatido pelo rebatimento do seu plano projetante.

Sobre o eixo Z_r' representou-se um ponto P_r' – o ponto P é um ponto do eixo Z com uma determinada cota (\overline{OP}) é a cota desse ponto P , em verdadeira grandeza, pelo rebatimento do plano XZ).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano coordenado **XZ** (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano **XZ** com a sua perspetiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo **Z**, pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade**.

Para tal, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo **Z** para o *plano axonométrico* (o plano **XY**). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a própria perspetiva do eixo **Z**. O eixo **Z** rebatido (o eixo **Z_r**) fica perpendicular à perspetiva do eixo **Z**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio).

A partir do ponto **O**, sobre o eixo **Z_r** (e no sentido positivo do eixo), mediu-se $\overline{OP_r'}$ (que é a **cota** do ponto **P**), em verdadeira grandeza, obtendo-se o ponto **P_r** – **P_r** é o ponto **P** rebatido pelo rebatimento do plano projetante do eixo **Z**, enquanto o ponto **P_r'** era o ponto **P** (o mesmo ponto **P**) rebatido pelo rebatimento do plano coordenado **XZ**. Tenha em conta que $\overline{OP_r}$ é a cota do ponto **P**, em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano projetante do eixo **Z**, pelo que se tem necessariamente $\overline{OP_r'} = \overline{OP_r}$ (o que é comprovado pelo arco de circunferência com centro na perspetiva do ponto **O** e extremos em **P_r'** e em **P_r**).

Por **A_r** conduziu-se uma reta **r_r**, com a inclinação das projetantes (um ângulo de 50°) – a reta **r_r** é a reta projetante do ponto **A**, em rebatimento. O ponto de interseção da reta **r_r** com a perspetiva do eixo **Y** é a perspetiva do ponto **P** (é o vértice do ângulo entre a reta **r_r** e a perspetiva do eixo **Y**). \overline{OA} é a perspetiva de $\overline{OA_r'} = \overline{OA_r}$.

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano **XZ** com a sua perspetiva – assim, a reta que passa por **P_r'** e pela perspetiva do ponto **P** (a reta **d**) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano **XZ**).

Inversão do rebatimento do plano coordenado XZ e determinação da perspetiva do triângulo:

As projeções do ponto **A** (a projeção frontal e a projeção horizontal) são dois extremos da linha de chamada do ponto **A** – a sua linha de chamada é uma linha quebrada aberta, que tem um extremo em **A₁**, outro extremo em **A₂** e um vértice no eixo **X** (em **A₀**). A parte da linha de chamada do ponto **A** que está contida no plano **XZ** é o segmento **[A₀A₂]** – em rebatimento, essa parte da linha de chamada é o segmento **[A₀A₂']**. A perspetiva desse segmento tem um extremo em **A₀** e é paralela à perspetiva do eixo **Z**.

Assim, desenhou-se a reta suporte da perspetiva do segmento de reta **[A₀A₂]**. Em seguida, por **A₂'** conduziu-se uma reta paralela à reta **d** (a **direção de afinidade**) – o ponto em que esta interseja a perspetiva da linha de chamada do ponto **A** (a reta suporte do segmento **[A₀A₂]**) é **A₂** (a perspetiva da projeção frontal do ponto **A**). É neste procedimento que consiste a inversão do rebatimento do plano **XZ**.

A partir das perspetivas do afastamento e da cota do ponto **A** determinou-se a perspetiva de **A₃**, a sua projeção lateral (a projeção em falta), recorrendo ao paralelogramo correspondente (o paralelogramo de que **A₃** e **O** são dois vértices opostos) – **A₃** é a perspetiva da projeção lateral do ponto **T**.

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspetiva propriamente dita do ponto **A**, recorrendo às perspetivas das retas projetantes (projetante frontal, projetante horizontal e projetante lateral) do ponto **A**.

A determinação das perspetivas dos pontos **B** e **C** efetuou-se a partir da repetição do procedimento exposto (para a determinação das perspetivas do ponto **A**), aplicado a cada uma das situações. O ponto **B** tem afastamento nulo, pelo que o ponto **B** se situa no plano **XZ** – tem-se imediatamente **B₂ = B**.

Por fim, desenharam-se as perspetivas do triângulo. O triângulo **[ABC]** é a perspetiva propriamente dita do triângulo. O triângulo **[A₁B₁C₁]** é a perspetiva da projeção horizontal do triângulo. O triângulo **[A₂B₂C₂]** é a perspetiva da projeção frontal do triângulo. O triângulo **[A₃B₃C₃]** é a perspetiva da projeção lateral do triângulo. Tenha em conta que se respeitaram as invisibilidades das projeções, resultantes da respetiva ocultação pelo próprio triângulo (que é uma **figura opaca**).

Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspetiva do triângulo representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspetivas das projeções do triângulo, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do eixo **Y_r**, da reta **r_r**, da direção de afinidade **d** e, ainda dos traçados referentes ao rebatimento do plano **XZ** e à inversão do seu rebatimento), representaram-se a **leve**.

273.

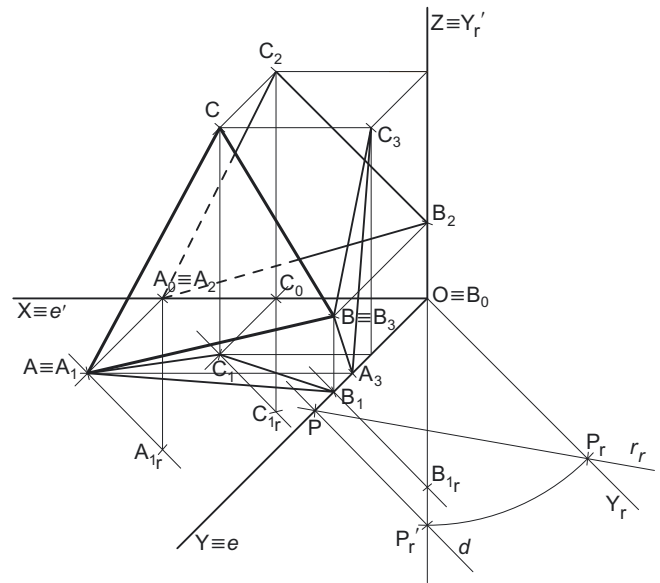
Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. Há a salientar que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Uma vez que os ângulos da direção das projetantes se referem ao eixo **X** e ao eixo **Z**, conclui-se que o *plano axonométrico* é o plano **XZ** – o eixo **X** e o eixo **Z** fazem, entre si, um ângulo de 90° . A perspectiva do eixo **Y** (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com a parte positiva do eixo **X** um ângulo de 45° (que é um ângulo agudo) e, com a parte positiva do eixo **Z**, um ângulo de 135° (que é um ângulo obtuso).

Resolução:

As coordenadas dos pontos medem-se nos eixos a que se referem – as abscissas medem-se no eixo **X**, os afastamentos medem-se no eixo **Y** e as cotas no eixo **Z**. Uma vez que o *plano axonométrico* é o plano **XZ**, dois dos eixos coordenados estão contidos no *plano axonométrico*, ou seja, estão em verdadeira grandeza – o eixo **X** e o eixo **Z** (estes dois eixos não apresentam qualquer deformação).

Assim, sobre o eixo **X**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **abscissas** dos três pontos em verdadeira grandeza e, sobre o eixo **Z**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representaram-se as **cotas** dos três pontos, também em verdadeira grandeza. A partir das abscissas e das cotas dos três pontos foi possível determinar, de forma direta, as perspectivas das suas projeções frontais – **A₂**, **B₂** e **C₂** (as perspectivas das projeções frontais dos pontos **A**, **B** e **C**, respetivamente).



Já os afastamentos se medem no eixo **Y**, que não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que os **afastamentos** não se projetam em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* (os **afastamentos** são as coordenadas que apresentam **deformação**) – não é possível, de forma direta, medir os **afastamentos** sobre a perspectiva do eixo **Y**, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Determinação da direção de afinidade:

Optou-se por recorrer à **direção de afinidade**, que é a direção que nos permite inverter o rebatimento de um qualquer *plano coordenado* para o *plano axonométrico*. Assim, em primeiro lugar há que rebater um dos dois planos coordenados ortogonais ao *plano axonométrico* (o plano **XY** ou o plano **YZ**) e, dessa forma, representar os pontos através de duas das suas três projeções. Tendo em conta que já temos as projeções frontais dos três pontos, optou-se por rebater o *plano coordenado XY* (o *plano coordenado horizontal*) de forma a representar os pontos em Dupla Projeção Ortogonal.

Ao rebater o plano **XY** sobre o *plano axonométrico*, a charneira do rebatimento (reta **e'**) é a perspectiva do eixo **X**, que se identificou imediatamente. O eixo **Y** rebatido (o eixo **Y_r'**) fica coincidente com o eixo **Z**, facto que se assinalou devidamente – **Z** \equiv **Y_r'**. O eixo **Y_r'** é o eixo **Y** rebatido pelo rebatimento do plano **XY**, tendo-se optado por manter a notação **Y_r'** para o eixo **Y** rebatido pelo rebatimento do seu plano projetante.

Sobre o eixo **Y_r'** representou-se um ponto **P_r'** – o ponto **P** é um ponto do eixo **Y** com um determinado afastamento ($\overline{OP_r}$ é o afastamento desse ponto **P**, em verdadeira grandeza, pelo rebatimento do plano **XY**).

Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano coordenado **XY** (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano **XY** com a sua perspectiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo **Y**, pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade**.

Para tal, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo **Y** para o *plano axonométrico* (o plano **XZ**). Nesse sentido, começou-se por identificar a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a própria perspectiva do eixo **Y**. O eixo **Y** rebatido (o eixo **Y_r**) fica perpendicular à perspectiva do eixo **Y**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio).

A partir do ponto **O**, sobre o eixo **Y_r** (e no sentido positivo do eixo), mediu-se $\overline{OP_r}$ (que é o **afastamento** do ponto **P**), em verdadeira grandeza, obtendo-se o ponto **P_r** – **P_r** é o ponto **P** rebatido pelo rebatimento do plano projetante do eixo **Y**, enquanto o ponto **P_r'** era o ponto **P** (o mesmo ponto **P**) rebatido pelo rebatimento do plano coordenado **XY**. Tenha em conta que $\overline{OP_r}$ é o afastamento do ponto **P**, em verdadeira grandeza, no rebatimento do plano projetante do eixo **Y**, pelo que se tem necessariamente $\overline{OP_r} = \overline{OP_r}$.

Por **P_r** conduziu-se uma reta **r_r**, com a inclinação das projetantes (um ângulo de 50°) – a reta **r_r** é a reta projetante do ponto **P**, em rebatimento. O ponto de interseção da reta **r_r** com a perspectiva do eixo **Y** é a perspectiva do ponto **P** (é o vértice do ângulo entre a reta **r_r** e a perspectiva do eixo **Y**). \overline{OP} é a perspectiva de $\overline{OP_r} = \overline{OP_r}$ (o que é comprovado pelo arco de circunferência com centro na perspectiva do ponto **O** e extremos em **P_r'** e em **P_r**).

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano **XY** com a sua perspectiva – assim, a reta que passa por **P_r'** e pela perspectiva do ponto **P** (a reta **d**) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano **XY**).

Inversão do rebatimento do plano coordenado XY e determinação da perspectiva do triângulo:

As projeções do ponto **C** (a projeção frontal e a projeção horizontal) são dois extremos da linha de chamada do ponto **C** – a sua linha de chamada é uma linha quebrada aberta, que tem um extremo em **C₁**, outro extremo em **C₂** e um vértice no eixo **X** (em **C₀**). A parte da linha de chamada do ponto **C** que está contida no plano **XY** é o segmento **[C₀C₁]** – em rebatimento, essa parte da linha de chamada é o segmento **[C₀C_{1r}]**. A perspectiva desse segmento tem um extremo em **C₀** e é paralela à perspectiva do eixo **Y**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, desenhou-se a reta suporte da perspectiva do segmento de reta $[C_0C_1]$. Em seguida, por C_{1r} conduziu-se uma reta paralela à reta d (a direção de afinidade) – o ponto em que esta interseja a perspectiva da linha de chamada do ponto C (a reta suporte do segmento $[C_0C_1]$) é C_1 (a perspectiva da projeção horizontal do ponto C). É neste procedimento que consiste a inversão do rebatimento do plano XY .

A partir das perspectivas do afastamento e da cota do ponto C determinou-se a perspectiva de C_3 , a sua projeção lateral (a projeção em falta), recorrendo ao paralelogramo correspondente (o paralelogramo de que C_3 e O são dois vértices opostos) – C_3 é a perspectiva da projeção lateral do ponto C .

Em seguida, procedeu-se à determinação da perspectiva propriamente dita do ponto C , recorrendo às perspectivas das retas projetantes (projetante frontal, projetante horizontal e projetante lateral) do ponto C .

A determinação das perspectivas dos pontos A e B efetuou-se a partir da repetição do procedimento exposto (para a determinação das perspectivas do ponto C), aplicado a cada uma das situações. O ponto A tem cota nula, pelo que o ponto A se situa no plano XY – tem-se imediatamente $A_1 \equiv A$. Por outro lado, atendendo a que o ponto B tem abcissa nula, o ponto B situa-se no plano YZ , pelo que se tem imediatamente $B_3 \equiv B$.

Por fim, desenharam-se as perspectivas do triângulo. O triângulo $[ABC]$ é a perspectiva propriamente dita do triângulo. O triângulo $[A_1B_1C_1]$ é a perspectiva da projeção horizontal do triângulo. O triângulo $[A_2B_2C_2]$ é a perspectiva da projeção frontal do triângulo. O triângulo $[A_3B_3C_3]$ é a perspectiva da projeção lateral do triângulo. Tenha em conta que se respeitaram as invisibilidades das projeções, resultantes da respetiva ocultação pelo próprio triângulo (que é uma **figura opaca**).

Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo X , eixo Y e eixo Z) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do triângulo representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspectivas das projeções do triângulo, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do eixo Y_r , da reta r_r , da direção de afinidade d e, ainda dos traçados referentes ao rebatimento do plano XY e à inversão do seu rebatimento), representaram-se a **leve**.

274.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos, fazendo, entre si, os ângulos normalizados e tendo em conta que a perspectiva do eixo Z se representa, convencionalmente, na vertical. Uma vez que o plano axonométrico é o plano XZ , a perspectiva do eixo Y (o eixo que não está contido no plano axonométrico) faz, com as partes positivas dos outros dois eixos ângulos de 135° (os ângulos normalizados).

Resolução:

Como o sólido se apoia, por três das suas faces, nos três planos coordenados, é possível concluir, de forma imediata, que três das arestas do objeto estão contidas nos três eixos coordenados e um dos seus vértices é a origem do referencial – o ponto O . Assim, é necessário medir as diferentes arestas do sólido sobre as perspectivas dos eixos a que respeitam. Uma vez que o plano axonométrico é o plano XZ , dois dos eixos coordenados estão contidos no plano axonométrico, ou seja, estão em verdadeira grandeza – o eixo X e o eixo Z (estes dois eixos não apresentam qualquer deformação).

Assim, sobre o eixo X , a partir do ponto O e no sentido positivo do eixo, representou-se (em verdadeira grandeza) a medida da aresta do sólido que está contida no eixo X (6 cm). De forma semelhante, sobre o eixo Z , a partir do ponto O e no sentido positivo do eixo, representou-se (em verdadeira grandeza) a medida da aresta do sólido que está contida no eixo Z (5 cm).

Na perspectiva cavaleira normalizada desta situação, o eixo Y apresenta um coeficiente de deformação de 0,5 – nesse sentido, todas as dimensões a medir sobre perspectiva do eixo Y têm de ser multiplicadas por aquele valor. Assim, sobre a perspectiva do eixo Y , a partir da perspectiva do ponto O e no sentido positivo do eixo, representou-se a medida da aresta do sólido que está contida no eixo Y (5 cm), multiplicada pelo coeficiente de redução normalizado (5 cm x 0,5 = 2,5 cm).

A partir das medições efetuadas (sobre as perspectivas dos eixos), construíram-se as projeções do objeto sobre os respetivos planos coordenados, baseadas em paralelas às perspectivas dos eixos.

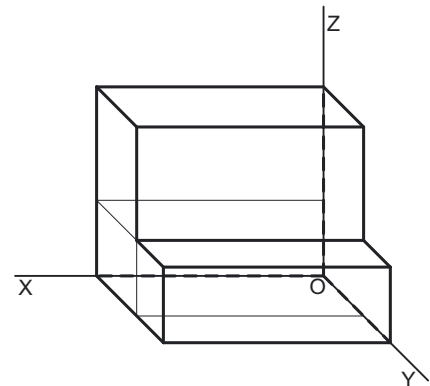
Determinação da perspectiva do objeto:

Pelas perspectivas das projeções de cada um dos vértices do objeto (que não se identificaram) conduziram-se as perspectivas das respetivas retas projetantes, obtendo as respetivas perspectivas (a semelhança do que se processa na determinação das perspectivas de um ponto).

Esse procedimento permitiu-nos determinar, sucessiva e simultaneamente, as perspectivas de cada uma das arestas do sólido. Estas permitiram-nos desenhar a perspectiva do objeto, na qual se assinalaram convenientemente as invisibilidades existentes.

Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo X , eixo Y e eixo Z) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do objeto representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada, representaram-se a **leve**.



275.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos, fazendo, entre si, os ângulos normalizados e tendo em conta que a perspectiva do eixo **Z** se representa, convencionalmente, na vertical. Trata-se de uma **perspetiva militar** (ou **planométrica**), pelo que o *plano axonométrico* é o plano **XY** – assim, o eixo **X** e o eixo **Y** fazem, entre si, um ângulo de 90° . A perspectiva do eixo **Z** (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com as partes positivas dos outros dois eixos ângulos de 135° (os ângulos normalizados).

Resolução:

Como o sólido se apoia, por três das suas faces, nos três *planos coordenados*, é possível concluir, de forma imediata, que três das arestas do objeto estão contidas nos três *eixos coordenados* e um dos seus vértices é a origem do referencial – o ponto **O**. Assim, é necessário medir as diferentes arestas do sólido sobre as perspectivas dos eixos a que respeitam. Uma vez que o *plano axonométrico* é o plano **XY**, dois dos *eixos coordenados* estão contidos no *plano axonométrico*, ou seja, estão em verdadeira grandeza – o eixo **X** e o eixo **Y** (estes dois eixos não apresentam qualquer deformação).

Assim, sobre o eixo **X**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se (em verdadeira grandeza) a medida da aresta do sólido que está contida no eixo **X** (6 cm). De forma semelhante, sobre o eixo **Y**, a partir do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, representou-se (em verdadeira grandeza) a medida da aresta do sólido que está contida no eixo **Y** (5 cm).

Numa **perspetiva planométrica (militar) normalizada**, o eixo **Z** apresenta um coeficiente de deformação de $2/3$ – nesse sentido, todas as dimensões a medir sobre perspectiva do eixo **Z** têm de ser multiplicadas por aquele valor.

Assim, sobre a perspectiva do eixo **Z**, a partir da perspectiva do ponto **O** e no sentido positivo do eixo, há que representar a medida da aresta do sólido (5 cm) multiplicada pelo coeficiente de redução normalizado que, no entanto, não é um valor exato – ($5 \text{ cm} \times 2/3 = 3,3333\dots \text{ cm}$).

Assim, para obter a medida dessa aresta já deformada (em perspectiva), optou-se por recorrer ao processo geométrico para a divisão de um segmento num qualquer número de partes iguais, processo esse que foi objeto de estudo na disciplina de Educação Visual dos 7^o, 8^o e 9^o anos de escolaridade. Pretende-se representar, sobre a perspectiva do eixo **Z**, a partir do ponto **O**, a medida correspondente a $2/3$ de 5 cm. Em primeiro lugar, desenhou-se um segmento de reta, com extremidade no ponto **O** e uma direção diferente da da perspectiva do eixo **Z**, com um comprimento cujos $2/3$ tenham determinação direta.

Nesse sentido, o segmento **[OA]** é o segmento pretendido – tem uma extremidade no ponto **O**, não é paralelo à perspectiva do eixo **Z** e $\overline{OA} = 6 \text{ cm}$ (repare que $6 \text{ cm} \times 2/3 = 4 \text{ cm}$, que é um valor exato). O segmento **[OA]** é perpendicular à perspectiva do eixo **Z**, mas poderia ser oblíquo. O ponto **A'** é o ponto da perspectiva do eixo **Z** tal que $\overline{OA'} = 4 \text{ cm}$ (que é o resultado do produto $6 \text{ cm} \times 2/3$). A reta que passa por **A** e por **A'** é a reta que relaciona os comprimentos em verdadeira grandeza com os seus transformados a $2/3$, o que quer dizer que qualquer comprimento sobre a semirreta **ÔA** é transformado, através de retas paralelas a **AA'**, em $2/3$ da sua dimensão sobre a perspectiva do eixo **Z**.

Assim, o ponto **B** é um ponto da semirreta **ÔA** tal que $\overline{OB} = 5 \text{ cm}$ (a medida da aresta do sólido). Pelo ponto **B** conduziu-se uma reta paralela a **AA'** – o ponto **B'** é o ponto em que aquela reta interseca a perspectiva do eixo **Z**. O ponto **B'** é, assim, um ponto da perspectiva do eixo **Z** tal que $\overline{OB'} = 2/3 \times \overline{OB}$, ou seja, $\overline{OB'} = 2/3 \times 5 \text{ cm}$, pelo que **[OB']** é a perspectiva da aresta do sólido que está contida no eixo **Z**.

Por outro lado, há ainda que marcar, sobre a perspectiva do eixo **Z**, a altura do «degrau» da peça (que é de 2 cm), já afetada pelo coeficiente de deformação. Assim, o ponto **C** é um ponto da semirreta **ÔA** tal que $\overline{OC} = 2 \text{ cm}$ (a medida do «degrau» do sólido). Pelo ponto **C** conduziu-se uma reta paralela a **AA'** (e paralela a **BB'**) – o ponto **C'** é o ponto em que aquela reta interseca a perspectiva do eixo **Z**. O ponto **C'** é, assim, um ponto da perspectiva do eixo **Z** tal que $\overline{OC'} = 2/3 \times \overline{OC}$, ou seja, $\overline{OC'} = 2/3 \times 2 \text{ cm}$, pelo que **[OC']** é a perspectiva da altura do «degrau» do sólido.

A partir das medições efetuadas (sobre as perspectivas dos eixos), construíram-se as projeções do objeto sobre os respetivos *planos coordenados*, baseadas em paralelas às perspectivas dos eixos.

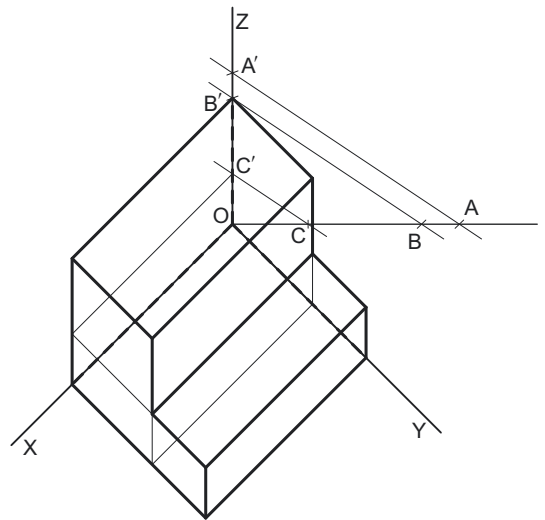
Determinação da perspetiva do objeto:

Pelas perspectivas das projeções de cada um dos vértices do objeto (que não se identificaram) conduziram-se as perspectivas das respetivas retas projetantes, obtendo as respetivas perspectivas (a semelhança do que se processa na determinação das perspectivas de um ponto).

Esse procedimento permitiu-nos determinar, sucessiva e simultaneamente, as perspectivas de cada uma das arestas do sólido. Estas permitiram-nos desenhar a perspectiva do objeto, na qual se assinalaram convenientemente as invisibilidades existentes.

Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do objeto representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (todas as linhas que nos permitiram determinar, sobre a perspectiva do eixo **Z**, $2/3$ de 5 cm e $2/3$ de 2 cm), representaram-se a **leve**.



276.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados que fazem, entre si, três ângulos de 120° . A perspectiva do eixo Z representa-se, convencionalmente, na vertical. Em seguida, desenhou-se o *triângulo fundamental*, cujos vértices não se identificaram (recorde que as dimensões do triângulo são arbitrárias).

Resolução:

O plano que contém o quadrado $[ABCD]$ (o *plano coordenado YZ*) não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que o quadrado $[ABCD]$ não se projeta em verdadeira grandeza (a perspectiva do quadrado não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Esse processo geométrico auxiliar tem de ser necessariamente o **rebatimento do plano coordenado YZ** (o plano que contém o quadrado).

O rebatimento do *plano coordenado YZ* pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes** – optou-se por recorrer ao **método dos cortes**.

Rebatimento do plano coordenado YZ:

Assim, em primeiro lugar identificou-se a charneira do rebatimento (reta e), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado YZ*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta e), que é a reta suporte do *triângulo fundamental* que se opõe à perspectiva do eixo X .

O rebatimento do *plano coordenado YZ* processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da *pirâmide axonométrica* que está contida no plano YZ . Nesse sentido, determinou-se o ponto M , o ponto médio da aresta da base da *pirâmide axonométrica* que está contida na charneira e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 256. e respetivo **relatório**). Em seguida, determinou-se O_r (o ponto O rebatido), sobre a semicircunferência e na perpendicular à charneira que passa por O (que é a própria perspectiva do eixo X). O eixo Y_r fica definido por O_r e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é um ponto fixo). O eixo Z_r fica definido por O_r e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é outro ponto fixo). O eixo Y_r e o eixo Z_r são perpendiculares entre si no ponto O_r .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano YZ rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspectiva do eixo X . O ponto O_r' é o ponto O rebatido após a translação efetuada. O eixo Y_r' passa por O_r' e é paralelo ao eixo Y_r . O eixo Z_r' passa por O_r' e é paralelo ao eixo Z_r .

Construção da projeção lateral do quadrado, em verdadeira grandeza:

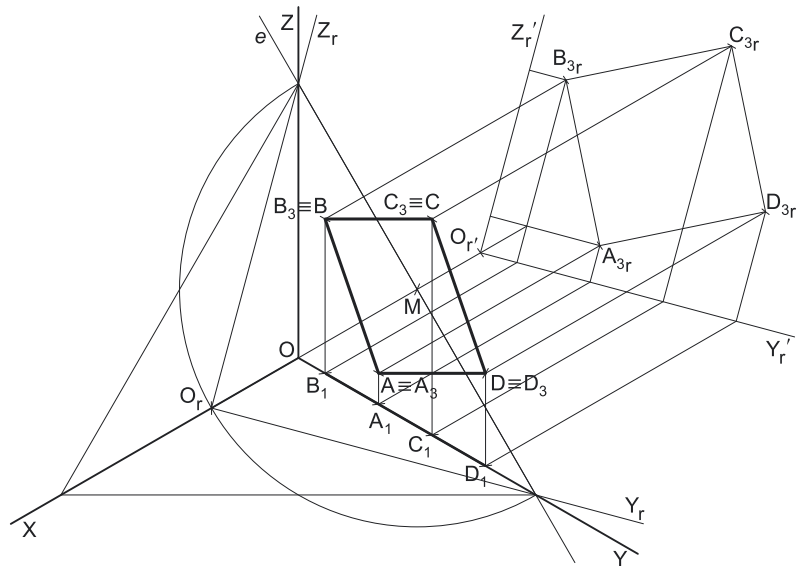
No plano YZ rebatido e transladado, sobre o eixo Y_r' , representou-se o **afastamento** do ponto A (3 cm, em verdadeira grandeza e a partir de O_r') e sobre o eixo Z_r' representou-se a **cota** do ponto A (1 cm, em verdadeira grandeza e a partir de O_r'), o que nos permitiu representar, de imediato, A_{3r} , que é a projeção lateral do ponto A , em rebatimento.

No plano YZ rebatido e transladado, sobre o eixo Y_r' , representou-se o **afastamento** do ponto B (1 cm, em verdadeira grandeza e a partir de O_r') e sobre o eixo Z_r' representou-se a **cota** do ponto B (5 cm, em verdadeira grandeza e a partir de O_r'), o que nos permitiu representar, de imediato, B_{3r} , que é a projeção lateral do ponto B , em rebatimento.

Tenha em conta que, nesta situação particular, em que o quadrado está contido no *plano coordenado YZ* (todos os seus vértices têm abcissa nula), os pontos A e B estão coincidentes com as suas projeções laterais. No entanto, porque essa é uma situação particular e não uma situação universal, optou-se por apresentar a situação universal – ao rebater o *plano coordenado YZ*, estamos a rebater a **projeção lateral da figura**, razão pela qual se optou por representar as projeções laterais dos pontos (em rebatimento) e não os próprios pontos.

A partir de A_{3r} e B_{3r} , foi possível efetuar a construção da **projeção lateral do quadrado**, em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar C_{3r} e D_{3r} (as projeções laterais dos outros dois vértices do quadrado) – o quadrado $[A_{3r}B_{3r}C_{3r}D_{3r}]$ é a projeção lateral do quadrado $[ABCD]$, em verdadeira grandeza (em rebatimento).

Para determinar a perspectiva do quadrado $[ABCD]$ é necessário inverter o rebatimento o que se processa com o recurso a perpendiculares à charneira.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Determinação da perspectiva do quadrado [ABCD]:

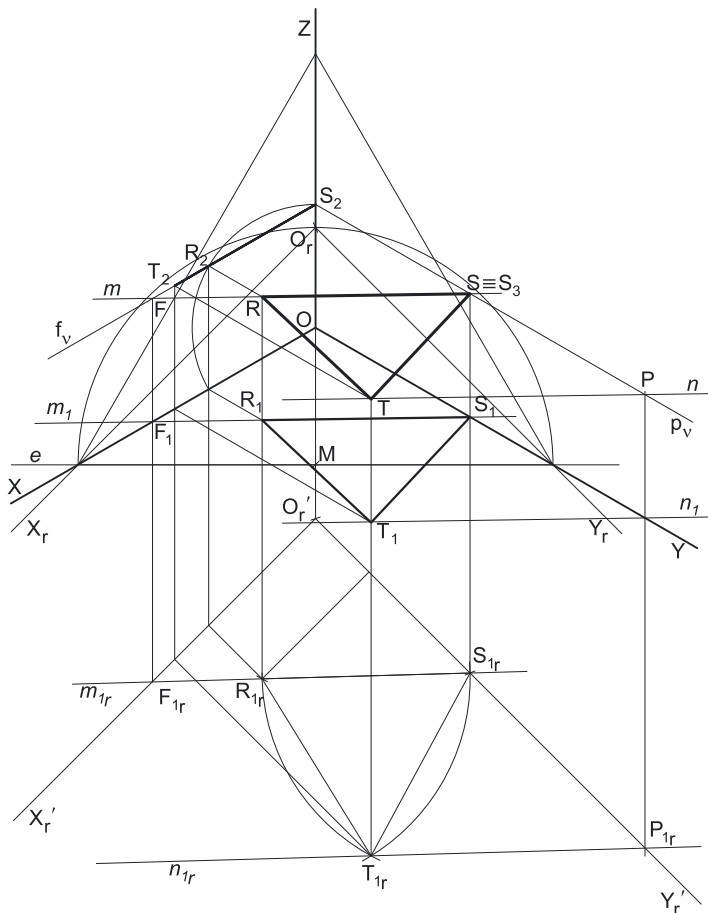
Para inverter o rebatimento do ponto **A** transportou-se o seu afastamento para o eixo Y_r' (a partir de A_3 , e perpendicularmente ao eixo Y_r') e, deste, para a perspectiva do eixo **Y**, com uma perpendicular à charneira – este procedimento permitiu-nos determinar A_1 (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **A**), sobre a perspectiva do eixo **Y** (o ponto **A** tem abcissa nula, pelo que se situa no plano **YZ**). Por A_1 conduziu-se a perspectiva da linha de chamada do ponto **A**, que é vertical (e, por isso, paralela à perspectiva do eixo **Z**). Em seguida, conduziu-se, por A_3 , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto A_3) e determinou-se A_3 (a perspectiva da projeção lateral do ponto **A**) sobre a perspectiva da sua linha de chamada. Por fim, atendendo a que o ponto **A** é um ponto do plano **YZ**, tem-se imediatamente $A \equiv A_3$ (em que **A** é a perspectiva propriamente dita do ponto **A**). Note que não se determinou A_2 (a perspectiva da projeção frontal do ponto **A**), por ser desnecessária.

A inversão do rebatimento dos pontos **B**, **C** e **D** e a determinação das respetivas perspectivas processou-se de forma idêntica à exposta para o ponto **A**. A partir das perspectivas dos quatro vértices, desenhou-se a perspectiva do quadrado [ABCD] – note que a perspectiva do quadrado [ABCD] é um losango, pois está deformada (o quadrado não se projeta em verdadeira grandeza).

Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspectiva do quadrado representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do rebatimento do plano coordenado **YZ**, da translação do plano **YZ** rebatido, da construção da projeção lateral do quadrado em rebatimento ou, ainda, das perpendiculares à charneira), representaram-se a **leve**.

277.



Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados que fazem, entre si, três ângulos de 120° . A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Em seguida, desenhou-se o triângulo fundamental, cujos vértices não se identificaram (recorde que as dimensões do triângulo são arbitrárias).

Resolução:

O plano que contém o triângulo [RST] (o plano horizontal) não é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que o triângulo [RST] não se projeta em verdadeira grandeza (a perspectiva do triângulo não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o triângulo está contido num plano horizontal (de nível), que é paralelo ao plano coordenado horizontal (o plano **XY**), sabe-se que o triângulo se projeta em verdadeira grandeza no plano coordenado **XY** – o triângulo [RST] e a sua projeção horizontal (a sua projeção no plano coordenado **XY**) são duas figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do rebatimento do plano coordenado **XY** (o plano no qual o triângulo se projeta em verdadeira grandeza).

O rebatimento do plano coordenado **XY** pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo rebatimento dos planos coordenados ou pelo método dos cortes. Optou-se por recorrer ao método dos cortes.

Rebatimento do plano coordenado **XY**:

Assim, em primeiro lugar identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano coordenado **XY**) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta suporte do triângulo fundamental que se opõe à perspectiva do eixo **Z**.

O rebatimento do plano coordenado **XY** processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da pirâmide axonométrica que está contida no plano **XY**. Nesse sentido, determinou-se o ponto **M**, o ponto médio da aresta da base da pirâmide axonométrica que está contida na charneira e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 245, e respetivo relatório). Em seguida, determinou-se O_r (o ponto **O** rebatido), sobre a semicircunferência e na perpendicular à charneira que passa por **O** (que é a própria perspectiva do eixo **Z**). O eixo X_r fica definido por O_r e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é um ponto fixo). O eixo Y_r fica definido por O_r e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é outro ponto fixo). O eixo X_r e o eixo Y_r são perpendiculares entre si no ponto O_r .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **XY** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspectiva do eixo **Z**. O ponto O_r' é o ponto **O** rebatido após a translação efetuada. O eixo X_r' passa por O_r' e é paralelo ao eixo X_r . O eixo Y_r' passa por O_r' e é paralelo ao eixo Y_r .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Construção da projeção horizontal do triângulo, em verdadeira grandeza:

No plano XY rebatido e transladado, sobre o eixo X_r' , representou-se a **abscissa** do ponto R (4 cm, em verdadeira grandeza e a partir de O_r') e sobre o eixo Y_r' representou-se o **afastamento** do ponto R (2 cm, em verdadeira grandeza e a partir de O_r'), o que nos permitiu representar, de imediato, R_{1r} , que é a projeção horizontal do ponto R , em rebatimento.

A partir de R_{1r} , foi possível efetuar a construção da **projeção horizontal do triângulo**, em verdadeira grandeza, de acordo com os dados. O ponto S é um ponto do plano YZ (um ponto com abscissa nula) que dista 5,5 cm (a medida do lado do polígono) do ponto R . Tendo em conta que o triângulo se projeta em verdadeira grandeza no plano coordenado XY , com o compasso, fazendo centro em R_{1r} e com 5,5 cm de raio, determinou-se S_{1r} (a projeção horizontal do ponto S em rebatimento), sobre o eixo Y_r' (garantindo-se que o triângulo se situa no espaço do 1ª Diedro).

A partir de R_{1r} e de S_{1r} , efetuou-se a construção da projeção horizontal do triângulo, em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar T_{1r} (a projeção horizontal do terceiro vértice do triângulo) – o triângulo $[R_{1r}S_{1r}T_{1r}]$ é a projeção horizontal do triângulo $[RST]$, em verdadeira grandeza (em rebatimento).

Para determinar a perspectiva do triângulo $[RST]$ é necessário inverter o rebatimento, o que se pode processar de forma semelhante à efetuada no exercício anterior ou recorrendo a retas do plano XY que contenham esses pontos (a situação adotada na resolução e que em seguida se expõe).

Representação do plano que contém o triângulo $[RST]$:

Em primeiro lugar, há que determinar a perspectiva da cota do plano horizontal (de nível) que contém o triângulo e representar esse plano pelos seus traços. Tendo em conta que se trata de uma isometria (em que todos os seus eixos sofrem a mesma redução), é possível representar a perspectiva da cota do plano v (o plano horizontal que contém o triângulo) na perspectiva de qualquer eixo e , a partir daí, transportá-la para a perspectiva do eixo Z (onde se medem as cotas).

Uma vez que o ponto R tem 4 cm de abscissa e que o plano v tem 4 cm de cota, já temos, no eixo X_r' , a medida da cota do plano v , em verdadeira grandeza. Invertendo o rebatimento, com o recurso a uma reta perpendicular à charneira, determinou-se a perspectiva da cota do plano v , sobre a perspectiva do eixo X . Essa perspectiva está no eixo errado, pois deveria estar sobre a perspectiva do eixo Z . Assim, com o compasso, fazendo centro na perspectiva do ponto O , transportou-se a perspectiva da cota do plano v para a perspectiva do eixo Z .

Por fim, desenharam-se as perspectivas dos traços do plano v – f_v é a perspectiva do traço frontal do plano v (é paralelo à perspectiva do eixo X) e p_v é a perspectiva do traço lateral (ou de perfil) do plano v (e que é paralelo à perspectiva do eixo Y).

Determinação da perspectiva do triângulo $[RST]$:

Para inverter o rebatimento dos pontos R e S recorreu-se a uma reta m , que contém aqueles pontos (é a reta suporte do lado $[RS]$ do triângulo) – a reta m_{1r} é a projeção horizontal da reta m , em rebatimento, e passa por R_{1r} e por S_{1r} (a reta m está definida por dois pontos). A reta m_{1r} interseca o eixo X_r' no ponto F_{1r} , (que é a projeção horizontal do traço frontal da reta m) e interseca o eixo Y_r' no ponto S_{1r} , (que é a projeção horizontal do ponto S que é, na prática, o traço lateral da reta m).

Por F_{1r} , conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinaram-se F_1 (a perspectiva da projeção horizontal do ponto F) sobre a perspectiva do eixo X e F (a perspectiva propriamente dita do ponto F) sobre f_v . Por S_{1r} conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinaram-se S_1 (a perspectiva da projeção horizontal do ponto S) sobre a perspectiva do eixo Y e S (a perspectiva propriamente dita do ponto S) sobre p_v . A reta m , em perspectiva, está, assim, definida por dois pontos (os pontos F e S) – nesse sentido, desenhou-se a reta m (a perspectiva propriamente dita da reta m), passando por F e por S , e desenhou-se também a reta m_1 (a perspectiva da projeção horizontal da reta m), passando por F_1 e por S_1 .

O ponto R é um ponto da reta m – assim, por R_{1r} conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinaram-se R_1 (a perspectiva da projeção horizontal do ponto R) sobre m_1 (a perspectiva da projeção horizontal da reta m) e R (a perspectiva propriamente dita do ponto R) sobre m (a perspectiva propriamente dita da reta m).

Para inverter o rebatimento do ponto T recorreu-se a uma reta n , que contém aquele ponto e é paralela à reta m – a reta n_{1r} é a projeção horizontal da reta n , em rebatimento, passa por T_{1r} e é paralela a m_{1r} (está definida por um ponto e uma direção). A reta n_{1r} interseca o eixo Y_r' no ponto P_{1r} , (que é a projeção horizontal do ponto P , o traço lateral da reta n).

Por P_{1r} conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinaram-se P_1 (a perspectiva da projeção horizontal do ponto P) sobre a perspectiva do eixo Y e P (a perspectiva propriamente dita do ponto P) sobre p_v . A reta n , em perspectiva, está, assim, definida por um ponto (o ponto P) e uma direção (é paralela à reta m) – nesse sentido, desenhou-se a reta n (a perspectiva propriamente dita da reta n), passando por P e paralela à reta m , e desenhou-se também n_1 (a perspectiva da projeção horizontal da reta n), passando por P_1 e paralela à reta m_1 .

O ponto T é um ponto da reta n – assim, por T_{1r} conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinaram-se T_1 (a perspectiva da projeção horizontal do ponto T) sobre n_1 (a perspectiva da projeção horizontal da reta n) e T (a perspectiva propriamente dita do ponto T) sobre n (a perspectiva propriamente dita da reta n).

A partir das perspectivas dos três vértices, desenhou-se a perspectiva do triângulo $[RST]$.

Em seguida, determinaram-se as perspectivas das projeções frontais dos três vértices do polígono e desenharam-se as perspectivas da sua projeção horizontal e da sua projeção frontal (que se reduz a um segmento de reta sobre f_v), pois o plano v é um plano projetante frontal. Por outro lado, o ponto S é um ponto do plano YZ (tem abscissa nula), pelo que se tem $S_3 = S$. Não se representaram as perspectivas das projeções laterais dos restantes vértices do triângulo, por não serem necessárias.

Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo X , eixo Y e eixo Z) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. As perspectivas dos traços (frontal e lateral) do plano v representaram-se a **leve** pois, no contexto do exercício, são meramente auxiliares. A perspectiva do triângulo representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspectivas das projeções (horizontal e frontal) do triângulo, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do rebatimento do plano coordenado XY , da translação do plano XY rebatido, da construção da projeção horizontal do triângulo em rebatimento, das retas m e n em rebatimento e em perspectiva ou, ainda, das perpendiculares à charneira e do arco de transporte), representaram-se a **leve**.

278.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos *coordenados* que fazem, entre si, três ângulos de 120° . A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Em seguida, desenhou-se o *triângulo fundamental*, cujos vértices não se identificaram (recorde que as dimensões do triângulo são arbitrárias).

Resolução:

O plano que contém o pentágono **[ABCDE]** (o plano frontal) não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que o pentágono **[ABCDE]** não se projeta em verdadeira grandeza (a perspectiva do pentágono não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o pentágono está contido num plano frontal (de frente), que é paralelo ao *plano coordenado frontal* (o plano **XZ**), sabe-se que o pentágono se projeta em verdadeira grandeza no *plano coordenado XZ* – o pentágono **[ABCDE]** e a sua projeção frontal (a sua projeção no *plano coordenado XZ*) são duas figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do **rebatimento do plano coordenado XZ** (o plano no qual o pentágono se projeta em verdadeira grandeza).

O rebatimento do *plano coordenado XZ* pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes**. Optou-se por recorrer ao **método dos cortes**.

Rebatimento do plano coordenado XZ:

Assim, em primeiro lugar identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XZ*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta suporte do *triângulo fundamental* que se opõe à perspectiva do eixo **Y**.

O rebatimento do *plano coordenado XZ* processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da *pirâmide axonométrica* que está contida no plano **XZ**. Nesse sentido, determinou-se o ponto **M**, o ponto médio da aresta da base da *pirâmide axonométrica* que está contida na charneira e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 257. e respetivo **relatório**). Em seguida, determinou-se **O_r** (o ponto **O** rebatido), sobre a semicircunferência e na perpendicular à charneira que passa por **O** (que é a própria perspectiva do eixo **Y**). O eixo **X_r** fica definido por **O_r** e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é um ponto fixo). O eixo **Z_r** fica definido por **O_r** e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é outro ponto fixo). O eixo **X_r** e o eixo **Z_r** são perpendiculares entre si no ponto **O_r**.

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **XZ** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspectiva do eixo **Y**. O ponto **O_r'** é o ponto **O** rebatido após a translação efetuada. O eixo **X_r'** passa por **O_r'** e é paralelo ao eixo **X_r**. O eixo **Z_r'** passa por **O_r'** e é paralelo ao eixo **Z_r**.

Construção da projeção frontal do pentágono [ABCDE], em verdadeira grandeza:

No plano **XZ** rebatido e transladado, sobre o eixo **X_r'**, representou-se a **abscissa** do ponto **Q** (4 cm, em verdadeira grandeza e a partir de **O_r'**) e sobre o eixo **Z_r'** representou-se a **cota** do ponto **Q** (5 cm, em verdadeira grandeza e a partir de **O_r'**), o que nos permitiu representar, de imediato, **Q_{2r}**, que é a projeção frontal do ponto **Q**, em rebatimento.

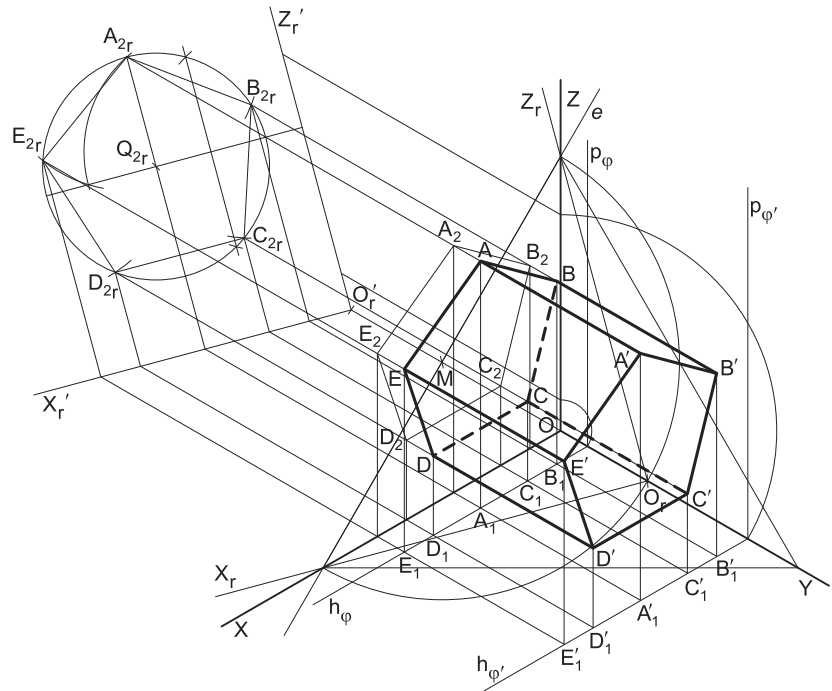
A partir de **Q_{2r}**, foi possível efetuar a construção da **projeção frontal do pentágono**, em verdadeira grandeza, de acordo com os dados. Assim, com o compasso, fazendo centro em **Q_{2r}**, e com 3 cm de raio, desenhou-se a circunferência circunscrita à projeção frontal do pentágono. Em seguida, efetuou-se a construção da projeção frontal do pentágono, em verdadeira grandeza e de acordo com os dados – uma vez que a face lateral inferior do prisma é horizontal (de nível), o lado inferior do pentágono tem de ser horizontal (nesta situação, tem de ser fronto-horizontal – paralelo ao eixo **X_r**). Assim, construiu-se o pentágono em função dessa premissa e nomearam-se os seus vértices de forma arbitrária (pois o enunciado é omissivo), o que nos permitiu determinar as projeções frontais dos vértices do pentágono (em rebatimento). O pentágono **[A_{2r}B_{2r}C_{2r}D_{2r}E_{2r}]** é a projeção frontal do pentágono **[ABCDE]**, em verdadeira grandeza (em rebatimento).

Para determinar a perspectiva do pentágono **[ABCDE]** é necessário inverter o rebatimento, o que se pode processar à semelhança do efetuado no exercício anterior ou recorrendo a retas do plano **XY** que contenham esses pontos (a situação adotada e que em seguida se expõe).

Representação dos planos que contêm as bases do prisma:

Em primeiro lugar, há que determinar as perspectivas dos afastamentos dos planos frontais (de frente) que contêm as bases do sólido e representar esses planos pelos respetivos traços. Tendo em conta que se trata de uma isometria (em que todos os seus eixos sofrem a mesma redução), é possível representar a perspectiva do afastamento dos dois planos na perspectiva de qualquer eixo **e**, e a partir daí, transportá-los para a perspectiva do eixo **Y** (onde se medem os afastamentos).

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Consideremos o plano φ como o plano que contém a base de menor afastamento do sólido (o plano que contém o pentágono [ABCDE]) e o plano φ' como o plano que contém a outra base do sólido (o pentágono [A'B'C'D'E']). A altura de um prisma é a distância entre os planos que contêm as duas bases. Uma vez que o plano φ tem 1 cm de afastamento (o afastamento do ponto Q) e o prisma tem 6 cm de altura, o plano φ' tem 7 cm de afastamento ($1 + 6 = 7$).

Assim, mediu-se, no eixo Z_r' , o afastamento do plano φ (1 cm) e o afastamento do plano φ' (7 cm), em verdadeira grandeza. Invertendo o rebatimento, com o recurso a retas perpendiculares à charneira, determinaram-se as perspetivas daqueles afastamentos sobre a perspetiva do eixo Z. Essas perspetivas estão no eixo errado, pois deveriam estar sobre a perspetiva do eixo Y. Assim, com o compasso, fazendo centro na perspetiva do ponto O, transportaram-se as perspetivas dos afastamentos para a perspetiva do eixo Y.

Por fim, desenharam-se as perspetivas dos traços do plano φ (o plano da base [ABCDE] do sólido) – h_φ é a perspetiva do traço horizontal do plano φ (é paralelo à perspetiva do eixo X) e p_φ é a perspetiva do traço lateral (ou de perfil) do plano φ (e que é paralelo à perspetiva do eixo Z). Em seguida, desenharam-se as perspetivas dos traços do plano φ' (o plano da base [A'B'C'D'E'] do sólido) – $h_{\varphi'}$ é a perspetiva do traço horizontal do plano φ' (é paralelo à perspetiva do eixo X) e $p_{\varphi'}$ é a perspetiva do traço lateral (ou de perfil) do plano φ' (e que é paralelo à perspetiva do eixo Z).

Determinação da perspetiva do pentágono [ABCDE]:

Para inverter o rebatimento do ponto A transportou-se a sua abcissa para o eixo X_r' (a partir de A_2 , e perpendicularmente ao eixo X_r') e, deste, para a perspetiva de h_φ (o traço horizontal do plano φ), com uma perpendicular à charneira – este procedimento permitiu-nos determinar A_1 (a perspetiva da projeção horizontal do ponto A), sobre a perspetiva de h_φ . (o ponto A pertence ao plano φ , que é um plano projetante horizontal). Por A_1 conduziu-se a perspetiva da linha de chamada do ponto A, que é vertical (e, por isso, paralela à perspetiva do eixo Z). Em seguida, conduziu-se, por A_2 , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto A) e determinou-se A (a perspetiva propriamente dita do ponto A) sobre a perspetiva da sua linha de chamada. Por fim, determinou-se A_2 (a perspetiva da projeção frontal do ponto A) – note que não se determinou A_3 (a perspetiva da projeção lateral do ponto A), por ser desnecessária.

A inversão do rebatimento dos pontos B, C, D e E, bem como a determinação das respetivas perspetivas, processou-se de forma idêntica à exposta para o ponto A. A partir das perspetivas dos cinco vértices, desenhou-se a perspetiva do pentágono [ABCDE]. O pentágono $[A_2B_2C_2D_2E_2]$ é a perspetiva da projeção frontal do pentágono [ABCDE].

Determinação da perspetiva do prisma:

Tendo em conta que se trata de um **prisma regular**, as suas arestas laterais estão contidas em retas ortogonais aos planos das bases, ou seja, retas de topo (retas projetantes frontais). Dessa forma, os vértices da base [A'B'C'D'E'] têm as suas projeções frontais (que não se identificaram) coincidentes com as projeções frontais dos vértices correspondentes da base [ABCDE].

Assim, desenhou-se a perspetiva da projeção horizontal da reta projetante frontal do ponto A (na qual se situa igualmente o ponto A') e determinou-se o ponto de interseção com $h_{\varphi'}$ (a perspetiva do traço horizontal do plano φ'), que é A' (a perspetiva da projeção horizontal do ponto A'). Por A' conduziu-se a perspetiva da linha de chamada do ponto A', que é vertical (e, por isso, paralela à perspetiva do eixo Z). Em seguida, conduziu-se, por A, a perspetiva da reta projetante frontal do ponto A (que é paralela à perspetiva do eixo Y) e determinou-se A' (a perspetiva propriamente dita do ponto A'), sobre a perspetiva da sua linha de chamada.

A determinação das perspetivas dos pontos B', C', D' e E' processou-se de forma idêntica à exposta para o ponto A'. A partir das perspetivas dos cinco vértices, desenhou-se a perspetiva do pentágono [A'B'C'D'E'].

Por fim, a partir das perspetivas dos dez vértices do prisma, desenhou-se o contorno aparente da perspetiva do sólido, que é a linha fechada [BB'C'D'DEA]. Existem três vértices que não integram o contorno aparente da perspetiva do sólido – os vértices C, E' e A'.

O vértice C, por ser o vértice mais distante do observador, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas [BC] e [CD], da base [ABCDE], e a aresta lateral [CC']. Os vértices A' e E', por serem os vértices mais próximos do observador, são **visíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas [A'B'], [A'E'] e [D'E'], da base [A'B'C'D'E'], e as arestas laterais [AA'] e [EE'].

A base [ABCDE] é **invisível**, bem como as faces laterais [BB'C'C] e [CC'D'D] – a face lateral [CC'D'D] é a face horizontal (de nível) do sólido. A base [A'B'C'D'E'] é **visível**, bem como as faces laterais [AA'B'B], [AA'E'E] e [DD'E'E].

Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo X, eixo Y e eixo Z) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspetiva do prisma representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspetivas dos traços dos planos φ e φ' (os planos que contêm as bases do prisma), no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do rebatimento do plano coordenado XZ, da translação do plano XZ rebatido, da construção da projeção frontal do pentágono em rebatimento ou, ainda, das perpendiculares à charneira e das linhas de chamada ou arcos de transporte), representaram-se a **leve**.

279.

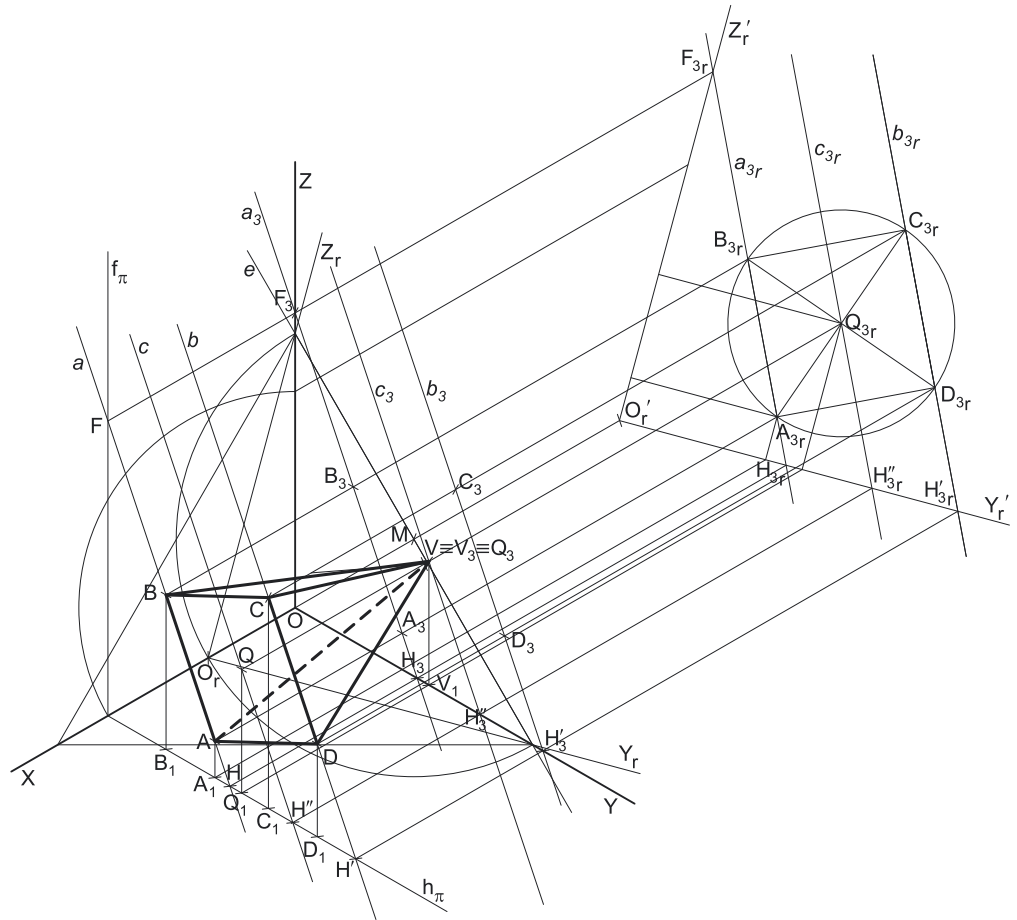
Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados que fazem, entre si, três ângulos de 120° . A perspectiva do eixo Z representa-se, convencionalmente, na vertical. Em seguida, desenhou-se o *triângulo fundamental*, cujos vértices não se identificaram (recorde que as dimensões do triângulo são arbitrárias).

Resolução:

O plano que contém o quadrado $[ABCD]$ (o plano de perfil) não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que o quadrado $[ABCD]$ não se projeta em verdadeira grandeza (a perspectiva do quadrado não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o quadrado está contido num plano de perfil, que é paralelo ao *plano coordenado lateral* (o plano YZ), sabe-se que o quadrado se projeta em verdadeira grandeza no *plano coordenado* YZ – o quadrado $[ABCD]$ e a sua projeção lateral (a sua projeção no *plano coordenado* YZ) são duas figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do **rebatimento do plano coordenado** YZ (o plano no qual o quadrado se projeta em verdadeira grandeza).



O rebatimento do *plano coordenado* YZ pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes**. Optou-se por recorrer ao **método dos cortes**.

Rebatimento do plano coordenado YZ :

Assim, em primeiro lugar identificou-se a charneira do rebatimento (reta e), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado* YZ) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta e), que é a reta suporte do *triângulo fundamental* que se opõe à perspectiva do eixo X .

O rebatimento do *plano coordenado* YZ processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da *pirâmide axonométrica* que está contida no plano YZ . Nesse sentido, determinou-se o ponto M , o ponto médio da aresta da base da *pirâmide axonométrica* que está contida na charneira e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 256. e respetivo **relatório**). Em seguida, determinou-se O_r (o ponto O rebatido), sobre a semicircunferência e na perpendicular à charneira que passa por O (que é a própria perspectiva do eixo X). O eixo Y_r fica definido por O_r e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é um ponto fixo). O eixo Z_r fica definido por O_r e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é outro ponto fixo). O eixo Y_r e o eixo Z_r são perpendiculares entre si no ponto O_r .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano YZ rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspectiva do eixo X . O ponto O_r' é o ponto O rebatido após a translação efetuada. O eixo Y_r' passa por O_r' e é paralelo ao eixo Y_r . O eixo Z_r' passa por O_r' e é paralelo ao eixo Z_r .

Construção da projeção horizontal do quadrado, em verdadeira grandeza:

No plano YZ rebatido e transladado, sobre o eixo Y_r' , representou-se o **afastamento** do ponto Q (5 cm, em verdadeira grandeza e a partir de O_r') e sobre o eixo Z_r' representou-se a **cota** do ponto Q (4 cm, em verdadeira grandeza e a partir de O_r'), o que nos permitiu representar, de imediato, Q_{3r} , que é a projeção lateral do ponto Q , em rebatimento.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A partir de Q_{3r} , foi possível efetuar a construção da **projeção lateral do quadrado**, em verdadeira grandeza, de acordo com os dados. Assim, com o compasso, fazendo centro em Q_{3r} e com 3 cm de raio, desenhou-se a circunferência circunscrita à projeção lateral do quadrado. Em seguida, determinou-se o ponto dessa circunferência que tem 4 cm de afastamento (distância ao eixo Z_r') e que tem cota inferior ao ponto Q – esse ponto é A_{3r} (a projeção lateral do ponto A , em rebatimento). A partir de A_{3r} , efetuou-se a construção da projeção lateral do quadrado, em verdadeira grandeza, inscrito na circunferência.

Para determinar a perspectiva do quadrado **[ABCD]** é necessário inverter o rebatimento, o que se pode processar recorrendo a retas do plano YZ que contêm os vértices do quadrado.

Representação do plano que contém o quadrado **[ABCD]**:

Em primeiro lugar, há que determinar a perspectiva da abscissa do plano de perfil que contém o quadrado e representar esse plano pelos seus traços. Tendo em conta que se trata de uma isometria (em que todos os seus eixos sofrem a mesma redução), é possível representar a perspectiva da abscissa do plano π (o plano de perfil que contém o quadrado) na perspectiva de qualquer eixo e, a partir daí, transportá-la para a perspectiva do eixo X (onde se medem as abscissas).

Assim, sobre o eixo Z_r' , a partir de O_r' e no sentido positivo do eixo, mediram-se os 7 cm (a abscissa do ponto Q , que é a abscissa da base da pirâmide) e transportou-se essa medida para a perspectiva do eixo Z , com o recurso a uma perpendicular à charneira. Este procedimento permitiu-nos obter, sobre a perspectiva do eixo Z , o afastamento do plano da base do sólido, só que, para o efeito pretendido, está no eixo errado (deveria estar sobre a perspectiva do eixo X).

Assim, com o compasso, fazendo centro na perspectiva do ponto O , transportou-se a perspectiva daquele afastamento para a perspectiva do eixo X (que tem a mesma redução que a perspectiva do eixo Z), o que nos permitiu obter, sobre a perspectiva do eixo X , a perspectiva do afastamento da base do sólido.

Por fim, desenharam-se as perspectivas dos traços do plano $\pi - f_\pi$ é a perspectiva do traço frontal do plano π (é paralelo à perspectiva do eixo Z) e h_π é a perspectiva do traço horizontal do plano π (e que é paralelo à perspectiva do eixo Y).

Determinação da perspectiva do quadrado **[ABCD]**:

Para inverter o rebatimento dos pontos A e B recorreu-se a uma reta a , que contém aqueles pontos (é a reta suporte do lado **[AB]** do triângulo) – a reta a_{3r} é a projeção lateral da reta a , em rebatimento, e passa por A_{3r} e por B_{3r} (a reta a está definida por dois pontos). A reta a_{3r} interseca o eixo Y_r' no ponto H_{3r} (que é a projeção lateral do traço horizontal da reta a) e interseca o eixo Z_r' no ponto F_{3r} (que é a projeção lateral do traço frontal da reta a).

Por F_{3r} , conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinaram-se F_3 (a perspectiva da projeção lateral do ponto F) sobre a perspectiva do eixo Z e F (a perspectiva propriamente dita do ponto F) sobre f_π . Por H_{3r} , conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinaram-se H_3 (a perspectiva da projeção lateral do ponto H) sobre a perspectiva do eixo Y e H (a perspectiva propriamente dita do ponto H) sobre h_π . A reta a , em perspectiva, está, assim, definida por dois pontos (os pontos F e H) – nesse sentido, desenhou-se a reta a (a perspectiva propriamente dita da reta a), passando por F e por H , e desenhou-se também a reta a_3 (a perspectiva da projeção lateral da reta a), passando por F_3 e por H_3 .

O ponto A é um ponto da reta a – assim, por A_{3r} , conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinaram-se A_3 (a perspectiva da projeção lateral do ponto A) sobre a_3 (a perspectiva da projeção lateral da reta a) e A (a perspectiva propriamente dita do ponto A) sobre a (a perspectiva propriamente dita da reta a). O processo repetiu-se para o ponto B (que é outro ponto da reta a), o que nos permitiu determinar as perspectivas do ponto B .

Para inverter o rebatimento dos pontos C e D recorreu-se a uma reta b (a reta suporte do lado **[CD]** do quadrado), que passa por aqueles dois pontos e é necessariamente paralela à reta a – a reta b_{3r} é a projeção lateral da reta b , em rebatimento, passa por C_{3r} e por D_{3r} e é paralela a a_{3r} . A reta b_{3r} interseca o eixo Y_r' no ponto H'_{3r} (que é a projeção lateral do ponto H' , o traço horizontal da reta b).

Por H'_{3r} , conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinaram-se H'_3 (a perspectiva da projeção lateral do ponto H') sobre a perspectiva do eixo Y e H' (a perspectiva propriamente dita do ponto H') sobre h_π . A reta b , em perspectiva, está, assim, definida por um ponto (o ponto H') e uma direção (é paralela à reta a) – nesse sentido, desenhou-se a reta b (a perspectiva propriamente dita da reta b), passando por H' e paralela à reta a , e desenhou-se também b_3 , passando por H'_3 e paralela à reta a_3 .

O ponto C é um ponto da reta b – assim, por C_{3r} , conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinaram-se C_3 (a perspectiva da projeção lateral do ponto C) sobre b_3 (a perspectiva da projeção lateral da reta b) e C (a perspectiva propriamente dita do ponto C) sobre b (a perspectiva propriamente dita da reta b). O processo repetiu-se para o ponto D (que é outro ponto da reta b), o que nos permitiu determinar as perspectivas do ponto D .

Por fim, a reta c , paralela às retas a e b e passando pelo ponto Q , foi a reta a que se recorreu para se inverter o rebatimento do ponto Q e se determinarem as suas perspectivas (de forma semelhante à exposta para os pontos A e C). O ponto H'' é o traço horizontal da reta c – a reta c , em perspectiva, está definida por um ponto (o ponto H'') e por uma direção (é paralela às retas a e b).

A partir das perspectivas dos quatro vértices do polígono, desenhou-se a perspectiva do quadrado **[ABCD]**.

Em seguida, determinaram-se as perspectivas das projeções horizontais dos quatro vértices do polígono e do ponto Q , que estão sobre a perspectiva de h_π (pois o plano π é um plano projetante horizontal). Não se representaram as perspectivas das projeções frontais dos vértices do quadrado, por não serem necessárias.

Determinação da perspectiva da pirâmide:

Tendo em conta que se trata de uma **pirâmide regular**, o seu eixo está contido numa reta ortogonal ao plano da base, ou seja, uma reta fronto-horizontal (projetante lateral). Dessa forma, o ponto Q (o centro da base) e o ponto V (o vértice da pirâmide) têm as suas projeções laterais coincidentes – tem-se imediatamente $Q_3 \equiv V_3$. Por outro lado, uma vez que o vértice da pirâmide tem abscissa nula (o que é dado no enunciado), tem-se imediatamente $V \equiv V_3 \equiv Q_3$ (o vértice V tem abscissa nula, pelo que se situa no plano YZ).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por fim, a partir das perspectivas dos cinco vértices da pirâmide, desenhou-se o contorno aparente da perspectiva do sólido, que é a linha fechada [ABVD]. Existe um único vértice que não integra o contorno aparente da perspectiva do sólido – o vértice **C**.

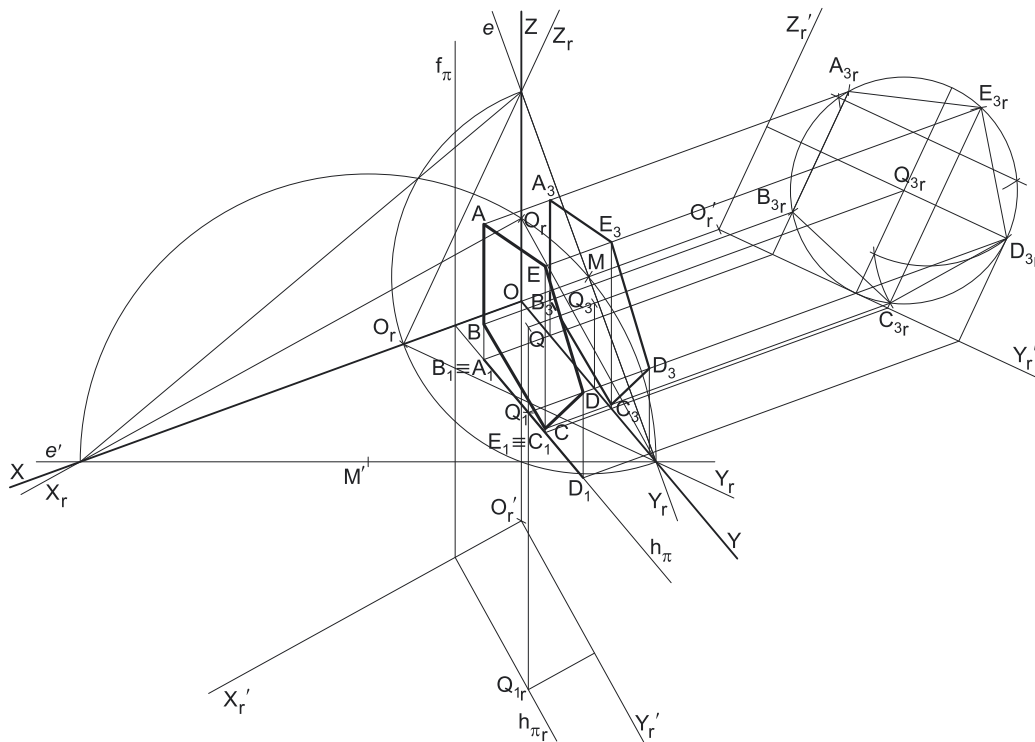
O vértice **C**, por ser um dos vértices mais próximos do observador, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas [BC] e [CD], da base, e a aresta lateral [CV].

A base da pirâmide é **visível**, bem como as faces laterais [BCV] e [CDV]. As faces laterais [ABV] e [ADV] são **invisíveis**.

Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspectiva da pirâmide representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspectivas dos traços (horizontal e frontal) do plano π (o plano que contém a base da pirâmide), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do rebatimento do plano coordenado **YZ**, da translação do plano **YZ** rebatido, da construção da projeção lateral do pentágono em rebatimento ou, ainda, das perpendiculares à charneira e das linhas de chamada ou arcos de transporte), representaram-se a **leve**.

280.



Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo **X** faz ângulos iguais (de 110°) com as perspectivas dos outros dois eixos, o eixo **X** é o eixo que sofre uma redução isolada. A soma dos ângulos que a perspectiva do eixo **X** faz com as perspectivas dos outros dois eixos é 220° , pelo que as perspectivas dos outros dois eixos (o eixo **Y** e o eixo **Z**) fazem, entre si, um ângulo de 140° ($360^\circ - 220^\circ = 140^\circ$). Em seguida, desenhou-se o *triângulo fundamental*, cujos vértices não se identificaram (recorde que as dimensões do triângulo são arbitrárias).

Resolução:

O plano que contém o pentágono [ABCDE] (o plano de perfil) não é paralelo ao plano de projeção (o plano *axonométrico*), pelo que o pentágono [ABCDE] **não se projeta em verdadeira grandeza** (a perspectiva do pentágono não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o pentágono está contido num plano de perfil, que é paralelo ao *plano coordenado lateral* (o plano **YZ**), sabe-se que o pentágono se projeta em verdadeira grandeza no *plano coordenado YZ* – o pentágono [ABCDE] e a sua projeção lateral (a sua projeção no *plano coordenado YZ*) são duas figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do **rebatimento do plano coordenado YZ** (o plano no qual o pentágono se projeta em verdadeira grandeza).

O rebatimento do *plano coordenado YZ* pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes**. Optou-se por recorrer ao **método dos cortes**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Rebatimento do plano coordenado YZ :

Assim, em primeiro lugar identificou-se a charneira do rebatimento (reta e), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano coordenado YZ) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta e), que é a reta suporte do triângulo fundamental que se opõe à perspectiva do eixo X .

O rebatimento do plano coordenado YZ processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da pirâmide axonométrica que está contida no plano YZ . Nesse sentido, determinou-se o ponto M , o ponto médio da aresta da base da pirâmide axonométrica que está contida na charneira e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 256. e respetivo relatório). Em seguida, determinou-se O_r (o ponto O rebatido), sobre a semicircunferência e na perpendicular à charneira que passa por O (que é a própria perspectiva do eixo X). O eixo Y_r fica definido por O_r e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é um ponto fixo). O eixo Z_r fica definido por O_r e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é outro ponto fixo). O eixo Y_r e o eixo Z_r são perpendiculares entre si no ponto O_r .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano YZ rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspectiva do eixo X . O ponto O_r' é o ponto O rebatido após a translação efetuada. O eixo Y_r' passa por O_r' e é paralelo ao eixo Y_r . O eixo Z_r' passa por O_r' e é paralelo ao eixo Z_r .

Construção da projeção lateral do pentágono, em verdadeira grandeza:

No plano YZ rebatido e transladado, sobre o eixo Y_r' , representou-se o afastamento do ponto Q (4 cm, em verdadeira grandeza e a partir de O_r') e sobre o eixo Z_r' representou-se a cota do ponto Q (3 cm, em verdadeira grandeza e a partir de O_r'), o que nos permitiu representar, de imediato, Q_{3r} , que é a projeção lateral do ponto Q , em rebatimento.

A partir de Q_{3r} , foi possível efetuar a construção da projeção lateral do pentágono, em verdadeira grandeza, de acordo com os dados. Assim, com o compasso, fazendo centro em Q_{3r} e com 3 cm de raio, desenhou-se a circunferência circunscrita à projeção lateral do pentágono. Em seguida, efetuou-se a construção da projeção lateral do pentágono, em verdadeira grandeza, inscrito na circunferência e de acordo com os dados. O lado $[AB]$ é vertical o que significa que, em rebatimento, a projeção lateral desse lado é paralelo ao eixo Z_r' . Por outro lado, o vértice de maior cota desse lado é A , pelo que A_{3r} é o vértice superior do lado $[A_{3r}B_{3r}]$ do pentágono $[A_{3r}B_{3r}C_{3r}D_{3r}E_{3r}]$.

Para determinar a perspectiva do pentágono $[ABCDE]$ é necessário inverter o rebatimento, o que se processa com o recurso a perpendiculares à charneira.

Representação do plano que contém o pentágono $[ABCDE]$:

No entanto, é necessário determinar a perspectiva da abscissa do plano π (o plano que contém o polígono), que se mede sobre a perspectiva do eixo X – o eixo X é o eixo que sofre a redução isolada, pelo que não é possível efetuar o transporte dessa medida a partir de qualquer dos outros dois eixos. Salienta-se que os dois eixos rebatidos (o eixo Y e o eixo Z) sofrem a mesma redução, que é diferente da redução do eixo X . Nesse sentido, é necessário efetuar o rebatimento do eixo X , para determinar a perspectiva da abscissa do plano π (e do ponto Q).

O rebatimento do eixo X pode processar-se por qualquer um dos três processos estudados – o rebatimento do plano projetante do eixo X , o rebatimento de um plano coordenado (que contenha o eixo X) ou, ainda, o método dos cortes. Optou-se por este último processo. Assim, em primeiro lugar identificou-se a charneira do rebatimento (reta e'), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano coordenado XY) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta e'), que é a reta suporte do triângulo fundamental que se opõe à perspectiva do eixo X .

O rebatimento do plano coordenado XY processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da pirâmide axonométrica que está contida no plano XY . Nesse sentido, determinou-se o ponto M' , o ponto médio da aresta da base da pirâmide axonométrica que está contida na charneira e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 245. e respetivo relatório). Em seguida, determinou-se O_r (o ponto O rebatido), sobre a semicircunferência e na perpendicular à charneira que passa por O (que é a própria perspectiva do eixo X). O eixo X_r fica definido por O_r e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é um ponto fixo). O eixo Y_r fica definido por O_r e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é outro ponto fixo). O eixo X_r e o eixo Y_r são perpendiculares entre si no ponto O_r .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano XY rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspectiva do eixo Z . O ponto O_r' é o ponto O rebatido após a translação efetuada. O eixo X_r' passa por O_r' e é paralelo ao eixo X_r . O eixo Y_r' passa por O_r' e é paralelo ao eixo Y_r .

No plano XY rebatido e transladado, sobre o eixo X_r' , representou-se a abscissa do ponto Q (2 cm, em verdadeira grandeza e a partir de O_r') e sobre o eixo Y_r' representou-se o afastamento do ponto Q (4 cm, em verdadeira grandeza e a partir de O_r'), o que nos permitiu representar, de imediato, Q_{1r} , que é a projeção horizontal do ponto Q , em rebatimento. Por Q_{1r} , conduziu-se uma paralela ao eixo Y_r' , que é $h_{\pi r}$ (o traço horizontal do plano π , em rebatimento).

Pelo ponto de concorrência de $h_{\pi r}$ com o eixo X_r' , conduziu-se uma perpendicular à charneira do rebatimento (reta e'), o que nos permitiu determinar, de imediato, a perspectiva do traço frontal do plano π (f_{π}). Tendo em conta que os dois traços do plano são concorrentes num ponto do eixo X , pelo ponto de concorrência da perspectiva de f_{π} com a perspectiva do eixo X conduziu-se uma paralela à perspectiva do eixo Y – essa reta é a perspectiva do traço horizontal do plano π (h_{π}).

Determinação da perspectiva do pentágono $[ABCDE]$:

Para inverter o rebatimento do ponto Q , a partir das suas duas projeções em rebatimento (a projeção horizontal e a projeção lateral), conduziu-se, por Q_{3r} , uma perpendicular à charneira do respetivo rebatimento (reta e) e, por Q_{1r} , uma perpendicular à charneira do respetivo rebatimento (reta e') – o ponto de concorrência das duas retas é a perspectiva propriamente dita do ponto Q . Tendo em conta que o plano π é um plano projetante horizontal, foi possível, de forma imediata, determinar Q_1 (a perspectiva da projeção horizontal do ponto Q), sobre a perspectiva de h_{π} .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, procedeu-se à determinação das perspectivas dos vértices do pentágono. Nesse sentido, no plano **YZ** rebatido e transladado, transportou-se o afastamento do ponto **D** para o eixo Y_r' (a partir de D_{3r} e perpendicularmente ao eixo Y_r') e, deste, para a perspectiva de h_r , com uma perpendicular à charneira (reta **e**) – este procedimento permitiu-nos determinar D_1 (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **D**), sobre a perspectiva de h_r . (o plano π é projetante horizontal). Por D_1 conduziu-se a perspectiva da linha de chamada do ponto **D**, que é vertical (e, por isso, paralela à perspectiva do eixo **Z**). Em seguida, conduziu-se, por D_{3r} , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **D**) e determinou-se a perspectiva do ponto **D**, sobre a perspectiva da sua linha de chamada. Por fim, atendendo a que o ponto D_3 (a perspectiva da projeção lateral do ponto **D**) se situa no plano **YZ**, foi possível, a partir da perspectiva do eixo **Y**, conduzir a perspectiva da sua linha de chamada e determinar a perspectiva de D_3 no ponto de interseção da linha de chamada com a perpendicular à charneira (reta **e**) que passa por D_{3r} .

A inversão do rebatimento dos restantes vértices do pentágono (os pontos **A**, **B**, **C** e **E**) e a determinação das respetivas perspectivas processou-se de forma idêntica à exposta para o ponto **D**. A partir das perspectivas dos cinco vértices, desenhou-se a perspectiva do pentágono **[ABCDE]**. Por fim, desenharam-se as perspectivas da projeção horizontal e da projeção lateral da figura, atendendo às invisibilidades existentes.

Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspectiva do pentágono representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspectivas das projeções (horizontal e lateral) do pentágono, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte**. As perspectivas dos traços (frontal e horizontal) do plano π (o plano que contém a figura), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representam a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso dos rebatimentos dos planos coordenados **YZ** e **XY**, das respetivas translações em rebatimento, da construção da projeção lateral do pentágono em rebatimento ou, ainda, das perpendiculares à charneira), representaram-se a **leve**.

281.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo **Z** faz ângulos iguais (de 130°) com as perspectivas dos outros dois eixos, o eixo **Z** é o eixo que sofre uma redução isolada. A soma dos ângulos que a perspectiva do eixo **Z** faz com as perspectivas dos outros dois eixos é 260° , pelo que as perspectivas dos outros dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Y**) fazem, entre si, um ângulo de 100° ($360^\circ - 260^\circ = 100^\circ$). Em seguida, desenhou-se o *triângulo fundamental*, cujos vértices não se identificaram (recorde que as dimensões do triângulo são arbitrárias).

Resolução:

O plano que contém o quadrado **[ABCD]** (o plano frontal) não é paralelo ao plano de projeção (o plano *axonométrico*), pelo que o quadrado **[ABCD]** não se projeta em verdadeira grandeza (a perspectiva do quadrado não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o quadrado está contido num plano frontal (de frente), que é paralelo ao plano coordenado frontal (o plano **XZ**), sabe-se que o quadrado se projeta em verdadeira grandeza no plano coordenado **XZ** – o quadrado **[ABCD]** e a sua projeção frontal (a sua projeção no plano coordenado **XZ**) são duas figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do rebatimento do plano coordenado **XZ** (o plano no qual o quadrado se projeta em verdadeira grandeza).

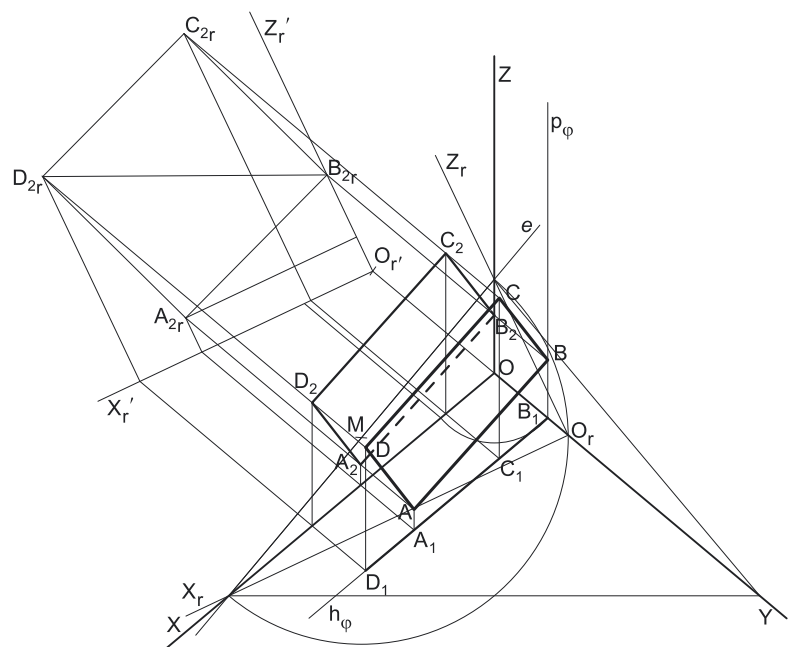
O rebatimento do plano coordenado **XZ** pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo rebatimento dos planos coordenados ou pelo método dos cortes. Optou-se por recorrer ao método dos cortes.

Rebatimento do plano coordenado **XZ**:

Assim, em primeiro lugar identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano coordenado **XZ**) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta suporte do triângulo fundamental que se opõe à perspectiva do eixo **Y**.

O rebatimento do plano coordenado **XZ** processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da pirâmide axonométrica que está contida no plano **XZ**. Nesse sentido, determinou-se o ponto **M**, o ponto médio da aresta da base da pirâmide axonométrica que está contida na charneira e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 257. e respetivo relatório). Em seguida, determinou-se O_r (o ponto **O** rebatido), sobre a semicircunferência e na perpendicular à charneira que passa por **O** (que é a própria perspectiva do eixo **Y**). O eixo X_r fica definido por O_r e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é um ponto fixo). O eixo Z_r fica definido por O_r e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é outro ponto fixo). O eixo X_r e o eixo Z_r são perpendiculares entre si no ponto O_r .

(continua na página seguinte)



(continuação da página anterior)

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **XZ** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspectiva do eixo **Y**. O ponto **O_r'** é o ponto **O** rebatido após a translação efetuada. O eixo **X_r'** passa por **O_r'** e é paralelo ao eixo **X_r**. O eixo **Z_r'** passa por **O_r'** e é paralelo ao eixo **Z_r**.

Construção da projeção frontal do quadrado, em verdadeira grandeza:

No plano **XZ** rebatido e transladado, sobre o eixo **X_r'**, representou-se a **abscissa** do ponto **A** (5 cm, em verdadeira grandeza e a partir de **O_r'**) e sobre o eixo **Z_r'** representou-se a **cota** do ponto **A** (1 cm, em verdadeira grandeza e a partir de **O_r'**), o que nos permitiu representar, de imediato, **A_{2r}**, que é a projeção frontal do ponto **A**, em rebatimento.

A partir de **A_{2r}**, foi possível medir os 20° e desenhar a reta suporte da projeção frontal do lado **[AB]** do quadrado (em rebatimento) e determinou-se **B_{2r}** (a projeção frontal do ponto **B**, em rebatimento), sobre o eixo **Z_r'** (tenha em conta que o ponto **B** tem abscissa nula) Note que, das duas hipóteses de medir o ângulo, a que a solução apresenta é a única que nos garante que, após a determinação do ponto **B**, o quadrado se situa no espaço do 1ª *Triedro* (ou seja, todos os seus vértices têm abscissa e cotas positivas).

A partir de **A_{2r}** e de **B_{2r}**, efetuou-se a construção da projeção frontal do quadrado, em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar **C_{2r}** e **D_{2r}** (as projeções frontais dos outros dois vértices do quadrado) – o quadrado **[A_{2r}B_{2r}C_{2r}D_{2r}]** é a projeção frontal do quadrado **[ABCD]**, em verdadeira grandeza (em rebatimento).

Para determinar a perspectiva do quadrado **[ABCD]** é necessário inverter o rebatimento, o que se processa com o recurso a perpendiculares à charneira.

Representação do plano que contém o quadrado [ABCD]:

Em primeiro lugar, há que determinar a perspectiva do afastamento do plano frontal (de frente) que contém o quadrado e representar esse plano pelos seus traços. Tendo em conta que se trata de uma dimetria na qual o eixo **X** e o eixo **Y** sofrem a mesma redução, e uma vez que já temos o eixo **X** rebatido, é possível representar a perspectiva do afastamento do plano ϕ (o plano frontal que contém o quadrado) na perspectiva do eixo **X** e, a partir daí, transportá-la para a perspectiva do eixo **Y** (onde se medem os afastamentos).

Uma vez que o ponto **A** tem 2 cm de afastamento, o plano ϕ tem necessariamente 2 cm de afastamento. Assim, mediram-se os 2 cm, no eixo **X_r'**, e, através de uma perpendicular à charneira, determinou-se a perspectiva dessa medida, sobre a perspectiva do eixo **X**. A perspectiva do afastamento do plano ϕ está no eixo errado, pois deveria estar sobre a perspectiva do eixo **Y**. Assim, com o compasso, fazendo centro na perspectiva do ponto **O**, transportou-se a perspectiva do afastamento do plano ϕ para a perspectiva do eixo **Y**.

Por fim, desenharam-se as perspectivas dos traços do plano ϕ – **h_φ** é a perspectiva do traço horizontal do plano ϕ (é paralelo à perspectiva do eixo **X**) e **p_φ** é a perspectiva do traço lateral (ou de perfil) do plano ϕ (e que é paralelo à perspectiva do eixo **Z**).

Determinação da perspectiva do quadrado [ABCD]:

Em seguida, procedeu-se à determinação das perspectivas dos vértices do quadrado. O ponto **B** tem abscissa nula e pertence ao plano ϕ (o plano que contém o quadrado), pelo que o ponto **B** é um ponto de **p_φ** (o traço lateral do plano ϕ). Assim, por **B_{2r}**, conduziu-se uma perpendicular à charneira, o que nos permitiu determinar, de forma imediata, **B₂** (a perspectiva da projeção frontal do ponto **B**) sobre a perspectiva do eixo **Z** e **B** (a perspectiva propriamente dita do ponto **B**), sobre **p_φ** (a perspectiva do traço lateral do plano ϕ). O ponto **B** é um ponto do plano **YZ**, pelo que se tem imediatamente **B₃ ≡ B** (em que **B₃** é a perspectiva da projeção lateral do ponto **B**) – **B₁** (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **B**) situa-se na perspectiva do eixo **Y**.

Para determinar as perspectivas do ponto **A**, no plano **XZ** rebatido e transladado, transportou-se a abscissa do ponto **A** para o eixo **X_r'** (a partir de **A_{2r}** e perpendicularmente ao eixo **X_r'**) e, deste, para a perspectiva de **h_φ**, com uma perpendicular à charneira (reta **e**) – este procedimento permitiu-nos determinar **A₁** (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **A**), sobre a perspectiva de **h_φ** (o plano ϕ é projetante horizontal). Por **A₁** conduziu-se a perspectiva da linha de chamada do ponto **A**, que é vertical (e, por isso, paralela à perspectiva do eixo **Z**). Em seguida, conduziu-se, por **A_{2r}**, uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **A**) e determinou-se a perspectiva do ponto **A**, sobre a perspectiva da sua linha de chamada. Por fim, atendendo a que o ponto **A₂** (a perspectiva da projeção frontal do ponto **A**) se situa no plano **XZ**, foi possível, a partir da perspectiva do eixo **X**, conduzir a perspectiva da sua linha de chamada e determinar a perspectiva de **A₂** no ponto de interseção da linha de chamada com a perpendicular à charneira (reta **e**) que passa por **A_{2r}**.

A inversão do rebatimento dos outros dois vértices do quadrado (os pontos **C** e **D**) e a determinação das respetivas perspectivas processou-se de forma idêntica à exposta para o ponto **A**. A partir das perspectivas dos quatro vértices, desenhou-se a perspectiva do quadrado **[ABCD]**. Por fim, desenharam-se as perspectivas da projeção horizontal e da projeção frontal da figura, atendendo às invisibilidades existentes.

Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspectiva do quadrado representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspectivas das projeções (horizontal e frontal) do quadrado, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte**. As perspectivas dos traços (horizontal e lateral) do plano ϕ (o plano que contém a figura), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do rebatimento do plano coordenado **XZ**, da translação do plano **XZ** rebatido, da construção da projeção frontal do quadrado em rebatimento ou, ainda, das perpendiculares à charneira), representaram-se a **leve**.

282.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo Z representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo Z faz ângulos iguais (de 130°) com as perspectivas dos outros dois eixos, o eixo Z é o eixo que sofre uma redução isolada. A soma dos ângulos que a perspectiva do eixo Z faz com as perspectivas dos outros dois eixos é 260° , pelo que as perspectivas dos outros dois eixos (o eixo X e o eixo Y) fazem, entre si, um ângulo de 100° ($360^\circ - 260^\circ = 100^\circ$). Em seguida, desenhou-se o *triângulo fundamental*, cujos vértices não se identificaram (recorde que as dimensões do triângulo são arbitrárias).

Resolução:

O plano que contém a base da pirâmide (o plano horizontal) não é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que a base da pirâmide (o pentágono $[ABCDE]$) não se projeta em verdadeira grandeza (a perspectiva do pentágono não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Tenha em conta que se atribuíram notações aos vértices do pentágono, mas o enunciado é omissivo a esse respeito.

Tendo em conta que o pentágono está contido num plano horizontal (de nível), que é paralelo ao plano coordenado horizontal (o plano XY), sabe-se que o pentágono se projeta em verdadeira grandeza no plano coordenado XY – o pentágono $[ABCDE]$ e a sua projeção horizontal (a sua projeção no plano coordenado XY) são duas figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do **rebatimento do plano coordenado XY** (o plano no qual o pentágono se projeta em verdadeira grandeza).

O rebatimento do plano coordenado XY pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes**. Optou-se por recorrer ao **método dos cortes**.

Rebatimento do plano coordenado XY :

Assim, em primeiro lugar identificou-se a charneira do rebatimento (reta e), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano coordenado XY) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta e), que é a reta suporte do *triângulo fundamental* que se opõe à perspectiva do eixo Z .

O rebatimento do plano coordenado XY processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da *pirâmide axonométrica* que está contida no plano XY . Nesse sentido, determinou-se o ponto M , o ponto médio da aresta da base da *pirâmide axonométrica* que está contida na charneira e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 246. e respetivo *relatório*). Em seguida, determinou-se O_r (o ponto O rebatido), sobre a semicircunferência e na perpendicular à charneira que passa por O (que é a própria perspectiva do eixo Z). O eixo X_r fica definido por O_r e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é um ponto fixo). O eixo Y_r fica definido por O_r e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é outro ponto fixo). O eixo X_r e o eixo Y_r são perpendiculares entre si no ponto O_r .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano XY rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspectiva do eixo Z . O ponto O_r' é o ponto O rebatido após a translação efetuada. O eixo X_r' passa por O_r' e é paralelo ao eixo X_r . O eixo Y_r' passa por O_r' e é paralelo ao eixo Y_r .

Construção da projeção horizontal do pentágono, em verdadeira grandeza:

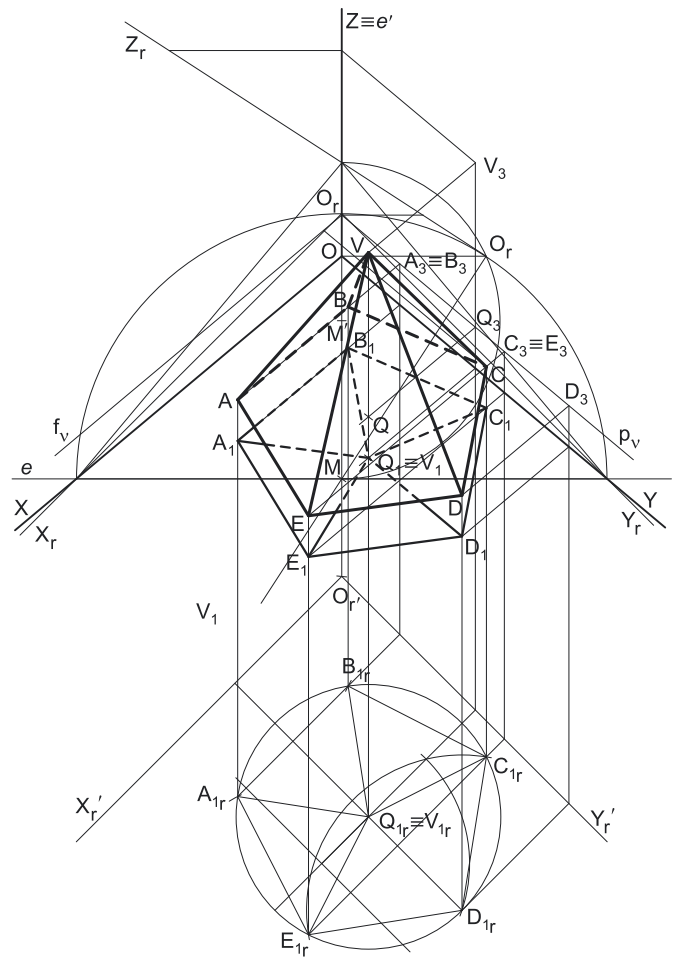
No plano XY rebatido e trasladado, sobre o eixo X_r' , representou-se a **abscissa** do ponto Q (4 cm, em verdadeira grandeza e a partir de O_r') e sobre o eixo Y_r' representou-se o **afastamento** do ponto Q (5 cm, em verdadeira grandeza e a partir de O_r'), o que nos permitiu representar, de imediato, Q_{1r} , que é a projeção horizontal do ponto Q , em rebatimento.

A partir de Q_{1r} , foi possível efetuar a construção da **projeção horizontal do pentágono**, em verdadeira grandeza, de acordo com os dados. Assim, com o compasso, fazendo centro em Q_{1r} e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a circunferência circunscrita à projeção horizontal do pentágono. Em seguida, efetuou-se a construção da projeção horizontal do pentágono, em verdadeira grandeza, inscrito na circunferência e de acordo com os dados. Tendo em conta que o lado de menor afastamento do pentágono (que se considerou ser o lado $[AB]$) é fronto-horizontal, a projeção horizontal desse lado em rebatimento (o segmento $[A_1B_{1r}]$) tem de ser paralelo ao eixo X_r' . A partir desta premissa, concluiu-se a construção da projeção horizontal do pentágono em rebatimento.

Para determinar a perspectiva do pentágono $[ABCDE]$ é necessário inverter o rebatimento.

Representação do plano que contém o pentágono $[ABCDE]$:

No entanto, é necessário determinar a perspectiva da cota do plano v (o plano horizontal que contém a base da pirâmide), que se mede sobre a perspectiva do eixo Z – o eixo Z é o eixo que sofre a redução isolada, pelo que não é possível efetuar o transporte dessa medida a partir de qualquer dos outros dois eixos. Salienta-se que os dois eixos rebatidos (o eixo X e o eixo Y) sofrem a mesma redução, que é diferente da redução do eixo Z . Nesse sentido, é necessário efetuar o rebatimento do eixo Z , para determinar a perspectiva da cota do plano v .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

O rebatimento do eixo **Z** pode processar-se por qualquer um dos três processos estudados – o **rebatimento do plano projetante** do eixo **Z**, o **rebatimento de um plano coordenado** (que contenha o eixo **Z**) ou, ainda, o **método dos cortes**. Optou-se pelo **rebatimento do plano projetante** do eixo **Z**, o que se processou de acordo com o efetuado no exercício **236**. (ver exercício **236**. e respetivo **relatório**).

Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta e'), que é a perspetiva do eixo **Z** – a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo **Z**) com o plano para o qual se processa o rebatimento (o *plano axonométrico*).

O rebatimento do plano projetante do eixo **Z** processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo no ponto **O**, em que um dos lados é a aresta lateral da *pirâmide axonométrica* que está contida no eixo **Z**. Nesse sentido, determinou-se o ponto **M'**, o ponto médio da hipotenusa desse triângulo e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir o triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício **236**. e respetivo **relatório**). Em seguida, conduziu-se uma perpendicular à charneira (reta e') e determinou-se **O_r** (o ponto **O** rebatido) no ponto em que aquela perpendicular à charneira intersesta a semicircunferência. O eixo **Z_r** fica definido por **O_r** e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é um ponto fixo). A semirreta que passa por **O_r** e é perpendicular ao eixo **Z_r** (no ponto **O_r**), e que não se identificou, corresponde à reta de interseção do plano projetante do eixo **Z** com o *plano coordenado XY*.

Em seguida, sobre o eixo **Z_r**, a partir de **O_r** e no sentido positivo do eixo, mediram-se os 2 cm (a cota do plano que contém a base da pirâmide) e transportou-se essa medida para a perspetiva do eixo **Z**, com o recurso a uma perpendicular à charneira. Este procedimento permitiu-nos obter, sobre a perspetiva do eixo **Z**, a perspetiva de um ponto com a cota do plano da base do sólido.

Em seguida, desenharam-se as perspetivas dos traços do plano $v - f_v$ é a perspetiva do traço frontal do plano v (é paralelo à perspetiva do eixo **X**) e p_v é a perspetiva do traço lateral do plano v (e que é paralelo à perspetiva do eixo **Y**).

Determinação da perspetiva do pentágono [ABCDE]:

Para inverter o rebatimento do ponto **A** transportou-se o seu afastamento para o eixo **Y_r'** (a partir de **A_{1r}** e perpendicularmente ao eixo **Y_r'**) e, deste, para a perspetiva de p_v (o traço lateral do plano v), com uma perpendicular à charneira – este procedimento permitiu-nos determinar **A₃** (a perspetiva da projeção lateral do ponto **A**), sobre a perspetiva de p_v . (o ponto **A** pertence ao plano v , que é um plano projetante lateral). Por **A₃** conduziu-se a perspetiva da linha de chamada do ponto **A**, que é fronto-horizontal (e, por isso, paralela à perspetiva do eixo **X**). Em seguida, conduziu-se, por **A_{1r}**, uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto **A**) e determinou-se **A** (a perspetiva propriamente dita do ponto **A**) sobre a perspetiva da sua linha de chamada (que é paralela à perspetiva do eixo **X**). Por fim, determinou-se **A₁** (a perspetiva da projeção horizontal do ponto **A**) – note que não se determinou **A₂** (a perspetiva da projeção frontal do ponto **A**), por ser desnecessária.

A inversão do rebatimento dos pontos **B**, **C**, **D**, **E** e **Q**, bem como a determinação das respetivas perspetivas, processou-se de forma idêntica à exposta para o ponto **A**. A partir das perspetivas dos cinco vértices, desenhou-se a perspetiva do pentágono [ABCDE]. O pentágono [**A₁B₁C₁D₁E₁**] é a perspetiva da projeção horizontal do pentágono [ABCDE].

Determinação da perspetiva da pirâmide:

Tendo em conta que se trata de uma **pirâmide regular**, o seu eixo está contido numa reta ortogonal ao plano da base, ou seja, uma reta vertical (projetante horizontal). Dessa forma, o ponto **Q** (o centro da base) e o ponto **V** (o vértice da pirâmide) têm as suas projeções horizontais coincidentes (em rebatimento e em perspetiva) – tem-se imediatamente **Q_{1r} ≡ V_{1r}**, bem como **Q₁ ≡ V₁**. Por outro lado, a altura de uma pirâmide é a distância do vértice ao plano da base. Assim, como a base da pirâmide tem 2 cm de cota e a sua altura é de 8 cm, o vértice da pirâmide tem 10 cm de cota ($2 + 8 = 10$).

As cotas medem-se no eixo **Z**, cuja perspetiva está deformada. No entanto, já temos o eixo **Z** rebatido, pois foi necessário rebatê-lo para determinar a cota do plano v . Assim, sobre o eixo **Z_r**, a partir de **O_r** e no sentido positivo do eixo, mediram-se os 10 cm (a cota do vértice da pirâmide) e transportou-se essa medida para a perspetiva do eixo **Z**, com o recurso a uma perpendicular à charneira. Este procedimento permitiu-nos obter, sobre a perspetiva do eixo **Z**, um ponto com a cota do vértice do sólido.

Pela perspetiva do ponto do eixo **Z** que tem a cota de **V** conduziu-se uma paralela à perspetiva do eixo **Y**, o que nos permitiu determinar a perspetiva de **V₃** (a projeção lateral de **V**) na perpendicular à charneira que passa por **Q₃** (e que corresponde à linha de chamada do ponto **V** que se situa no plano **YZ**). Por **V₃** conduziu-se a perspetiva da reta projetante lateral do ponto **V** (que é paralela à perspetiva do eixo **X**) e determinou-se o ponto de interseção desta com a perspetiva da reta suporte do eixo da pirâmide (a reta paralela ao eixo **Z** que passa pela perspetiva de **Q**) – esse ponto é a perspetiva do ponto **V**.

Por fim, a partir das perspetivas dos seis vértices da pirâmide, desenhou-se o contorno aparente da perspetiva do sólido, que é a linha fechada [AEDCV]. Existe um único vértice que não integra o contorno aparente da perspetiva do sólido – o vértice **B**.

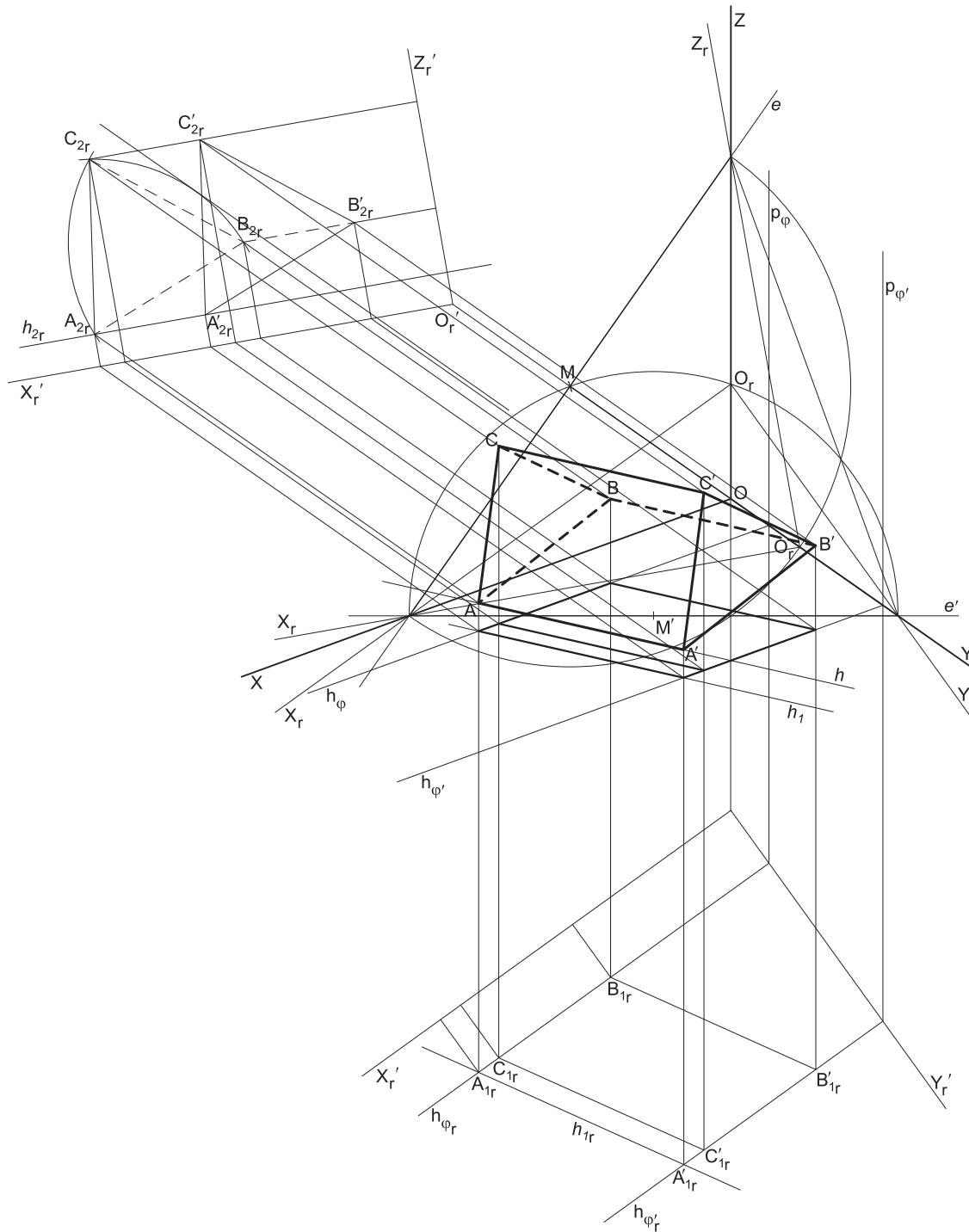
O vértice **B**, por ser o vértice mais distante do observador, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas [AB] e [BC], da base, e a aresta lateral [BV].

A base da pirâmide é **invisível**, bem como as faces laterais [ABV] e [BCV]. As faces laterais [ADV], [CDV] e [BCV] são **visíveis**. Nesse sentido, as arestas laterais [EV] e [DV] são visíveis, pois separam faces visíveis.

Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspetiva da pirâmide representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspetivas dos traços (frontal e lateral) do plano v (o plano que contém a base da pirâmide), no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do rebatimento do *plano coordenado XY* e do plano projetante do eixo **Z**, da translação do plano **XY** rebatido, da construção da projeção horizontal do pentágono em rebatimento ou, ainda, das perpendiculares à charneira e das linhas de chamada), representaram-se a **leve**.

283.

**Dados:**

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados*. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo **Y** faz ângulos iguais (de 125°) com as perspectivas dos outros dois eixos, o eixo **Y** é o eixo que sofre uma redução isolada. A soma dos ângulos que a perspectiva do eixo **Y** faz com as perspectivas dos outros dois eixos é 250° , pelo que as perspectivas dos outros dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Z**) fazem, entre si, um ângulo de 110° ($360^\circ - 250^\circ = 110^\circ$). Em seguida, desenhou-se o *triângulo fundamental*, cujos vértices não se identificaram (recorde que as dimensões do triângulo são arbitrárias).

Resolução:

O plano que contém o triângulo **[ABC]** (um plano frontal) não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que o triângulo **[ABC]** (a base de menor afastamento do prisma) **não se projeta em verdadeira grandeza** (a perspectiva do triângulo não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Tendo em conta que o triângulo está contido num plano frontal (de frente), que é paralelo ao *plano coordenado frontal* (o plano **XZ**), sabe-se que o triângulo se projeta em verdadeira grandeza no *plano coordenado XZ* – o triângulo **[ABC]** e a sua projeção frontal (a sua projeção no *plano coordenado XZ*) são duas figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do **rebatimento do plano coordenado XZ** (o plano no qual o triângulo se projeta em verdadeira grandeza).

O rebatimento do *plano coordenado XZ* pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes**. Optou-se por recorrer ao **método dos cortes**.

Por outro lado, o ângulo que qualquer aresta lateral do prisma faz com o plano **XZ** está contido num plano ortogonal ao plano **XZ** e que contém essa aresta (trata-se do ângulo entre uma reta e um plano), que é um plano horizontal (de nível) – esse plano também não é paralelo ao *plano axonométrico* (o plano de projeção), pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico*, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que esse ângulo está contido num plano horizontal (de nível), que é paralelo ao *plano coordenado horizontal* (o plano **XY**), sabe-se que o ângulo se projeta em verdadeira grandeza no *plano coordenado XY* – o ângulo e a sua projeção horizontal (a sua projeção no *plano coordenado XY*) têm a mesma amplitude. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do **rebatimento do plano coordenado XY** (o plano no qual o ângulo se projeta em verdadeira grandeza). O rebatimento do *plano coordenado XY* pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes**.

Face ao exposto, há que rebater dois *planos coordenados* distintos, ou seja, há que efetuar dois rebatimentos. Exatamente por isso, e porque, nesta situação, é mais conveniente representar previamente o prisma em Dupla Projeção Ortogonal, em rebatimento, vamos recorrer ao **método dos cortes**. Assim, rebatendo os dois *planos coordenados* será possível representar a pirâmide pelas suas duas projeções.

Rebatimento do plano coordenado XZ:

Assim, em primeiro lugar identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XZ*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta suporte do *triângulo fundamental* que se opõe à perspetiva do eixo **Y**.

O rebatimento do *plano coordenado XZ* processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da *pirâmide axonométrica* que está contida no plano **XZ**. Nesse sentido, determinou-se o ponto **M'**, o ponto médio da aresta da base da *pirâmide axonométrica* que está contida na charneira e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício **257**, e respetivo **relatório**). Em seguida, determinou-se **O_r** (o ponto **O** rebatido), sobre a semicircunferência e na perpendicular à charneira que passa por **O** (que é a própria perspetiva do eixo **Y**). O eixo **X_r** fica definido por **O_r** e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é um ponto fixo). O eixo **Z_r** fica definido por **O_r** e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é outro ponto fixo). O eixo **X_r** e o eixo **Z_r** são perpendiculares entre si no ponto **O_r**.

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **XZ** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspetiva do eixo **Y**. O ponto **O_r'** é o ponto **O** rebatido após a translação efetuada. O eixo **X_r'** passa por **O_r'** e é paralelo ao eixo **X_r**. O eixo **Z_r'** passa por **O_r'** e é paralelo ao eixo **Z_r**.

Rebatimento do plano coordenado XY:

Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e'**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XY*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e'**), que é a reta suporte do *triângulo fundamental* que se opõe à perspetiva do eixo **Z**.

O rebatimento do *plano coordenado XY* processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da *pirâmide axonométrica* que está contida no plano **XY**. Nesse sentido, determinou-se o ponto **M**, o ponto médio da aresta da base da *pirâmide axonométrica* que está contida na charneira e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício **245**, e respetivo **relatório**). Em seguida, determinou-se **O_r** (o ponto **O** rebatido), sobre a semicircunferência e na perpendicular à charneira que passa por **O** (que é a própria perspetiva do eixo **Z**). O eixo **X_r** fica definido por **O_r** e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é um ponto fixo). O eixo **Y_r** fica definido por **O_r** e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é outro ponto fixo). O eixo **X_r** e o eixo **Z_r** são perpendiculares entre si no ponto **O_r**.

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **XY** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspetiva do eixo **Z**. O ponto **O_r'** é o ponto **O** rebatido após a translação efetuada. O eixo **X_r'** passa por **O_r'** e é paralelo ao eixo **X_r**. O eixo **Y_r'** passa por **O_r'** e é paralelo ao eixo **Y_r**.

Construção da projeção horizontal do triângulo, em verdadeira grandeza:

No plano **XZ** rebatido e transladado, sobre o eixo **X_r'**, representou-se a **abscissa** do ponto **A** (11 cm, em verdadeira grandeza e a partir de **O_r'**) e sobre o eixo **Z_r'** representou-se a **cota** do ponto **A** (1 cm, em verdadeira grandeza e a partir de **O_r'**), o que nos permitiu representar, de imediato, **A_{2,r}**, que é a projeção frontal do ponto **A**, em rebatimento.

No plano **XZ** rebatido e transladado, sobre o eixo **X_r'**, representou-se a **abscissa** do ponto **B** (6 cm, em verdadeira grandeza e a partir de **O_r'**) e sobre o eixo **Y_r'** representou-se a **cota** do ponto **B** (3 cm, em verdadeira grandeza e a partir de **O_r'**), o que nos permitiu representar, de imediato, **B_{2,r}**, que é a projeção frontal do ponto **B** em rebatimento.

A partir de **A_{2,r}** e de **B_{2,r}**, foi possível efetuar a construção da **projeção frontal do triângulo**, em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar a projeção frontal do terceiro vértice do polígono, em rebatimento (**C_{2,r}**), garantindo-se que o triângulo se situa no espaço do 1^a Triedro.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Representação do prisma em Dupla Projeção Ortogonal, em rebatimento:

O prisma tem 6 cm de altura e a altura de um prisma é a distância entre os planos que contêm as bases. Tendo em conta que a base de menor afastamento (o plano ϕ) tem 2 cm de afastamento (o afastamento dos pontos **A** e **B**, dados no enunciado), o plano da outra base do prisma (o plano ϕ') tem 8 cm de afastamento ($2 + 6 = 8$).

Para construir a projeção horizontal do prisma (em rebatimento), em primeiro lugar representaram-se os traços horizontais dos planos ϕ e ϕ' (os planos que contêm as bases do prisma), em função dos seus afastamentos – h_{ϕ} e $h_{\phi'}$, são os traços horizontais dos planos que contêm as duas bases do sólido, em rebatimento (no rebatimento do plano **XY**).

Em seguida, transportaram-se as abcissas dos vértices do triângulo **[ABC]** para o eixo X_r' (a partir de A_{2r} , B_{2r} e C_{2r} e perpendicularmente ao eixo X_r') – as abcissas foram medidas com o compasso, a partir de O_r' e, em seguida, foram marcadas no eixo X_r' no rebatimento transladado do plano **XY** (o plano coordenado horizontal). Este procedimento permitiu-nos, no rebatimento do plano **XY** (o plano coordenado horizontal), determinar as projeções horizontais daqueles pontos em rebatimento e sobre h_{ϕ_r} (o plano ϕ é um plano projetante horizontal) – A_{1r} , B_{1r} e C_{1r} .

Trata-se de um prisma oblíquo, cujas arestas laterais estão contidas em retas horizontais (de nível) que fazem, com o plano **XZ**, o ângulo dado no enunciado. Nesse sentido, considerou-se que a aresta lateral **[AA']** está contida numa reta **h**. Nesse sentido, conduziu-se, por A_{1r} (a projeção horizontal ponto **A**, em rebatimento), h_{1r} , que é a projeção horizontal da reta **h** (em rebatimento). A reta h_{1r} faz, com o eixo X_r' , um ângulo de 60° de abertura para a direita, conforme o enunciado refere expressamente – h_{1r} está definida por um ponto (A_{1r}) e por uma direção (a direção dada no enunciado). Por fim, determinou-se A'_{1r} (a projeção horizontal do outro extremo da aresta **[AA']**, em rebatimento), sobre h_{1r} , pertencente ao plano ϕ' (o plano que contém a base de maior afastamento do prisma) – A'_{1r} é o ponto de h_{1r} , que se situa sobre h_{ϕ_r} (pois o plano ϕ' é um plano projetante horizontal).

Por B_{1r} e C_{1r} , conduziram-se retas paralelas a h_{1r} – essas retas (que não se identificaram) são as projeções horizontais (em rebatimento) das retas suporte das respetivas arestas laterais do prisma. Em seguida, determinaram-se os pontos de interseção daquelas com h_{ϕ_r} , o que nos permitiu determinar B'_{1r} e C'_{1r} (as projeções horizontais, em rebatimento, dos outros dois vértices da base de maior afastamento). Note que se tratou de um procedimento idêntico ao exposto para a determinação de A'_{1r} . Concluiu-se, assim, a construção da projeção horizontal do prisma, em rebatimento.

Para concluir a construção da projeção frontal do prisma (em rebatimento), há que transportar, para o rebatimento do plano **XZ** (o plano coordenado frontal) as abcissas dos vértices da base de maior afastamento do sólido – os pontos **A'**, **B'** e **C'**.

Assim, transportaram-se as abcissas dos vértices do triângulo **[A'B'C']** para o eixo X_r' (a partir de A'_{1r} , B'_{1r} e C'_{1r} e perpendicularmente ao eixo X_r') – as abcissas foram medidas com o compasso, a partir de O_r' e, em seguida, foram marcadas no eixo X_r' no rebatimento transladado do plano **XZ** (o plano coordenado frontal). Este procedimento permitiu-nos, no rebatimento do plano **XZ** (o plano coordenado frontal), determinar as projeções frontais daqueles pontos em rebatimento (A'_{2r} , B'_{2r} e C'_{2r}), tendo em conta que os vértices da base **[A'B'C']** têm a mesma cota que os vértices da base **[ABC]** (as arestas laterais estão contidas em retas horizontais). Nesse sentido, representou-se h_{2r} , a projeção frontal (em rebatimento) da reta suporte da aresta lateral **[AA']**.

Por fim, a partir das projeções frontais de todos os vértices do prisma (em rebatimento), foi possível desenhar a projeção frontal do prisma (em rebatimento), atendendo às invisibilidades observadas.

Determinação da perspetiva do prisma:

Para inverter o rebatimento do ponto **A** (por exemplo), a partir das suas duas projeções em rebatimento (a projeção horizontal e a projeção frontal), conduziu-se, por A_{2r} , uma perpendicular à charneira do respetivo rebatimento (reta **e**) e, por A_{1r} , uma perpendicular à charneira do respetivo rebatimento (reta **e'**) – o ponto de concorrência das duas retas é a perspetiva propriamente dita do ponto **A**.

A inversão do rebatimento dos outros cinco vértices do prisma (os pontos **B**, **C**, **A'**, **B'** e **C'**), bem como a determinação das respetivas perspetivas processou-se de forma idêntica à exposta para o ponto **A**. Note que não se representaram as perspetivas de nenhuma das projeções de qualquer dos pontos (projeção horizontal, projeção frontal e projeção lateral) pois, na realidade, não são necessárias.

Em seguida, transportaram-se, com o recurso a perpendiculares à charneira, e a partir do eixo Y_r' , os afastamentos dos planos frontais (de frente) que contêm as duas bases do sólido, o que nos permitiu desenhar as perspetivas dos traços (horizontais e laterais) daqueles dois planos.

Por fim, a partir das perspetivas dos seis vértices do prisma, desenhou-se o contorno aparente da perspetiva do sólido, que é a linha fechada **[AA'B'C'C]**. Existe um único vértice que não integra o contorno aparente da perspetiva do sólido – o vértice **B**.

O vértice **B**, por ser o vértice mais distante do observador, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AB]** e **[BC]** (da base **[ABC]**) e a aresta lateral **[BB']**. A base **[ABC]** é invisível, bem como as faces laterais **[AA'B'B]** e **[BB'C'C]**.

A base **[A'B'C']** é visível, bem como a face lateral **[AA'C'C]**, pelo que a aresta **[A'B']** da base **[A'B'C']** é visível (pois separa duas faces visíveis).

Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspetiva do prisma representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspetivas dos traços (horizontais e laterais) dos planos ϕ e ϕ' (os planos que contêm as bases do sólido) representaram-se a **leve** pois, no contexto do exercício, são meramente auxiliares. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso dos rebatimentos do plano coordenado **XY** e do plano coordenado **XZ**, das translações dos planos coordenados rebatidos, da construção das projeções horizontal e frontal do prisma em rebatimento ou, ainda, das perpendiculares à charneira), representaram-se a **leve**.

284.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo Z representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo Z faz um ângulo de 120° com a perspectiva do eixo X e um ângulo de 105° com a perspectiva do eixo Y , as perspectivas destes dois eixos (o eixo X e o eixo Y) fazem, entre si, um ângulo de 135° ($120^\circ + 105^\circ + 135^\circ = 360^\circ$). Em seguida, desenhou-se o *triângulo fundamental*, cujos vértices não se identificaram (recorde que as dimensões do triângulo são arbitrárias).

Resolução:

O plano que contém o quadrado $[ABCD]$ (o plano frontal) não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que o quadrado $[ABCD]$ não se projeta em verdadeira grandeza (a perspectiva do quadrado não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o quadrado está contido num plano frontal (de frente), que é paralelo ao *plano coordenado frontal* (o plano XZ), sabe-se que o quadrado se projeta em verdadeira grandeza no *plano coordenado XZ* – o quadrado $[ABCD]$ e a sua projeção frontal (a sua projeção no *plano coordenado XZ*) são duas figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do **rebatimento do plano coordenado XZ** (o plano no qual o quadrado se projeta em verdadeira grandeza).

O rebatimento do *plano coordenado XZ* pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes**. Optou-se por recorrer ao **método dos cortes**.

Rebatimento do plano coordenado XZ:

Assim, em primeiro lugar identificou-se a charneira do rebatimento (reta e), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XZ*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta e), que é a reta suporte do *triângulo fundamental* que se opõe à perspectiva do eixo Y .

O rebatimento do *plano coordenado XZ* processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da *pirâmide axonométrica* que está contida no plano XZ . Nesse sentido, determinou-se o ponto M , o ponto médio da aresta da base da *pirâmide axonométrica* que está contida na charneira e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 257. e respetivo relatório). Em seguida, determinou-se O_r (o ponto O rebatido), sobre a semicircunferência e na perpendicular à charneira que passa por O (que é a própria perspectiva do eixo Y). O eixo X_r fica definido por O_r e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é um ponto fixo). O eixo Z_r fica definido por O_r e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é outro ponto fixo). O eixo X_r e o eixo Z_r são perpendiculares entre si no ponto O_r .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano XZ rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspectiva do eixo Y . O ponto O_r' é o ponto O rebatido após a translação efetuada. O eixo X_r' passa por O_r' e é paralelo ao eixo X_r . O eixo Z_r' passa por O_r' e é paralelo ao eixo Z_r .

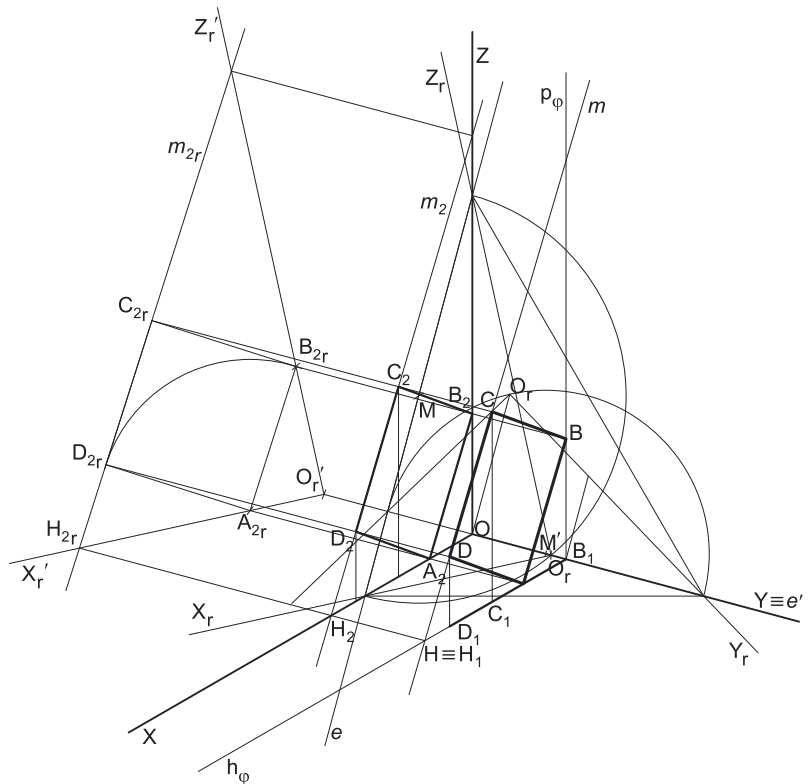
Construção da projeção frontal do quadrado, em verdadeira grandeza:

No plano XZ rebatido e transladado, sobre o eixo X_r' , representou-se a **abscissa** do ponto A (2 cm, em verdadeira grandeza e a partir de O_r'), o que nos permitiu representar A_{2r} , sobre o eixo X_r' – A_{2r} é a projeção frontal do ponto A , em rebatimento (tenha em conta que o ponto A tem cota nula).

Tendo em conta que o quadrado se projeta em verdadeira grandeza no *plano coordenado XZ*, com o compasso, fazendo centro em A_{2r} e com 4 cm de raio (a medida do lado do quadrado), determinou-se B_{2r} (a projeção frontal do ponto B em rebatimento), sobre o eixo Z_r' (garantindo-se que o quadrado se situa no espaço do 1° Diedro) – tenha em conta que o ponto B tem abscissa nula.

A partir de A_{2r} e de B_{2r} , efetuou-se a construção da projeção frontal do quadrado, em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar C_{2r} e D_{2r} (as projeções frontais dos outros dois vértices do quadrado) – o quadrado $[A_{2r}B_{2r}C_{2r}D_{2r}]$ é a projeção frontal do quadrado $[ABCD]$, em verdadeira grandeza (em rebatimento).

Para determinar a perspectiva do quadrado $[ABCD]$ é necessário inverter o rebatimento.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Representação do plano que contém o quadrado [ABCD]:

No entanto, é necessário determinar a perspectiva do afastamento do plano φ (o plano frontal que contém o polígono), que se mede sobre a perspectiva do eixo Y . Uma vez que se trata de uma trimetria, o eixo Y sofre uma redução diferente da redução dos outros dois eixos, pelo que é necessário efetuar o rebatimento do eixo Y , para determinar a perspectiva do afastamento do plano φ .

O rebatimento do eixo Y pode processar-se por qualquer um dos três processos estudados – o **rebatimento do plano projetante** do eixo Y , o **rebatimento de um plano coordenado** (que contenha o eixo Y) ou, ainda, o **método dos cortes**. Optou-se pelo **rebatimento do plano projetante** do eixo Y , o que se processou de acordo com o efetuado no exercício 237. (ver exercício 237. e respetivo relatório).

Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta e'), que é a perspectiva do eixo Y – a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo Y) com o plano para o qual se processa o rebatimento (o plano axonométrico).

O rebatimento do plano projetante do eixo Y processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo no ponto O , em que um dos lados é a aresta lateral da *pirâmide axonométrica* que está contida no eixo Y . Nesse sentido, determinou-se o ponto M' , o ponto médio da hipotenusa desse triângulo e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir o triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 237. e respetivo relatório). Em seguida, conduziu-se uma perpendicular à charneira (reta e') e determinou-se O_r (o ponto O rebatido) no ponto em que aquela perpendicular à charneira interseca a semicircunferência. O eixo Y_r fica definido por O_r e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é um ponto fixo). A semirreta que passa por O_r e é perpendicular ao eixo Y_r (no ponto O_r), e que não se identificou, corresponde à reta de interseção do plano projetante do eixo Y com o plano coordenado XZ .

Em seguida, sobre o eixo Y_r , a partir de O_r e no sentido positivo do eixo, mediram-se os 3 cm (o afastamento do plano que contém o quadrado) e transportou-se essa medida para a perspectiva do eixo Y , com o recurso a uma perpendicular à charneira. Este procedimento permitiu-nos obter, sobre a perspectiva do eixo Y , a perspectiva de um ponto com o afastamento do plano φ .

Em seguida, desenharam-se as perspectivas dos traços do plano φ – h_φ é a perspectiva do traço horizontal do plano φ (é paralelo à perspectiva do eixo X) e p_φ é a perspectiva do traço lateral do plano φ (e que é paralelo à perspectiva do eixo Z).

Determinação da perspectiva do quadrado [ABCD]:

Em seguida, procedeu-se à determinação das perspectivas dos vértices do quadrado. O ponto A tem cota nula e pertence ao plano φ (o plano que contém o quadrado), pelo que o ponto A é um ponto de h_φ (o traço horizontal do plano φ). Assim, por A_{2r} , conduziu-se uma perpendicular à charneira, o que nos permitiu determinar, de forma imediata, A_2 (a perspectiva da projeção frontal do ponto A) sobre a perspectiva do eixo X e A (a perspectiva propriamente dita do ponto A), sobre h_φ (a perspectiva do traço horizontal do plano φ). O ponto A é um ponto do plano XY , pelo que se tem imediatamente $A_1 \equiv A$ (em que A_1 é a perspectiva da projeção horizontal do ponto A).

O ponto B tem abcissa nula e pertence ao plano φ (o plano que contém o quadrado), pelo que o ponto B é um ponto de p_φ (o traço lateral do plano φ). Assim, por B_{2r} , conduziu-se uma perpendicular à charneira, o que nos permitiu determinar, de forma imediata, B_2 (a perspectiva da projeção frontal do ponto B) sobre a perspectiva do eixo Z e B (a perspectiva propriamente dita do ponto B), sobre p_φ (a perspectiva do traço lateral do plano φ). O ponto B é um ponto do plano YZ , pelo que se tem imediatamente $B_3 \equiv B$ (em que B_3 é a perspectiva da projeção lateral do ponto B) – B_1 (a perspectiva da projeção horizontal do ponto B) situa-se na perspectiva do eixo Y .

Para inverter o rebatimento dos pontos C e D recorreu-se a uma reta m , que contém aqueles pontos (é a reta suporte do lado $[CD]$ do quadrado) – a reta m_{2r} é a projeção frontal da reta m , em rebatimento, e passa por C_{2r} e por D_{2r} (a reta m está definida por dois pontos). A reta m_{2r} interseca o eixo X_r no ponto H_{2r} (que é a projeção frontal do traço horizontal da reta m).

Por H_{2r} , conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinaram-se H_2 (a perspectiva da projeção frontal do ponto H) sobre a perspectiva do eixo X e H (a perspectiva propriamente dita do ponto H) sobre h_φ . O ponto H é um ponto do plano XY , pelo que se tem imediatamente $H_1 \equiv H$ (H_1 é a perspectiva da projeção horizontal do ponto H). A reta m , em perspectiva, está definida por um ponto (o ponto H) e por uma direção (é paralela ao lado $[AB]$). Nesse sentido, desenhou-se a perspectiva propriamente dita, a reta m , passando por H e paralela à perspectiva do lado $[AB]$ e desenhou-se também a reta m_2 (a perspectiva da projeção frontal da reta m), passando por H_2 e paralela ao segmento $[A_2B_2]$.

O ponto C é um ponto da reta m – assim, por C_{2r} , conduziu-se uma perpendicular à charneira e determinaram-se C_2 (a perspectiva da projeção frontal do ponto C) sobre m_2 (a perspectiva da projeção frontal da reta m) e C (a perspectiva propriamente dita do ponto C) sobre m (a perspectiva propriamente dita da reta m). O procedimento para inverter o rebatimento do ponto D foi semelhante ao exposto para a inversão do rebatimento do ponto C , pois o ponto D é outro ponto da reta m . Em seguida, determinaram-se as perspectivas das projeções horizontais dos pontos C e D (C_1 e D_1), que se situam sobre h_φ , pois o plano φ é um plano projetante horizontal.

A partir das perspectivas dos quatro vértices do quadrado $[ABCD]$, desenhou-se a perspectiva da figura. Note que não se representaram as projeções laterais dos vértices do quadrado, por não serem necessárias. Por fim, desenharam-se as perspectivas da projeção horizontal e da projeção frontal da figura, atendendo às invisibilidades existentes.

Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo X , eixo Y e eixo Z) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspectiva do quadrado representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspectivas das projeções (horizontal e frontal) do quadrado, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte**. As perspectivas dos traços (horizontal e lateral) do plano φ (o plano que contém a figura), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do rebatimento do plano coordenado XZ , da translação do plano XZ rebatido, da construção da projeção frontal do quadrado em rebatimento, do rebatimento do plano projetante do eixo Z ou, ainda, das perpendiculares à charneira), representaram-se a **leve**.

285.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo **Y** faz um ângulo de 130° com a perspectiva do eixo **Z** e um ângulo de 120° com a perspectiva do eixo **X**, as perspectivas destes dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Z**) fazem, entre si, um ângulo de 110° ($130^\circ + 120^\circ + 110^\circ = 360^\circ$). Em seguida, desenhou-se o *triângulo fundamental*, cujos vértices não se identificaram (recorde que as dimensões do triângulo são arbitrárias).

Resolução:

O plano que contém a base da pirâmide (o plano horizontal) não é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que a base da pirâmide (o quadrado **[ABCD]**) não se projeta em verdadeira grandeza (a perspectiva do quadrado não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o quadrado está contido num plano horizontal (de nível), que é paralelo ao plano coordenado horizontal (o plano **XY**), sabe-se que o quadrado se projeta em verdadeira grandeza no plano coordenado **XY** – o quadrado **[ABCD]** e a sua projeção horizontal (a sua projeção no plano coordenado **XY**) são duas figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do **rebatimento do plano coordenado XY** (o plano no qual o quadrado se projeta em verdadeira grandeza).

O rebatimento do plano coordenado **XY** pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes**. Optou-se por recorrer ao **método dos cortes**.

Rebatimento do plano coordenado **XY**:

Assim, em primeiro lugar identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano coordenado **XY**) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta suporte do *triângulo fundamental* que se opõe à perspectiva do eixo **Z**.

O rebatimento do plano coordenado **XY** processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da *pirâmide axonométrica* que está contida no plano **XY**. Nesse sentido, determinou-se o ponto **M**, o ponto médio da aresta da base da *pirâmide axonométrica* que está contida na charneira e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 249. e respetivo relatório). Em seguida, determinou-se **O_r** (o ponto **O** rebatido), sobre a semicircunferência e na perpendicular à charneira que passa por **O** (que é a própria perspectiva do eixo **Z**). O eixo **X_r** fica definido por **O_r** e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é um ponto fixo). O eixo **Y_r** fica definido por **O_r** e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é outro ponto fixo). O eixo **X_r** e o eixo **Y_r** são perpendiculares entre si no ponto **O_r**.

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **XY** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspectiva do eixo **Z**. O ponto **O_r'** é o ponto **O** rebatido após a translação efetuada. O eixo **X_r'** passa por **O_r'** e é paralelo ao eixo **X_r**. O eixo **Y_r'** passa por **O_r'** e é paralelo ao eixo **Y_r**.

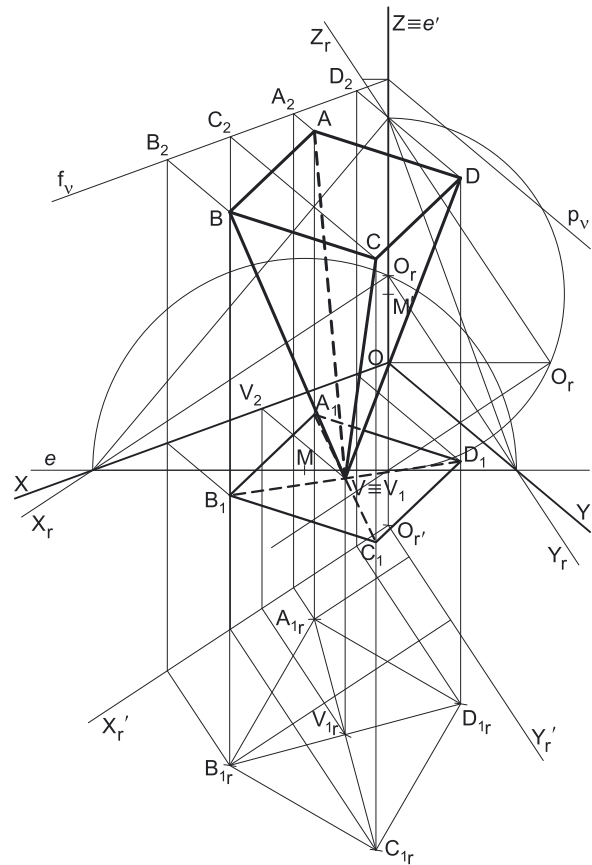
Construção da projeção horizontal da base da pirâmide, em verdadeira grandeza:

No plano **XY** rebatido e transladado, sobre o eixo **X_r'**, representou-se a **abscissa** do ponto **A** (3 cm, em verdadeira grandeza e a partir de **O_r'**) e sobre o eixo **Y_r'** representou-se o **afastamento** do ponto **A** (1 cm, em verdadeira grandeza e a partir de **O_r'**), o que nos permitiu representar, de imediato, **A_{1r}**, que é a projeção horizontal do ponto **A**, em rebatimento.

No plano **XY** rebatido e transladado, sobre o eixo **X_r'**, representou-se a **abscissa** do ponto **B** (7 cm, em verdadeira grandeza e a partir de **O_r'**) e sobre o eixo **Y_r'** representou-se o **afastamento** do ponto **B** (3 cm, em verdadeira grandeza e a partir de **O_r'**), o que nos permitiu representar, de imediato, **B_{1r}**, que é a projeção horizontal do ponto **B**, em rebatimento.

A partir de **A_{1r}** e **B_{1r}**, foi possível efetuar a construção da **projeção horizontal do quadrado**, em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar **C_{1r}** e **D_{1r}** (as projeções horizontais dos outros dois vértice do quadrado) – o quadrado **[A_{1r}B_{1r}C_{1r}D_{1r}]** é a projeção horizontal do quadrado **[ABCD]**, em verdadeira grandeza (em rebatimento).

Para determinar a perspectiva do quadrado **[ABCD]** é necessário inverter o rebatimento.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Representação do plano que contém o quadrado [ABCD]:

No entanto, é necessário determinar a perspectiva da cota do plano v (o plano horizontal que contém a base da pirâmide), que se mede sobre a perspectiva do eixo Z . Uma vez que se trata de uma trimetria, o eixo Z sofre uma redução diferente da redução dos outros dois eixos, pelo que é necessário efetuar o rebatimento do eixo Z , para determinar a perspectiva da cota do plano v .

O rebatimento do eixo Z pode processar-se por qualquer um dos três processos estudados – o **rebatimento do plano projetante** do eixo Z , o **rebatimento de um plano coordenado** (que contenha o eixo Z) ou, ainda, o **método dos cortes**. Optou-se pelo **rebatimento do plano projetante** do eixo Z , o que se processou de acordo com o efetuado no exercício 237. (ver exercício 237. e respetivo relatório).

Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta e'), que é a perspectiva do eixo Z – a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo Z) com o plano para o qual se processa o rebatimento (o plano axonométrico).

O rebatimento do plano projetante do eixo Z processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo no ponto O , em que um dos lados é a aresta lateral da *pirâmide axonométrica* que está contida no eixo Z . Nesse sentido, determinou-se o ponto M' , o ponto médio da hipotenusa desse triângulo e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir o triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 237. e respetivo relatório). Em seguida, conduziu-se uma perpendicular à charneira (reta e') e determinou-se O_r (o ponto O rebatido) no ponto em que aquela perpendicular à charneira interseca a semicircunferência. O eixo Z_r fica definido por O_r e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é um ponto fixo). A semirreta que passa por O_r e é perpendicular ao eixo Z_r (no ponto O_r), e que não se identificou, corresponde à reta de interseção do plano projetante do eixo Z com o plano coordenado XY .

Em seguida, sobre o eixo Z_r , a partir de O_r e no sentido positivo do eixo, mediram-se os 9 cm (a cota do plano que contém a base da pirâmide) e transportou-se essa medida para a perspectiva do eixo Z , com o recurso a uma perpendicular à charneira. Este procedimento permitiu-nos obter, sobre a perspectiva do eixo Z , a perspectiva de um ponto com a cota do plano v .

Em seguida, desenharam-se as perspectivas dos traços do plano v – f_v é a perspectiva do traço frontal do plano v (é paralelo à perspectiva do eixo X) e p_v é a perspectiva do traço lateral do plano v (e que é paralelo à perspectiva do eixo Y).

Determinação da perspectiva do quadrado [ABCD]:

Para inverter o rebatimento do ponto A transportou-se a sua abcissa para o eixo X_r' (a partir de A_{1r} e perpendicularmente ao eixo X_r') e, deste, para a perspectiva de f_v , com uma perpendicular à charneira – este procedimento permitiu-nos determinar A_2 (a perspectiva da projeção frontal do ponto A), sobre a perspectiva do traço frontal do plano v (que é um plano projetante frontal). Por A_2 conduziu-se a perspectiva da linha de chamada do ponto A , que é de topo (e, por isso, paralela à perspectiva do eixo Y). Em seguida, conduziu-se, por A_{1r} , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto A_1) e determinou-se A (a perspectiva propriamente dita do ponto A) sobre a perspectiva da sua linha de chamada. Em seguida, determinou-se, ainda, a perspectiva da projeção horizontal do ponto A – A_1 (que se situa no plano XY).

A inversão do rebatimento dos pontos B , C e D e a determinação das respetivas perspectivas processou-se de forma idêntica à exposta para o ponto A . A partir das perspectivas dos quatro vértices do quadrado [ABCD], desenharam-se a perspectiva da figura. Note que não se representaram as projeções laterais dos vértices do quadrado, por não serem necessárias.

Determinação da perspectiva da pirâmide:

Tendo em conta que se trata de uma **pirâmide regular**, o seu eixo está contido numa reta ortogonal ao plano da base, ou seja, uma reta vertical (projetante horizontal). Dessa forma, o centro da base (que não se identificou) e o ponto V (o vértice da pirâmide) têm as suas projeções horizontais coincidentes (em rebatimento e em perspectiva) – nesse sentido, desenharam-se as diagonais do quadrado [$A_{1r}B_{1r}C_{1r}D_{1r}$] e o seu centro é V_{1r} (a projeção horizontal do ponto V , em rebatimento).

Para determinar as perspectivas do ponto V transportou-se a sua abcissa para o eixo X_r' (a partir de V_{1r} e perpendicularmente ao eixo X_r') e, deste, para a perspectiva do eixo X , com uma perpendicular à charneira – este procedimento permitiu-nos determinar V_2 (a perspectiva da projeção frontal do ponto V), sobre a perspectiva do eixo X (o ponto V tem cota nula). Por V_2 conduziu-se a perspectiva da linha de chamada do ponto V , que é de topo (e, por isso, paralela à perspectiva do eixo Y). Em seguida, conduziu-se, por V_{1r} , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto V_1) e determinou-se V (a perspectiva propriamente dita do ponto V) sobre a perspectiva da sua linha de chamada.

Por fim, a partir das perspectivas dos cinco vértices da pirâmide, desenharam-se o contorno aparente da perspectiva do sólido, que é a linha fechada [ABVD]. Existe um único vértice que não integra o contorno aparente da perspectiva do sólido – o vértice C .

O vértice C , por ser o vértice mais próximo do observador, é **visível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas [BC] e [CD], da base, e a aresta lateral [CV].

A base da pirâmide é **visível**, bem como as faces laterais [BCV] e [CDV]. As faces laterais [ABV] e [ADV] são invisíveis. Nesse sentido, a aresta lateral [AV] é invisível, pois separa duas faces invisíveis.

Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo X , eixo Y e eixo Z) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspectiva da pirâmide representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspectivas dos traços do plano v (o plano que contém a base da pirâmide), no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do rebatimento do plano coordenado XY e do plano projetante do eixo Z , da translação do plano XY rebatido, da construção da projeção horizontal do quadrado em rebatimento ou, ainda, das perpendiculares à charneira e das linhas de chamada), representaram-se a **leve**.

286.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo Z representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo X faz um ângulo de 140° com a perspectiva do eixo Z e um ângulo de 105° com a perspectiva do eixo Y , as perspectivas destes dois eixos (o eixo Y e o eixo Z) fazem, entre si, um ângulo de 115° ($140^\circ + 105^\circ + 115^\circ = 360^\circ$). Em seguida, desenhou-se o *triângulo fundamental*, cujos vértices não se identificaram (recorde que as dimensões do triângulo são arbitrárias).

Resolução:

O plano que contém o hexágono $[ABCDEF]$ (um plano de perfil) não é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que o hexágono $[ABCDEF]$ não se projeta em verdadeira grandeza (a perspectiva do hexágono não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o hexágono está contido num plano de perfil, que é paralelo ao plano coordenado lateral (o plano YZ), sabe-se que o hexágono se projeta em verdadeira grandeza no plano coordenado YZ – o hexágono $[ABCDEF]$ e a sua projeção lateral (a sua projeção no plano coordenado YZ) são duas figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do rebatimento do plano coordenado YZ (o plano no qual o hexágono se projeta em verdadeira grandeza).

O rebatimento do plano coordenado YZ pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo rebatimento dos planos coordenados ou pelo método dos cortes. Optou-se por recorrer ao método dos cortes.

Rebatimento do plano coordenado YZ :

Assim, em primeiro lugar identificou-se a charneira do rebatimento (reta e), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano coordenado YZ) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta e), que é a reta suporte do triângulo fundamental que se opõe à perspectiva do eixo X .

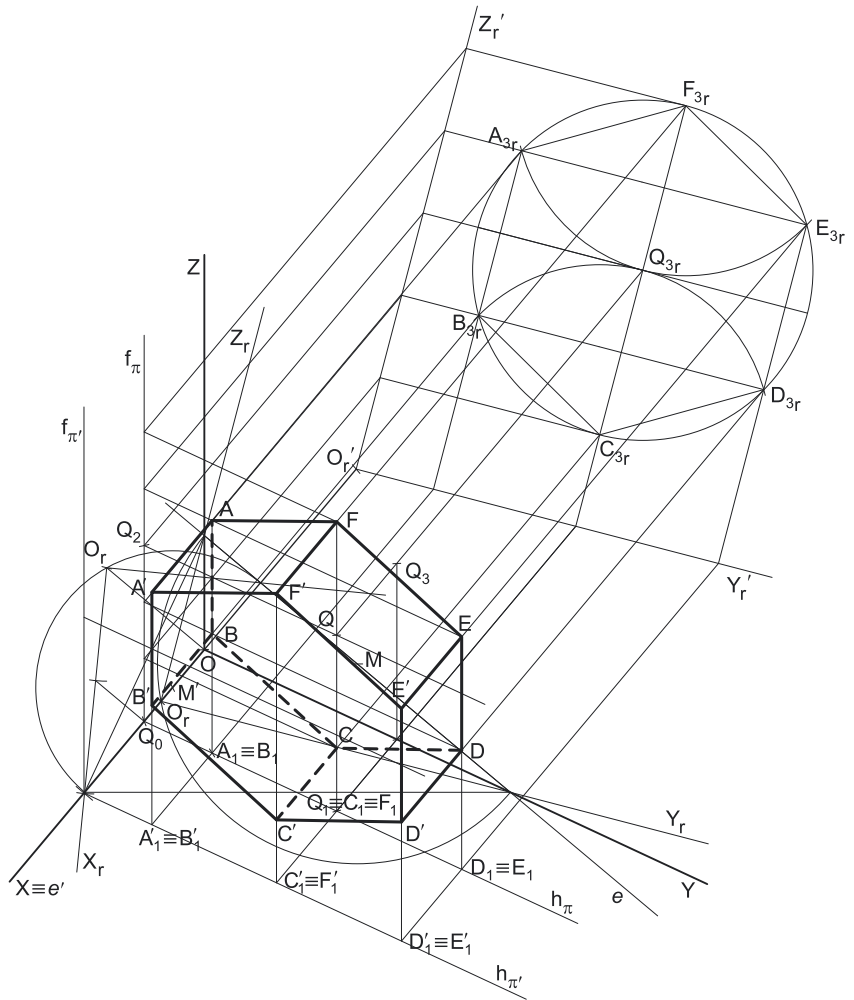
O rebatimento do plano coordenado YZ processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da pirâmide axonométrica que está contida no plano YZ . Nesse sentido, determinou-se o ponto M , o ponto médio da aresta da base da pirâmide axonométrica que está contida na charneira e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 256. e respetivo relatório). Em seguida, determinou-se O_r (o ponto O rebatido), sobre a semicircunferência e na perpendicular à charneira que passa por O (que é a própria perspectiva do eixo X). O eixo Y_r fica definido por O_r e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é um ponto fixo). O eixo Z_r fica definido por O_r e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é outro ponto fixo). O eixo Y_r e o eixo Z_r são perpendiculares entre si no ponto O_r .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano YZ rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspectiva do eixo X . O ponto O_r' é o ponto O rebatido após a translação efetuada. O eixo Y_r' passa por O_r' e é paralelo ao eixo Y_r . O eixo Z_r' passa por O_r' e é paralelo ao eixo Z_r .

Construção da projeção horizontal do hexágono $[ABCDEF]$, em verdadeira grandeza:

No plano XY rebatido e trasladado, sobre o eixo Y_r' , representou-se o afastamento do ponto Q (6 cm, em verdadeira grandeza e a partir de O_r') e sobre o eixo Z_r' representou-se a cota do ponto Q (7 cm, em verdadeira grandeza e a partir de O_r'), o que nos permitiu representar, de imediato, Q_{3r} , que é a projeção lateral do ponto Q , em rebatimento.

A partir de Q_{3r} , foi possível efetuar a construção da projeção lateral do hexágono, em verdadeira grandeza, de acordo com os dados. Assim, com o compasso, fazendo centro em Q_3 e com 4,5 cm de raio, desenhou-se a circunferência circunscrita à projeção lateral do hexágono. Em seguida, efetuou-se a construção da projeção lateral da figura, em verdadeira grandeza e de acordo com os dados – uma vez que o lado $[AB]$ é vertical e é o lado de menor afastamento do polígono, o segmento $[A_3, B_3]$ é paralelo ao eixo Z_r' e é, também, o lado mais próximo do eixo Z_r' . Por outro lado, atendeu-se, ainda, ao facto de A ter cota superior a B .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, construiu-se a projeção lateral do hexágono, o que nos permitiu determinar as projeções laterais dos vértices do polígono (em rebatimento). O hexágono $[A_3, B_3, C_3, D_3, E_3, F_3]$ é a projeção lateral do hexágono $[ABCDEF]$, em verdadeira grandeza (em rebatimento).

Para determinar a perspectiva do hexágono $[ABCDEF]$ é necessário inverter o rebatimento.

Representação dos planos que contêm as bases do prisma:

No entanto, é necessário determinar a perspectiva da abissa do plano π (o plano de perfil que contém a figura), que se mede sobre a perspectiva do eixo X . Uma vez que se trata de uma trimetria, o eixo X sofre uma redução diferente da redução dos outros dois eixos, pelo que é necessário efetuar o rebatimento do eixo X , para determinar a perspectiva da abissa do plano π .

O rebatimento do eixo X pode processar-se por qualquer um dos três processos estudados – o **rebatimento do plano projetante** do eixo X , o **rebatimento de um plano coordenado** (que contenha o eixo X) ou, ainda, o **método dos cortes**. Optou-se pelo **rebatimento do plano projetante** do eixo X , o que se processou de acordo com o efetuado no exercício 237. (ver exercício 237. e respetivo relatório).

Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta e'), que é a perspectiva do eixo X – a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo X) com o plano para o qual se processa o rebatimento (o plano axonométrico).

O rebatimento do plano projetante do eixo X processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo no ponto O , em que um dos lados é a aresta lateral da pirâmide axonométrica que está contida no eixo X . Nesse sentido, determinou-se o ponto M' , o ponto médio da hipotenusa desse triângulo e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir o triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 237. e respetivo relatório). Em seguida, conduziu-se uma perpendicular à charneira (reta e') e determinou-se O_r (o ponto O rebatido) no ponto em que aquela perpendicular à charneira interseca a semicircunferência. O eixo X_r fica definido por O_r e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é um ponto fixo). A semirreta que passa por O_r e é perpendicular ao eixo X_r (no ponto O_r), e que não se identificou, corresponde à reta de interseção do plano projetante do eixo X com o plano coordenado YZ .

Em seguida, sobre o eixo X_r , a partir de O_r e no sentido positivo do eixo, mediram-se os 3 cm (a abscissa do plano que contém o hexágono) e transportou-se essa medida para a perspectiva do eixo X , com o recurso a uma perpendicular à charneira. Este procedimento permitiu-nos obter, sobre a perspectiva do eixo X , a perspectiva de um ponto com a abscissa do plano π . Por fim, desenharam-se as perspectivas dos traços do plano $\pi - f_\pi$ é a perspectiva do traço frontal do plano π (é paralelo à perspectiva do eixo Z) e h_π é a perspectiva do traço horizontal do plano π (e que é paralelo à perspectiva do eixo Y).

Consideremos o plano π como o plano que contém a base de menor abscissa do sólido (o plano que contém o hexágono $[ABCDEF]$) e o plano π' como o plano que contém a outra base do sólido (o hexágono $[A'B'C'D'E'F']$). A altura de um prisma é a distância entre os planos que contêm as duas bases. Uma vez que o plano π tem 3 cm de abscissa (a abscissa do ponto Q) e o prisma tem 3 cm de altura, o plano π' tem 6 cm de abscissa ($3 + 3 = 6$).

Assim, sobre o eixo X_r , a partir de O_r e no sentido positivo do eixo, mediram-se os 6 cm (a abscissa do plano π') e transportou-se essa medida para a perspectiva do eixo X , com o recurso a uma perpendicular à charneira. Este procedimento permitiu-nos obter, sobre a perspectiva do eixo X , a perspectiva de um ponto com a abscissa do plano π' . Em seguida, desenharam-se as perspectivas dos traços do plano $\pi' - f_{\pi'}$ é a perspectiva do traço frontal do plano π' (é paralelo à perspectiva do eixo Z) e $h_{\pi'}$ é a perspectiva do traço horizontal do plano π' (e que é paralelo à perspectiva do eixo Y).

Determinação da perspectiva do hexágono $[ABCDEF]$:

Para inverter o rebatimento do ponto A transportou-se o seu afastamento para o eixo Y_r' (a partir de A_3 , e perpendicularmente ao eixo Y_r') e, deste, para a perspectiva de h_π , com uma perpendicular à charneira – este procedimento permitiu-nos determinar A_1 (a perspectiva da projeção horizontal do ponto A), sobre a perspectiva do traço horizontal do plano π (que é um plano projetante horizontal). Por A_1 conduziu-se a perspectiva da linha de chamada do ponto A , que é vertical (e, por isso, paralela à perspectiva do eixo Z). Em seguida, conduziu-se, por A_3 , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto A_3) e determinou-se A (a perspectiva propriamente dita do ponto A) sobre a perspectiva da sua linha de chamada. Em seguida, determinou-se, ainda, a perspectiva da projeção lateral do ponto $A - A_3$ (que se situa no plano YZ).

A inversão do rebatimento dos restantes vértices do hexágono e do ponto Q , bem como a determinação das respetivas perspectivas processou-se de forma idêntica à exposta para o ponto A . A partir das perspectivas dos seis vértices do hexágono $[ABCDEF]$, desenhou-se a perspectiva da figura. Note que não se representaram as projeções frontais dos vértices do hexágono, por não serem necessárias.

Determinação da perspectiva do prisma:

Tendo em conta que se trata de um **prisma regular**, as suas arestas laterais estão contidas em retas ortogonais aos planos das bases, ou seja, retas fronto-horizontais (retas projetantes laterais). Dessa forma, os vértices da base $[A'B'C'D'E'F']$ têm as suas projeções laterais (que não se identificaram) coincidentes com as projeções laterais dos vértices correspondentes do hexágono $[ABCDEF]$.

Assim, desenhou-se a perspectiva da projeção horizontal da reta projetante lateral do ponto A (na qual se situa igualmente o ponto A') e determinou-se o ponto de interseção com $h_{\pi'}$ (a perspectiva do traço horizontal do plano π'), que é A'_1 (a perspectiva da projeção horizontal do ponto A'). Por A'_1 conduziu-se a perspectiva da linha de chamada do ponto A' , que é vertical (e, por isso, paralela à perspectiva do eixo Z). Em seguida, conduziu-se, por A (a perspectiva propriamente dita do ponto A), a perspectiva da reta projetante lateral do ponto A (que é paralela à perspectiva do eixo X) e determinou-se A' (a perspectiva propriamente dita do ponto A'), sobre a perspectiva da sua linha de chamada.

A determinação das perspectivas dos pontos B' , C' , D' , E' e F' processou-se de forma idêntica à exposta para o ponto A' . A partir das perspectivas dos seis vértices, desenhou-se a perspectiva do hexágono $[A'B'C'D'E'F']$.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por fim, a partir das perspectivas dos doze vértices do prisma, desenhou-se o contorno aparente da perspectiva do sólido, que é a linha fechada **[AA'B'C'D'DEF]**. Existem quatro vértices que não integram o contorno aparente da perspectiva do sólido – os vértices **B, C, E' e F'**.

Os vértices **B e C**, por serem os vértices mais distantes do observador, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[AB]**, **[BC]** e **[CD]** (da base **[ABCDEF]**) e as arestas laterais **[BB']** e **[CC']**. Os vértices **E' e F'**, por serem os vértices mais próximos do observador, são **visíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas **[A'F']**, **[E'F']** e **[D'E']** (da base **[A'B'C'D'E'F']**) e as arestas laterais **[EE']** e **[FF']**.

A base **[ABCDEF]** é **invisível**, bem como as faces laterais **[AA'B'B]**, **[BB'C'C]** e **[CC'D'D]**. A base **[A'B'C'D'E'F']** é **visível**, bem como as faces laterais **[AA'F'F]**, **[EE'F'F]** e **[DD'E'E]**.

Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspectiva do prisma representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspectivas dos traços dos planos π e π' (os planos que contêm as bases do prisma), no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do rebatimento do *plano coordenado YZ* e do plano projetante do eixo **X**, da translação do plano **YZ** rebatido, da construção da projeção lateral do hexágono em rebatimento ou, ainda, das perpendiculares à charneira e das linhas de chamada), representaram-se a **leve**.

287.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos *coordenados*. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo **Z** faz um ângulo de 110° com a perspectiva do eixo **X** e um ângulo de 130° com a perspectiva do eixo **Y**, as perspectivas destes dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Y**) fazem, entre si, um ângulo de 120° ($130^\circ + 110^\circ + 120^\circ = 360^\circ$). Em seguida, desenhou-se o *triângulo fundamental*, cujos vértices não se identificaram (recorde que as dimensões do triângulo são arbitrárias).

Resolução:

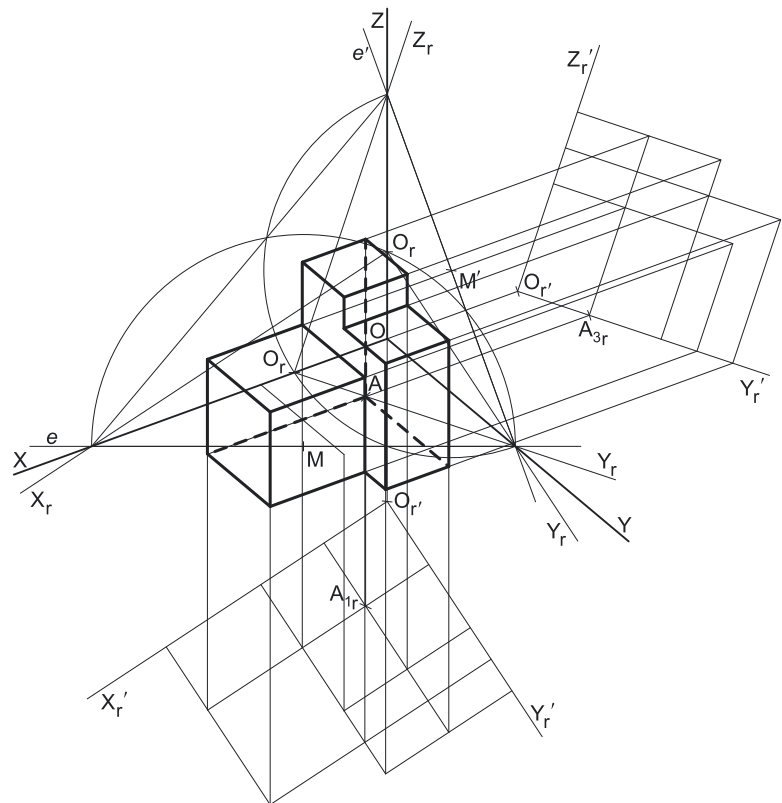
São dadas três vistas do objeto (as suas projeções horizontal, frontal e lateral) a partir das quais se depreende que o objeto tem as suas arestas paralelas aos eixos *coordenados*. Os planos que contêm qualquer destas três projeções (os *planos coordenados*) não são paralelos ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que nenhuma das projeções do objeto se projeta em verdadeira grandeza no plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Nesta situação, é conveniente representar o objeto dado por duas das suas projeções, pelo menos, o que significa ter de rebater dois dos três *planos coordenados* – optou-se por representar previamente o objeto pelas suas projeções horizontal e lateral, pelo que é necessário recorrer ao **rebatimento dos planos coordenados** – o rebatimento do *plano coordenado horizontal* (o plano **XY**) e o rebatimento do *plano coordenado lateral* (o plano **YZ**). O **rebatimento dos planos coordenados** pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes**. Destes dois processos, o mais eficaz (com vista à representação prévia do objeto por duas das suas projeções) é, inquestionavelmente, o **método dos cortes**.

Rebatimento do plano coordenado **XY**:

Assim, em primeiro lugar identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XY*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a reta suporte do *triângulo fundamental* que se opõe à perspectiva do eixo **Z**.

O rebatimento do *plano coordenado XY* processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da *pirâmide axonométrica* que está contida no plano **XY**. Nesse sentido, determinou-se o ponto **M**, o ponto médio da aresta da base da *pirâmide axonométrica* que está contida na charneira e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício **245**, e respetivo **relatório**). Em seguida, determinou-se **O_r** (o ponto **O** rebatido), sobre a semicircunferência e na perpendicular à charneira que passa por **O** (que é a própria perspectiva do eixo **Z**). O eixo **X_r** fica definido por **O_r** e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é um ponto fixo). O eixo **Y_r** fica definido por **O_r** e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é outro ponto fixo). O eixo **X_r** e o eixo **Z_r** são perpendiculares entre si no ponto **O_r**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **XY** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspectiva do eixo **Z**. O ponto O_r' é o ponto **O** rebatido após a translação efetuada. O eixo X_r' passa por O_r' e é paralelo ao eixo X_r . O eixo Y_r' passa por O_r' e é paralelo ao eixo Y_r .

Rebatimento do plano coordenado **YZ**:

Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta e'), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano coordenado **YZ**) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta e'), que é a reta suporte do triângulo fundamental que se opõe à perspectiva do eixo **X**.

O rebatimento do plano coordenado **YZ** processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da pirâmide axonométrica que está contida no plano **YZ**. Nesse sentido, determinou-se o ponto M' , o ponto médio da aresta da base da pirâmide axonométrica que está contida na charneira e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 256. e respetivo **relatório**). Em seguida, determinou-se O_r (o ponto **O** rebatido), sobre a semicircunferência e na perpendicular à charneira que passa por **O** (que é a própria perspectiva do eixo **X**). O eixo Y_r fica definido por O_r e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é um ponto fixo). O eixo Z_r fica definido por O_r e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é outro ponto fixo). O eixo Y_r e o eixo Z_r são perpendiculares entre si no ponto O_r .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **YZ** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspectiva do eixo **X**. O ponto O_r' é o ponto **O** rebatido após a translação efetuada. O eixo Y_r' passa por O_r' e é paralelo ao eixo Y_r . O eixo Z_r' passa por O_r' e é paralelo ao eixo Z_r .

Representação do objeto pelas suas projeções horizontal e lateral, em rebatimento:

No plano **XY** rebatido e transladado, sobre o eixo X_r' , representou-se a **abscissa** do ponto **A** (2 cm, em verdadeira grandeza e a partir de O_r') e sobre o eixo Y_r' representou-se o **afastamento** do ponto **A** (2 cm, em verdadeira grandeza e a partir de O_r'), o que nos permitiu representar, de imediato, A_{1r} , que é a projeção horizontal do ponto **A**, em rebatimento.

Tendo em conta que, a partir das projeções fornecidas, é possível constatar que o objeto tem as suas arestas paralelas aos eixos coordenados, a partir de A_{1r} , reproduziu-se a projeção horizontal fornecida do objeto, com as suas arestas paralelas ao eixo X_r' e ao eixo Y_r' .

No plano **YZ** rebatido e transladado, sobre o eixo Y_r' , representou-se o **afastamento** do ponto **A** (2 cm, em verdadeira grandeza e a partir de O_r'), o que nos permitiu representar A_{3r} , sobre o eixo Y_r' – A_{3r} é a projeção lateral do ponto **A**, em rebatimento (tenha em conta que o ponto **A** tem cota nula).

Tendo em conta que o objeto tem as suas arestas paralelas aos eixos coordenados, a partir de A_{3r} , reproduziu-se a projeção lateral fornecida do objeto, com as suas arestas paralelas ao eixo Y_r' e ao eixo Z_r' .

Determinação da perspectiva do objeto:

Para inverter o rebatimento do ponto **A** (por exemplo), a partir das suas duas projeções em rebatimento (a projeção horizontal e a projeção lateral), conduziu-se, por A_{3r} , uma perpendicular à charneira do respetivo rebatimento (reta e') e, por A_{1r} , uma perpendicular à charneira do respetivo rebatimento (reta e) – o ponto de concorrência das duas retas é a perspectiva propriamente dita do ponto **A**.

A inversão do rebatimento dos restantes vértices do sólido, bem como a determinação das respetivas perspectivas processou-se de forma idêntica à exposta para o ponto **A**. Note que não se representaram as perspectivas de nenhuma das projeções de qualquer dos pontos (projeção horizontal, projeção frontal e projeção lateral) pois, na realidade, não são necessárias.

Por fim, a partir das perspectivas da totalidade dos vértices do sólido, desenhou-se a sua perspectiva, atendendo às invisibilidades. Note que apenas existem arestas a separar faces distintas – tendo em conta que uma aresta é o segmento de reta segundo o qual se interseam duas faces distintas (que estão contidas em planos distintos), na superfície de uma única face, porque está contida num único plano, não existe qualquer aresta «no meio» da face.

Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspectiva do sólido representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso dos rebatimentos do plano coordenado **XY** e do plano coordenado **YZ**, das translações dos planos coordenados rebatidos, da construção das projeções horizontal e lateral do objeto em rebatimento ou, ainda, das perpendiculares à charneira), representaram-se a **leve**.

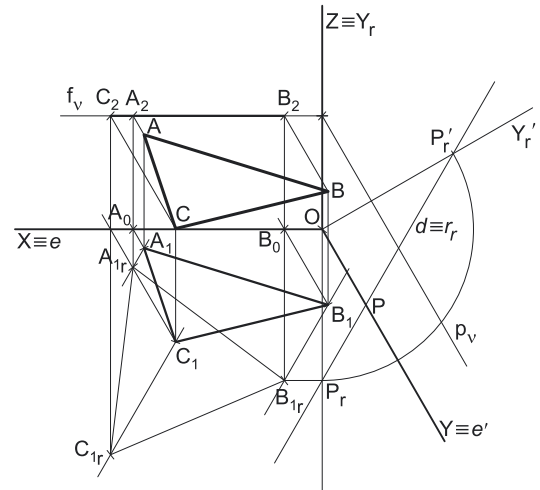
288.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo Z representa-se, convencionalmente, na vertical. Uma vez que os ângulos da direção das projetantes se referem ao eixo X e ao eixo Z , conclui-se que o plano axonométrico é o plano XZ – o eixo X e o eixo Z fazem, entre si, um ângulo de 90° . A perspectiva do eixo Y (o eixo que não está contido no plano axonométrico) faz, com a parte positiva do eixo X um ângulo de 120° (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo Z , um ângulo de 150° (que é outro ângulo obtuso).

Os dados permitiram-nos representar as abscissas do ponto A (5 cm) e do ponto B (1 cm) sobre o eixo X (em verdadeira grandeza), bem como a cota daqueles pontos (3 cm) sobre o eixo Z (também em verdadeira grandeza), o que nos permitiu representar, de imediato, A_2 e B_2 (as projeções frontais dos pontos A e B , respetivamente). Note que o eixo X e o eixo Z estão contidos no plano axonométrico pelo que não apresentam qualquer deformação. Em seguida, desenhou-se f_v , o traço frontal do plano v (o plano horizontal que contém o triângulo) – f_v passa por A_2 e por B_2 , pois o plano v é um plano projetante frontal.

Por fim, representou-se, ainda, a perspectiva do traço lateral do plano v (p_v), que é paralelo à perspectiva do eixo Y .



Resolução:

O plano que contém o triângulo $[ABC]$ (um plano horizontal) não é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que o triângulo $[ABC]$ não se projeta em verdadeira grandeza (a perspectiva do triângulo não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o triângulo está contido num plano horizontal (de nível), que é paralelo ao plano coordenado horizontal (o plano XY), sabe-se que o triângulo se projeta em verdadeira grandeza no plano coordenado XY – o triângulo $[ABC]$ e a sua projeção horizontal (a sua projeção no plano coordenado XY) são duas figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do rebatimento do plano coordenado XY (o plano no qual o triângulo se projeta em verdadeira grandeza).

Rebatimento do plano XY e construção da projeção horizontal do triângulo $[ABC]$, em verdadeira grandeza:

Ao rebater o plano XY sobre o plano axonométrico, a charneira do rebatimento (reta e) é o eixo X , que se identificou imediatamente. O eixo Y rebatido (o eixo Y_r) fica coincidente com o eixo Z , facto que se assinalou devidamente – $Z \equiv Y_r$. O eixo Y_r é o eixo Y rebatido pelo rebatimento do plano XY .

No plano XY rebatido, representaram-se as projeções horizontais dos pontos A e B , em rebatimento, em função dos seus afastamentos. Assim, A_{1r} é a projeção horizontal do ponto A (em rebatimento), situa-se na sua linha de chamada (que passa por A_2 e é perpendicular ao eixo X), 1 cm (o afastamento do ponto A) abaixo do eixo X . De forma semelhante, B_{1r} é a projeção horizontal do ponto B (em rebatimento), situa-se na sua linha de chamada (que passa por B_2 e é perpendicular ao eixo X), 4 cm (o afastamento do ponto B) abaixo do eixo X .

A partir de A_{1r} e B_{1r} , foi possível efetuar a construção da projeção horizontal do triângulo, em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar C_{1r} (a projeção horizontal do terceiro vértice do polígono) – o triângulo $[A_{1r}B_{1r}C_{1r}]$ é a projeção horizontal do triângulo $[ABC]$, em verdadeira grandeza (em rebatimento). Note que se garantiu que o polígono se situa no espaço do 1.º Triedro.

Para determinar a perspectiva do triângulo $[ABC]$ é necessário inverter o rebatimento, o que se processa com o recurso à direção de afinidade (de acordo com o efetuado no exercício 265. – ver exercício 265. e respetivo relatório).

Determinação da direção de afinidade:

Tendo em conta que a direção de afinidade é a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano coordenado XY (nesta situação), a direção de afinidade é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano XY com a sua perspectiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo Y , pois só assim, será possível determinar a direção de afinidade.

Sobre o eixo Y_r representou-se um ponto P_r – o ponto P é um ponto do eixo Y com o afastamento do ponto B ($\overline{OP_r}$ é o afastamento desse ponto P , em verdadeira grandeza, pelo rebatimento do plano XY).

Em seguida, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo Y para o plano axonométrico (o plano XZ), para se determinar a perspectiva do ponto P e, dessa forma, ser possível relacionar o rebatimento do plano XY com a deformação inerente à perspectiva. Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo Y (a reta e'), que é a própria perspectiva do eixo Y . O eixo Y rebatido (o eixo Y_r) fica perpendicular à perspectiva do eixo Y . O ponto O é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio).

A partir do ponto O , sobre o eixo Y_r (e no sentido positivo do eixo), mediu-se $\overline{OP_r}$ (que é o afastamento do ponto P), em verdadeira grandeza, obtendo-se o ponto P_r' – tenha em conta que se tem necessariamente $\overline{OP_r'} = \overline{OP_r}$.

Por P_r' conduziu-se a reta r_r , com a inclinação das projetantes (um ângulo de 60°) – a reta r_r é a reta projetante do ponto P , em rebatimento. O ponto de interseção da reta r_r com a perspectiva do eixo Y é a perspectiva do ponto P (é o vértice do ângulo entre a reta r_r e a perspectiva do eixo Y). \overline{OP} é a perspectiva de $\overline{OP_r'} = \overline{OP_r}$.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano XY com a sua perspectiva – assim, a reta que passa por P_r e pela perspectiva do ponto P (a reta d) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano XY). Salienta-se que, nesta situação particular, a reta d fica coincidente com a reta r_r , mas trata-se de uma **casualidade deste exercício**, em função da direção e da inclinação das projetantes.

Inversão do rebatimento do plano coordenado XY e determinação da perspectiva do triângulo:

As projeções do ponto A (a projeção frontal e a projeção horizontal) são dois extremos da linha de chamada do ponto A – a sua linha de chamada é uma linha quebrada aberta, que tem um extremo em A_1 , outro extremo em A_2 e um vértice no eixo X (em A_0). A parte da linha de chamada do ponto A que está contida no plano XY é o segmento $[A_0A_1]$ – em rebatimento, essa parte da linha de chamada é o segmento $[A_0A_{1r}]$. A perspectiva desse segmento tem um extremo em A_0 e é paralela à perspectiva do eixo Y .

Assim, desenhou-se a reta suporte da perspectiva do segmento de reta $[A_0A_1]$. Em seguida, por A_{1r} conduziu-se uma reta paralela à reta d (a **direção de afinidade**) – o ponto em que esta intersecta a perspectiva da linha de chamada do ponto A (a reta suporte do segmento $[A_0A_1]$) é A_1 (a perspectiva da projeção horizontal do ponto A).

Em seguida, por A_1 (a perspectiva da projeção horizontal do ponto A) conduziu-se a perspectiva da reta projetante horizontal do ponto A , que é vertical (paralela ao eixo Z). Depois, por A_2 (a projeção frontal do ponto A), conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal do ponto A (que é paralela à perspectiva do eixo Y) – o ponto de concorrência das perspectivas das duas retas projetantes é a perspectiva propriamente dita do ponto A .

A determinação das perspectivas dos pontos B e C efetuou-se a partir da repetição do procedimento exposto (para a determinação das perspectivas do ponto A), aplicado a cada uma das situações.

Por fim, desenharam-se as perspectivas do triângulo. O triângulo $[ABC]$ é a perspectiva propriamente dita do triângulo. O triângulo $[A_1B_1C_1]$ é a perspectiva da projeção horizontal do triângulo. O segmento de reta $[B_2C_2]$ é a perspectiva da projeção frontal do triângulo (que se situa sobre f_v , pois o plano v é projetante frontal).

Note que não se determinaram as perspectivas das projeções laterais dos pontos, por estas não serem necessárias.

Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo X , eixo Y e eixo Z) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do triângulo representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspectivas das projeções do triângulo, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte**. As perspectivas dos traços (frontal e lateral) do plano v (o plano que contém a figura), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso da projeção horizontal do triângulo, em rebatimento, do eixo Y_r' , da reta r_r , da direção de afinidade d e, ainda dos traçados referentes à inversão do rebatimento do plano XY), representaram-se a **leve**.

289.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados*. A perspectiva do eixo Z representa-se, convencionalmente, na vertical. Uma vez que os ângulos da direção das projetantes se referem ao eixo Y e ao eixo Z , conclui-se que o *plano axonométrico* é o plano YZ – o eixo Y e o eixo Z fazem, entre si, um ângulo de 90° . A perspectiva do eixo X (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com as partes positivas dos outros dois eixos (o eixo Y e o eixo Z) ângulos de 135° (que são ângulos obtusos).

Os dados permitiram-nos representar o afastamento do ponto Q (3 cm) sobre o eixo Y (em verdadeira grandeza), bem como a cota do ponto Q (4 cm) sobre o eixo Z (também em verdadeira grandeza), o que nos permitiu representar, de imediato, Q_3 (a projeção lateral do ponto Q). Note que o eixo Y e o eixo Z estão contidos no *plano axonométrico* pelo que não apresentam qualquer deformação.

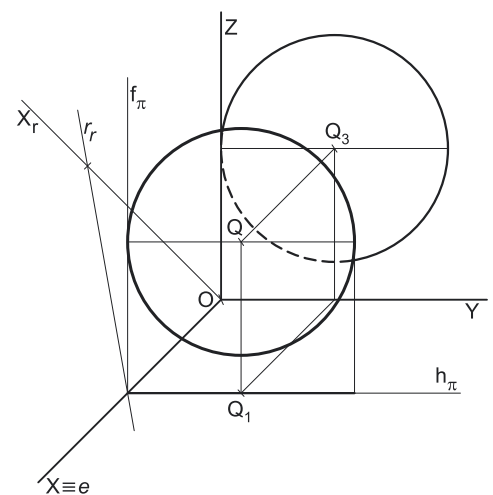
Resolução:

O plano que contém o círculo (um plano de perfil) é paralelo ao plano de projeção (*o plano axonométrico*), pelo que o círculo **projeta-se em verdadeira grandeza** (a perspectiva do círculo está em verdadeira grandeza) – o círculo, a sua perspectiva e a sua projeção lateral são figuras geometricamente iguais.

Assim, com o compasso, fazendo centro em Q_3 (a projeção lateral do ponto Q) e com 3 cm de raio, desenhou-se a circunferência que delimita a projeção lateral do círculo. Para determinar a perspectiva do círculo é necessário, em primeiro lugar, determinar a perspectiva do ponto Q (o seu centro). Para tal é necessário determinar previamente o coeficiente de deformação que afeta o eixo X , de forma a ser possível determinar a perspectiva da abscissa do ponto Q (a única coordenada do ponto que apresenta deformação).

Determinação gráfica do coeficiente de deformação e determinação da perspectiva propriamente dita do ponto Q :

A **abscissa** do ponto Q , porque se mede no eixo X , está afetada pela deformação inerente à projeção do eixo. Para determinar a deformação, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo X para o *plano axonométrico* (o plano YZ). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta e), que é a própria perspectiva do eixo X . O eixo X rebatido (o eixo X_r) fica perpendicular à perspectiva do eixo X . O ponto O é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A partir do ponto O , sobre o eixo X_r (e no sentido positivo do eixo), mediu-se a **abscissa** do ponto Q em verdadeira grandeza (5 cm), obtendo-se um ponto (que não se identificou) – por esse ponto conduziu-se uma reta r_r , com a inclinação das projetantes (um ângulo de 55°). A reta r_r é a reta projetante desse ponto, em rebatimento. O ponto de interseção da reta r_r com a perspectiva do eixo X é o vértice do ângulo entre a reta r_r e a perspectiva do eixo X e é o ponto que nos dá a perspectiva da **abscissa** do ponto Q (sobre a perspectiva do eixo X).

Por esse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano π (o plano que contém o círculo) – f_π é a perspectiva do traço frontal do plano π (é paralelo ao eixo Z) e h_π é a perspectiva do traço horizontal do plano π (é paralelo ao eixo Y).

As projeções do ponto Q (a projeção lateral e a projeção horizontal) são dois extremos da linha de chamada do ponto Q , que é uma linha quebrada aberta, com um extremo em Q_1 , outro extremo em Q_3 e um vértice no eixo Y . A parte da linha de chamada do ponto Q que está contida no plano XY é paralela ao eixo X pelo que, em perspectiva, essa parte da linha de chamada é também paralela à perspectiva do eixo X . Assim, a partir do ponto do eixo Y que pertence à linha de chamada do ponto Q desenhou-se a perspectiva da parte que se situa no plano XY (e que é paralela à perspectiva do eixo X), o que nos permitiu determinar Q_1 (a perspectiva da projeção horizontal do ponto Q), sobre a perspectiva de h_π (pois o plano π é projetante horizontal).

Em seguida, por Q_1 (a perspectiva da projeção horizontal do ponto Q) conduziu-se a perspectiva da reta projetante horizontal do ponto Q , que é vertical (paralela ao eixo Z). Depois, por Q_3 (a projeção lateral do ponto Q), conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral do ponto Q (que é paralela à perspectiva do eixo X) – o ponto de concorrência das perspectivas das duas retas projetantes é a perspectiva propriamente dita do ponto Q .

Note que não se determinou a perspectiva da projeção frontal do ponto Q , por não ser necessária.

Determinação das perspectivas do círculo:

Atendendo a que o plano π (o plano que contém o círculo) é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), e como atrás se referiu, o círculo projeta-se em verdadeira grandeza no plano axonométrico (o plano YZ). Assim, com o compasso, fazendo centro em Q (a perspectiva propriamente dita do ponto Q) e com 3 cm de raio, desenhou-se a perspectiva propriamente dita do círculo, em verdadeira grandeza.

Por fim, desenharam-se, também, as perspectivas da projeção horizontal da figura (que é um segmento de reta sobre a perspectiva de h_π) e da sua projeção lateral (que é um círculo que se havia desenhado previamente), atendendo às invisibilidades verificadas.

Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo X , eixo Y e eixo Z) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do círculo representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspectivas das projeções (horizontal e lateral) do círculo, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte**. As perspectivas dos traços (frontal e horizontal) do plano π (o plano que contém a figura), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do eixo X_r e da reta r_r), representaram-se a **leve**.

290.

Dados:

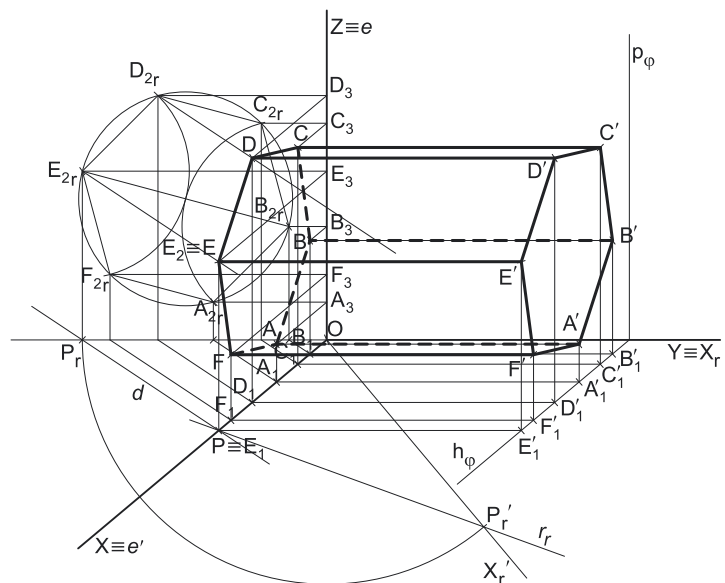
Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo Z representa-se, convencionalmente, na vertical. Uma vez que os ângulos da direção das projetantes se referem ao eixo Y e ao eixo Z , conclui-se que o plano axonométrico é o plano YZ – o eixo Y e o eixo Z fazem, entre si, um ângulo de 90° . A perspectiva do eixo X (o eixo que não está contido no plano axonométrico) faz, com a parte positiva do eixo Y um ângulo de 140° (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo Z , um ângulo de 130° (que é outro ângulo obtuso).

Os dados permitiram-nos representar as cotas do ponto A (1 cm) e do ponto B (3 cm) sobre o eixo Z (em verdadeira grandeza), bem como o afastamento daqueles pontos (0 cm), o que nos permitiu representar, de imediato, A_3 e B_3 (as projeções laterais dos pontos A e B , respetivamente). Note que o eixo Y e o eixo Z estão contidos no plano axonométrico pelo que não apresentam qualquer deformação.

Resolução:

O hexágono $[ABCDEF]$ está contido no plano coordenado XZ , que não é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico – o plano YZ), pelo que o hexágono $[ABCDEF]$ não se projeta em verdadeira grandeza (a perspectiva do hexágono não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o hexágono está contido no próprio plano XZ (o plano coordenado frontal), sabe-se que o hexágono está em verdadeira grandeza no plano coordenado XZ . Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do **rebatimento do plano coordenado XZ** (o plano no qual o hexágono está em verdadeira grandeza).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Rebatimento do plano XZ e construção da projeção horizontal do hexágono [ABCDEF], em verdadeira grandeza:

Ao rebater o plano XZ sobre o plano axonométrico, a charneira do rebatimento (reta e) é o eixo Z, que se identificou imediatamente. O eixo X rebatido (o eixo X_r) fica coincidente com o eixo Y, facto que se assinalou devidamente – $Y \equiv X_r$. O eixo X_r é o eixo X rebatido pelo rebatimento do plano XZ.

No plano XZ rebatido, representaram-se as projeções frontais dos pontos A e B, em rebatimento, em função das suas abcissas. Assim, A_{2r} é a projeção frontal do ponto A (em rebatimento), situa-se na sua linha de chamada (que passa por A_3 e é perpendicular ao eixo Z), 3 cm (a abcissa do ponto A) para a esquerda do eixo Z. De forma semelhante, B_{2r} é a projeção frontal do ponto B (em rebatimento), situa-se na sua linha de chamada (que passa por B_3 e é perpendicular ao eixo Z), 1 cm (a abcissa do ponto B) para a esquerda do eixo Z.

A partir de A_{2r} e B_{2r} , foi possível efetuar a construção da **projeção frontal do hexágono**, em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar as projeções frontais dos restantes vértices do polígono – o hexágono [$A_{2r}B_{2r}C_{2r}D_{2r}E_{2r}F_{2r}$] é a projeção frontal do hexágono [ABCDEF], em verdadeira grandeza (em rebatimento). Note que se garantiu que o polígono se situa no espaço do 1º Triedro.

Para determinar a perspetiva do hexágono [ABCDEF] é necessário inverter o rebatimento, o que se processa com o recurso à **direção de afinidade**.

Determinação da direção de afinidade:

Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano coordenado XZ (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano XZ com a sua perspetiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo X, pois só assim será possível determinar a **direção de afinidade**.

Sobre o eixo X_r representou-se um ponto P_r – o ponto P é um ponto do eixo X com a abcissa do ponto E ($\overline{OP_r}$ é a abcissa desse ponto P, em verdadeira grandeza, pelo rebatimento do plano XZ).

Em seguida, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo X para o plano axonométrico (o plano YZ), para se determinar a perspetiva do ponto P e, dessa forma, ser possível relacionar o rebatimento do plano XZ com a deformação inerente à perspetiva. Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo X (a reta e'), que é a própria perspetiva do eixo X. O eixo X rebatido (o eixo X_r') fica perpendicular à perspetiva do eixo X. O ponto O é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio).

A partir do ponto O, sobre o eixo X_r' (e no sentido positivo do eixo), mediu-se $\overline{OP_r}$ (que é a **abcissa** do ponto P), em verdadeira grandeza, obtendo-se o ponto P_r' – tenha em conta que se tem necessariamente $\overline{OP_r'} = \overline{OP_r}$.

Por P_r' conduziu-se a reta r_r , com a inclinação das projetantes (um ângulo de 60°) – a reta r_r é a reta projetante do ponto P, em rebatimento. O ponto de interseção da reta r_r com a perspetiva do eixo X é a perspetiva do ponto P (é o vértice do ângulo entre a reta r_r e a perspetiva do eixo X). \overline{OP} é a perspetiva de $\overline{OP_r'} = \overline{OP_r}$.

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano XZ com a sua perspetiva – assim, a reta que passa por P_r e pela perspetiva do ponto P (a reta d) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano XZ).

Inversão do rebatimento do plano coordenado XZ e determinação da perspetiva do hexágono:

As projeções do ponto E (a projeção frontal e a projeção lateral) são dois extremos da linha de chamada do ponto E – **nesta situação**, a sua linha de chamada é um segmento de reta que tem um extremo em E_3 e outro extremo em E_2 e que é paralela ao eixo X. Em rebatimento (no plano XZ rebatido), essa linha de chamada tem um extremo em E_{2r} , é paralela ao eixo X_r e tem o outro extremo (E_3) no eixo Z (E_3 é a projeção lateral do ponto E e situa-se no eixo Z, pois E tem afastamento nulo). Assim, conduziu-se, por E_{2r} , a linha de chamada do ponto E e determinou-se E_3 (a projeção lateral do ponto E).

A perspetiva da linha de chamada do ponto E tem um extremo em E_3 e é paralela à perspetiva do eixo X. Assim, desenhou-se a reta suporte da perspetiva da linha de chamada do ponto E. Em seguida, por E_{2r} , conduziu-se uma reta paralela à reta d (a **direção de afinidade**) – o ponto em que esta intersesta a perspetiva da linha de chamada do ponto E é E_2 (a perspetiva da projeção frontal do ponto E). O ponto E tem afastamento nulo (é um ponto do plano XZ), pelo que se tem imediatamente $E_2 \equiv E$ (sendo E a perspetiva propriamente dita do ponto E). E_1 (a perspetiva da projeção horizontal do ponto E) situa-se sobre a perspetiva do eixo X.

A determinação das perspetivas dos restantes vértices do hexágono efetuou-se a partir da repetição do procedimento exposto (para a determinação das perspetivas do ponto E), aplicado a cada uma das situações. No entanto, optou-se por omitir a identificação das perspetivas das projeções frontais dos outros vértices do hexágono [ABCDEF], com vista a não sobrecarregar em demasia a resolução gráfica, com excesso de notações.

Por fim, desenharam-se as perspetivas do hexágono. O hexágono [ABCDEF] é a perspetiva propriamente dita do hexágono. O segmento de reta [E_1B_1] é a perspetiva da projeção horizontal do hexágono, que se situa sobre a perspetiva do eixo X.

Determinação da perspetiva do prisma:

A altura de um prisma é a distância entre os planos que contêm as duas bases. O plano que contém a base [ABCDEF] (a base de menor afastamento) do prisma é o plano XZ, que é um plano frontal (de frente) com afastamento nulo. Uma vez que o prisma tem 8 cm de altura, o plano ϕ (o plano que contém a base de maior afastamento do prisma – o hexágono [$A'B'C'D'E'F'$]) tem necessariamente 8 cm de afastamento ($0 + 8 = 8$).

Assim, no eixo Y e em verdadeira grandeza, mediu-se o afastamento do plano ϕ e representou-se o plano pelos seus traços – h_ϕ é a perspetiva do traço horizontal do plano ϕ (é paralelo à perspetiva do eixo X) e p_ϕ é a perspetiva do traço lateral do plano ϕ (é paralelo ao eixo Z).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Tendo em conta que se trata de um **prisma regular**, as suas arestas laterais estão contidas em retas ortogonais aos planos das bases, ou seja, retas de topo (retas projetantes frontais). Dessa forma, os vértices da base $[A'B'C'D'E'F']$ têm as suas projeções frontais (que não se identificaram) coincidentes com as projeções frontais dos vértices correspondentes do hexágono $[ABCDEF]$.

Assim, desenhou-se a perspectiva da projeção horizontal da reta projetante lateral do ponto E (na qual se situa igualmente o ponto E') e determinou-se o ponto de interseção com h_ϕ (a perspectiva do traço horizontal do plano ϕ), que é E'_1 (a perspectiva da projeção horizontal do ponto E'). Por E'_1 conduziu-se a perspectiva da linha de chamada do ponto E' , que é vertical (e, por isso, paralela ao eixo Z). Em seguida, conduziu-se, por E (a perspectiva propriamente dita do ponto E) a perspectiva da reta projetante frontal do ponto E (que é paralela ao eixo Y) e determinou-se E' (a perspectiva propriamente dita do ponto E'), sobre a perspectiva da sua linha de chamada.

A determinação das perspectivas dos pontos A' , B' , C' , D' e F' processou-se de forma idêntica à exposta para o ponto E' . A partir das perspectivas dos seis vértices, desenhou-se a perspectiva do hexágono $[A'B'C'D'E'F']$.

Por fim, a partir das perspectivas dos doze vértices do prisma, desenhou-se o contorno aparente da perspectiva do sólido, que é a linha fechada $[CDEFF'A'B'C']$. Existem quatro vértices que não integram o contorno aparente da perspectiva do sólido – os vértices A , B , D' e E' .

Os vértices A e B , por serem os vértices mais distantes do observador, são **invisíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas $[AB]$, $[BC]$ e $[AF]$ (da base $[ABCDEF]$) e as arestas laterais $[AA']$ e $[BB']$. Os vértices D' e E' , por serem os vértices mais próximos do observador, são **visíveis**, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas $[C'D']$, $[D'E']$ e $[E'F']$ (da base $[A'B'C'D'E'F']$) e as arestas laterais $[DD']$ e $[FF']$.

A base $[ABCDEF]$ é **invisível**, bem como as faces laterais $[AA'F'F]$, $[AA'B'B]$ e $[BB'C'C]$. A base $[A'B'C'D'E'F']$ é **visível**, bem como as faces laterais $[CC'D'D]$, $[DD'E'E]$ e $[EE'F'F]$.

Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo X , eixo Y e eixo Z) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do prisma representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspectivas dos traços (horizontal e lateral) do plano ϕ (o plano que contém a base de maior afastamento do prisma), no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso da projeção frontal do hexágono, em rebatimento, do eixo X_r' , da reta r_r , da direção de afinidade d e, ainda dos traçados referentes à inversão do rebatimento do plano XZ), representaram-se a **leve**.

291.

Dados:

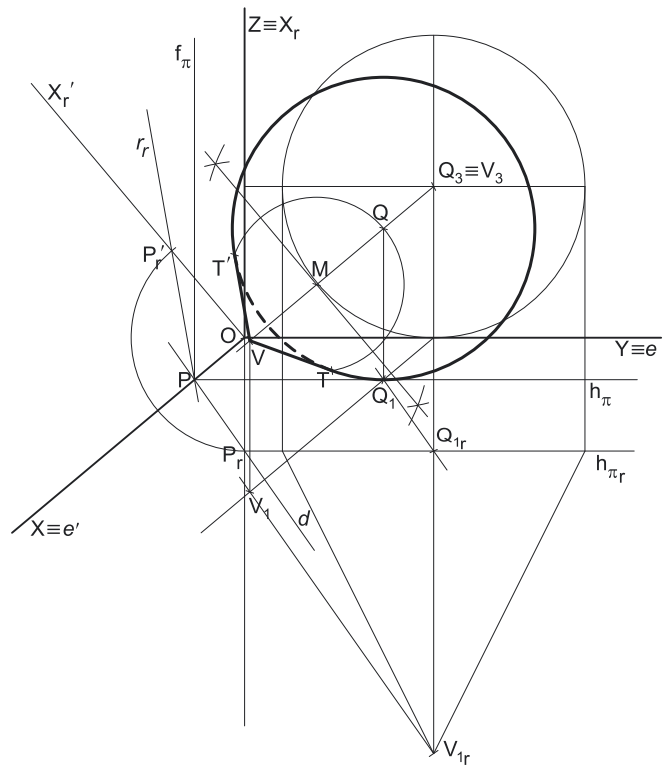
Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos *coordenados*. A perspectiva do eixo Z representa-se, convencionalmente, na vertical. Uma vez que os ângulos da direção das projetantes se referem ao eixo Y e ao eixo Z , conclui-se que o *plano axonométrico* é o plano YZ – o eixo Y e o eixo Z fazem, entre si, um ângulo de 90° . A perspectiva do eixo X (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com a parte positiva do eixo Y um ângulo de 140° (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo Z , um ângulo de 130° (que é outro ângulo obtuso).

Os dados permitiram-nos representar o afastamento do ponto Q (5 cm) sobre o eixo Y (em verdadeira grandeza), bem como a cota do ponto Q (4 cm) sobre o eixo Z (também em verdadeira grandeza), o que nos permitiu representar, de imediato, Q_3 (a projeção lateral do ponto Q). Note que o eixo Y e o eixo Z estão contidos no *plano axonométrico* pelo que não apresentam qualquer deformação.

Resolução:

O plano que contém a base do cone (um plano de perfil) é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que o círculo (a base do sólido) **projeta-se em verdadeira grandeza** (a perspectiva do círculo está em verdadeira grandeza) – o círculo, a sua perspectiva e a sua projeção lateral são figuras geometricamente iguais.

Assim, com o compasso, fazendo centro em Q_3 (a projeção lateral do ponto Q) e com 4 cm de raio, desenhou-se a circunferência que delimita a projeção lateral da base do cone. Para determinar a perspectiva do círculo (e do cone) é necessário, em primeiro lugar, determinar a perspectiva do ponto Q (o seu centro). Para tal é necessário determinar previamente o coeficiente de deformação que afeta o eixo X , de forma a ser possível determinar a perspectiva da abscissa do ponto Q (a única coordenada do ponto que apresenta deformação).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por outro lado, tendo em conta que há, ainda, que determinar a perspectiva do ponto **V** (o vértice do cone) de forma a ser possível construir a perspectiva do sólido, optou-se por representar previamente o cone em Dupla Projeção Ortogonal – a sua projeção lateral e a sua projeção horizontal. Para tal, é necessário efetuar o rebatimento do plano **XY**.

No entanto, e porque se trata de um **cone de revolução** (um **cone reto**), o seu eixo está contido numa reta ortogonal ao plano da base (o plano π) – assim, o eixo do cone está contido numa reta fronto-horizontal (uma reta projetante lateral), pelo que se tem imediatamente $V_3 \equiv Q_3$.

Rebatimento do plano XY e construção da projeção horizontal do cone, em rebatimento:

Ao rebater o plano **XY** sobre o plano *axonométrico*, a charneira do rebatimento (reta **e**) é o eixo **Y**, que se identificou imediatamente. O eixo **X** rebatido (o eixo X_r) fica coincidente com o eixo **Z**, facto que se assinalou devidamente – $Z \equiv X_r$. O eixo X_r é o eixo **X** rebatido pelo rebatimento do plano **XY**.

No plano **XY** rebatido, representou-se a projeção horizontal do ponto **Q**, em rebatimento, em função da sua abcissa. Assim, Q_{1r} é a projeção horizontal do ponto **Q** (em rebatimento), situa-se na sua linha de chamada (que passa por Q_3 e é perpendicular ao eixo **Y**), 3 cm (a abcissa do ponto **Q**) abaixo do eixo **Y**. Por Q_{1r} conduziu-se $h_{\pi r}$, paralelamente ao eixo **Y** – $h_{\pi r}$ é o traço horizontal do plano π (o plano que contém a base do cone) em rebatimento. Salienta-se que o plano π é projetante horizontal, pelo que $h_{\pi r}$ passa necessariamente por Q_1 .

O cone tem 8 cm de altura e a altura de um cone é a distância do vértice ao plano da base. Tendo em conta que a base tem 3 cm de abcissa, o vértice do cone tem 11 cm de abcissa ($3 + 8 = 11$). Assim, no plano **XY** rebatido, representou-se a projeção horizontal do ponto **V**, em rebatimento, em função da sua abcissa. Assim, V_{1r} é a projeção horizontal do ponto **V** (em rebatimento), situa-se na sua linha de chamada (que passa por V_3 e é perpendicular ao eixo **Y**), 11 cm (a abcissa do ponto **V**) abaixo do eixo **Y**.

Para determinar as perspectivas dos pontos **V** e **Q** e, conseqüentemente, desenhar a perspectiva do cone, é necessário inverter o rebatimento, o que se processa com o recurso à **direção de afinidade**.

Determinação da direção de afinidade:

Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano coordenado **XY** (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano **XY** com a sua perspectiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo **X**, pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade**.

Sobre o eixo X_r representou-se um ponto P_r – o ponto **P** é um ponto do eixo **X** com a abcissa do ponto **Q** ($\overline{OP_r}$ é a abcissa desse ponto **P**, em verdadeira grandeza, pelo rebatimento do plano **XY**).

Em seguida, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo **X** para o plano *axonométrico* (o plano **YZ**), para se determinar a perspectiva do ponto **P** e, dessa forma, ser possível relacionar o rebatimento do plano **XY** com a deformação inerente à perspectiva. Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo **X** (a reta **e'**), que é a própria perspectiva do eixo **X**. O eixo **X** rebatido (o eixo X_r') fica perpendicular à perspectiva do eixo **X**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio).

A partir do ponto **O**, sobre o eixo X_r' (e no sentido positivo do eixo), mediu-se $\overline{OP_r}$ (que é a **abcissa** do ponto **P**), em verdadeira grandeza, obtendo-se o ponto P_r' – tenha em conta que se tem necessariamente $\overline{OP_r'} = \overline{OP_r}$.

Por P_r' conduziu-se a reta r_r , com a inclinação das projetantes (um ângulo de 60°) – a reta r_r é a reta projetante do ponto **P**, em rebatimento. O ponto de interseção da reta r_r com a perspectiva do eixo **X** é a perspectiva do ponto **P** (é o vértice do ângulo entre a reta r_r e a perspectiva do eixo **X**). \overline{OP} é a perspectiva de $\overline{OP_r'} = \overline{OP_r}$.

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano **XY** com a sua perspectiva – assim, a reta que passa por P_r e pela perspectiva do ponto **P** (a reta **d**) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano **XY**).

Inversão do rebatimento do plano coordenado XY e determinação das perspectivas dos pontos Q e V:

O ponto **P** é o ponto do eixo **X** que tem a abcissa do ponto **Q** (e do plano π). Assim, pela perspectiva do ponto **P** conduziram-se as perspectivas dos traços do plano π (o plano que contém o círculo) – f_{π} é a perspectiva do traço frontal do plano π (é paralelo ao eixo **Z**) e h_{π} é a perspectiva do traço horizontal do plano π (é paralelo ao eixo **Y**).

As projeções do ponto **Q** (a projeção lateral e a projeção horizontal) são dois extremos da linha de chamada do ponto **Q**, que é uma linha quebrada aberta, com um extremo em Q_1 , outro extremo em Q_3 e um vértice no eixo **Y**. A parte da linha de chamada do ponto **Q** que está contida no plano **XY** é paralela ao eixo **X** pelo que, em perspectiva, essa parte da linha de chamada é também paralela à perspectiva do eixo **X**. Assim, a partir do ponto do eixo **Y** que pertence à linha de chamada do ponto **Q** desenhou-se a perspectiva da parte que se situa no plano **XY** (e que é paralela à perspectiva do eixo **X**), o que nos permitiu determinar Q_1 (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **Q**), sobre a perspectiva de h_{π} (pois o plano π é projetante horizontal).

Note que a reta que passa por Q_{1r} e pela perspectiva de Q_1 é paralela à direção de afinidade **d**.

Em seguida, por Q_1 (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **Q**) conduziu-se a perspectiva da reta projetante horizontal do ponto **Q**, que é vertical (paralela ao eixo **Z**). Depois, por Q_3 (a projeção lateral do ponto **Q**), conduziu-se a perspectiva da reta projetante lateral do ponto **Q** (que é paralela à perspectiva do eixo **X**) – o ponto de concorrência das perspectivas das duas retas projetantes é a perspectiva propriamente dita do ponto **Q**.

A perspectiva da linha de chamada do ponto **V** é, na prática, o prolongamento da linha de chamada do ponto **Q**. Assim, por V_{1r} conduziu-se uma reta paralela à direção de afinidade e determinou-se V_1 (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **V**), sobre a perspectiva da sua linha de chamada. A perspectiva propriamente dita do ponto **V** é o ponto de concorrência das perspectivas das suas retas projetantes (projetante horizontal e projetante lateral), à semelhança do exposto para a determinação da perspectiva do ponto **Q**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Determinação da perspectiva do cone:

Atendendo a que o plano π (o plano que contém a base do cone) é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), e como atrás se referiu, o círculo projetava-se em verdadeira grandeza no plano axonométrico (o plano YZ). Assim, com o compasso, fazendo centro em Q (a perspectiva propriamente dita do ponto Q) e com 4 cm de raio, desenhou-se a perspectiva propriamente dita da base do cone, em verdadeira grandeza.

A perspectiva do cone é limitada pelas geratrizes do contorno aparente da perspectiva do sólido, que se determinam com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência que delimita a base do cone) que passam por um ponto exterior (a perspectiva do ponto V).

Assim, determinou-se o ponto M , o ponto médio do segmento $[QV]$ (com o recurso à mediatriz do segmento) e, com o compasso, fazendo centro no ponto M e com raio até ao ponto Q , desenhou-se um arco de circunferência – os pontos em que o arco corta a circunferência são os pontos T e T' . Os pontos T e T' são os pontos em que as geratrizes do contorno aparente da perspectiva do cone são tangentes à base do sólido.

Após a determinação dos pontos T e T' , desenharam-se as geratrizes do contorno aparente da perspectiva do cone (as geratrizes $[TV]$ e $[T'V]$) e concluiu-se o desenho da perspectiva do sólido, assinalando convenientemente as invisibilidades – o arco menor $\overline{TT'}$ (da circunferência que delimita a base) é invisível.

Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo X , eixo Y e eixo Z) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do cone representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspectivas dos traços (frontal e lateral) do plano ϕ (o plano que contém a base do cone), no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso da projeção horizontal do cone, em rebatimento, do eixo X_r' , da reta r_r , da direção de afinidade d , dos traçados referentes à inversão do rebatimento do plano XZ e, ainda, da construção que nos permitiu determinar as geratrizes do contorno aparente da perspectiva do sólido) representaram-se a **leve**.

292.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo Z representa-se, convencionalmente, na vertical. Uma vez que os ângulos da direção das projetantes se referem ao eixo X e ao eixo Z , conclui-se que o plano axonométrico é o plano XZ – o eixo X e o eixo Z fazem, entre si, um ângulo de 90° . A perspectiva do eixo Y (o eixo que não está contido no plano axonométrico) faz, com a parte positiva do eixo X um ângulo de 120° (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo Z , um ângulo de 150° (que é outro ângulo obtuso).

Os dados permitiram-nos representar a abscissa do ponto Q (4 cm) sobre o eixo X (em verdadeira grandeza), bem como a cota do ponto Q (6 cm) sobre o eixo Z (também em verdadeira grandeza), o que nos permitiu representar, de imediato, Q_2 (a projeção frontal do ponto Q). Note que o eixo X e o eixo Z estão contidos no plano axonométrico pelo que não apresentam qualquer deformação.

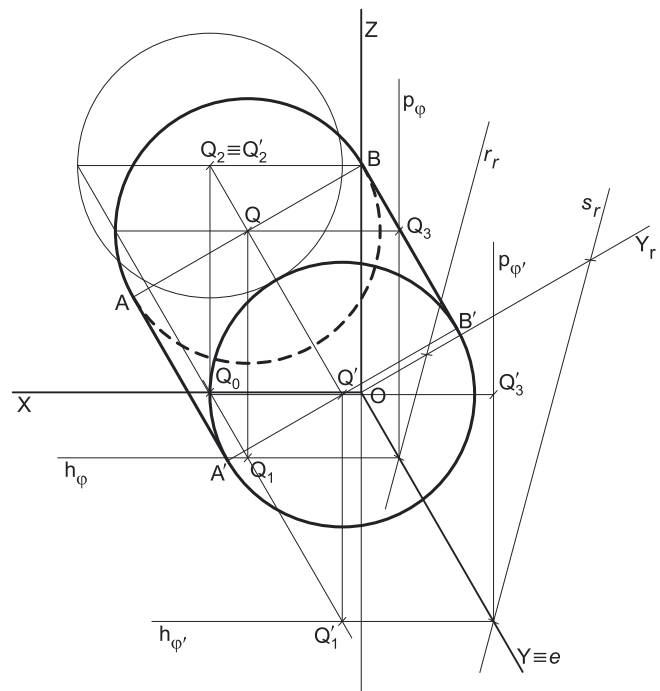
Resolução:

O plano que contém a base de menor afastamento do cilindro (um plano frontal ϕ) é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), pelo que o círculo (a base referida do sólido) **projeta-se em verdadeira grandeza** (a perspectiva do círculo está em verdadeira grandeza) – o círculo, a sua perspectiva e a sua projeção frontal são figuras geometricamente iguais.

Assim, com o compasso, fazendo centro em Q_2 (a projeção frontal do ponto Q) e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a circunferência que delimita a projeção frontal da base de menor afastamento do cilindro. Por outro lado, porque se trata de um **cilindro de revolução** (um **cilindro reto**), o seu eixo está contido numa reta ortogonal aos planos das bases (planos frontais) – assim, o eixo do cilindro está contido numa reta de topo (uma reta projetante frontal), pelo que se tem imediatamente $Q'_2 \equiv Q_2$.

O plano ϕ (o plano que contém a base de menor afastamento do sólido) tem 2 cm de afastamento e o cilindro tem 5 cm de altura. Uma vez que a altura de um cilindro é a distância entre os planos das duas bases, o plano ϕ' (o plano que contém a base de maior afastamento do sólido) tem 7 cm de afastamento ($2 + 5 = 7$).

Assim, para determinar a perspectiva do cilindro é necessário, em primeiro lugar, determinar as perspectivas dos pontos Q e Q' (os centros das bases), para o que é necessário determinar previamente o coeficiente de deformação que afeta o eixo Y , de forma a ser possível determinar as perspectivas dos afastamentos daqueles dois pontos (o afastamento é a única coordenada dos pontos que apresenta deformação).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Determinação gráfica do coeficiente de deformação e determinação das perspectivas propriamente ditas dos pontos Q e Q':

O **afastamento** do ponto **Q**, porque se mede no eixo **Y**, está afetado pela deformação inerente à projeção do eixo (tal como o **afastamento** do ponto **Q'**). Para determinar a deformação, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo **Y** para o *plano axonométrico* (o plano **XZ**). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a própria perspectiva do eixo **Y**. O eixo **Y** rebatido (o eixo **Y_r**) fica perpendicular à perspectiva do eixo **Y**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio).

A partir do ponto **O**, sobre o eixo **Y_r** (e no sentido positivo do eixo), mediu-se o **afastamento** do ponto **Q** em verdadeira grandeza (2 cm), obtendo-se um ponto (que não se identificou) – por esse ponto conduziu-se uma reta **r_r**, com a inclinação das projetantes (um ângulo de 45°). A reta **r_r** é a reta projetante desse ponto, em rebatimento. O ponto de interseção da reta **r_r** com a perspectiva do eixo **Y** é o vértice do ângulo entre a reta **r_r** e a perspectiva do eixo **Y** e é o ponto que nos dá a perspectiva do **afastamento** do ponto **Q** (sobre a perspectiva do eixo **Y**).

Por esse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano φ (o plano frontal que contém a base de **menor afastamento** do cilindro) – **h_φ** é a perspectiva do traço horizontal do plano φ (é paralelo ao eixo **X**) e **p_φ** é a perspectiva do traço lateral do plano φ (é paralelo ao eixo **Z**).

Em seguida, também a partir do ponto **O**, sobre o eixo **Y_r** (e no sentido positivo do eixo), mediu-se o **afastamento** do ponto **Q'** em verdadeira grandeza (7 cm), obtendo-se um outro ponto (que também não se identificou) – por esse ponto conduziu-se uma reta **s_r**, com a inclinação das projetantes (um ângulo de 45°). A reta **s_r** (que é paralela à reta **r_r**) é a reta projetante desse ponto, em rebatimento. O ponto de interseção da reta **s_r** com a perspectiva do eixo **Y** é o vértice do ângulo entre a reta **s_r** e a perspectiva do eixo **Y** e é o ponto que nos dá a perspectiva do **afastamento** do ponto **Q'** (sobre a perspectiva do eixo **Y**).

Por esse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano φ' (o plano frontal que contém a base de **maior afastamento** do cilindro) – **h_{φ'}** é a perspectiva do traço horizontal do plano φ' (é paralelo ao eixo **X**) e **p_{φ'}** é a perspectiva do traço lateral do plano φ' (é paralelo ao eixo **Z**).

As projeções do ponto **Q** (a projeção lateral e a projeção horizontal) são dois extremos da linha de chamada do ponto **Q**, que é uma linha quebrada aberta, com um extremo em **Q₁**, outro extremo em **Q₂** e um vértice no eixo **X**. A parte da linha de chamada do ponto **Q** que está contida no plano **XY** é paralela ao eixo **Y** pelo que, em perspectiva, essa parte da linha de chamada é também paralela à perspectiva do eixo **Y**. Assim, a partir do ponto do eixo **X** que pertence à linha de chamada do ponto **Q** desenhou-se a perspectiva da parte que se situa no plano **XY** (e que é paralela à perspectiva do eixo **Y**), o que nos permitiu determinar **Q₁** (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **Q**), sobre a perspectiva de **h_φ** (pois o plano φ é um plano projetante horizontal).

Em seguida, por **Q₁** (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **Q**) conduziu-se a perspectiva da reta projetante horizontal do ponto **Q**, que é vertical (paralela ao eixo **Z**). Depois, por **Q₂** (a projeção frontal do ponto **Q**), conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal do ponto **Q** (que é paralela à perspectiva do eixo **Y**) – o ponto de concorrência das perspectivas das duas retas projetantes é a perspectiva propriamente dita do ponto **Q**.

As perspectivas do ponto **Q'** determinaram-se através da repetição do procedimento atrás exposto (para a determinação das perspectivas do ponto **Q**). Note que não se determinaram as perspectivas das projeções laterais do ponto **Q** e do ponto **Q'**, por não serem necessárias.

Determinação da perspectiva do cilindro:

Atendendo a que o plano φ e o plano φ' (os planos que contêm as bases do cilindro) são paralelos ao plano de projeção (*o plano axonométrico*), e como atrás se referiu, as bases projetam-se, ambas, em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* (o plano **XZ**). Assim, com o compasso, fazendo centro em **Q** (a perspectiva propriamente dita do ponto **Q**) e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a perspectiva propriamente dita da base de **menor afastamento** do cilindro, em verdadeira grandeza. Em seguida, com o compasso, fazendo centro em **Q'** (a perspectiva propriamente dita do ponto **Q'**) e também com 3,5 cm de raio, desenhou-se a perspectiva propriamente dita da base de **maior afastamento** do cilindro, em verdadeira grandeza.

A perspectiva do cilindro é limitada pelas geratrizes do contorno aparente da perspectiva do sólido, que se determinam com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (as circunferências que delimitam as duas bases do cilindro) que são paralelas a uma reta dada (a perspectiva do eixo do cilindro).

Assim, desenharam-se os diâmetros das duas circunferências que são perpendiculares ao segmento **[QQ']** (a perspectiva do eixo do sólido), o que nos permitiu determinar os pontos de tangência – os pontos **A** e **B** (da base de menor afastamento) e os pontos **A'** e **B'** (da base de maior afastamento).

Após a determinação dos pontos **A**, **B**, **A'** e **B'**, desenharam-se as geratrizes do contorno aparente da perspectiva do cilindro (as geratrizes **[AA']** e **[BB']**) e concluiu-se o desenho da perspectiva do sólido, assinalando convenientemente as invisibilidades – a semicircunferência **AB** de menor cota (da base de menor afastamento) é invisível. A base de maior afastamento é visível na sua totalidade.

Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do cilindro representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspectivas dos traços (frontal e lateral) dos planos φ e φ' (os planos que contêm as bases do sólido), no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do eixo **Y_r**, das retas **s_r** e **r_r**, e, ainda, dos diâmetros que nos permitiram determinar as geratrizes do contorno aparente da perspectiva do sólido) representaram-se a **leve**.

293.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo Z representa-se, convencionalmente, na vertical. Trata-se de uma **perspetiva militar** (ou **planométrica**), pelo que o *plano axonométrico* é o plano XY – assim, o eixo X e o eixo Y fazem, entre si, um ângulo de 90° . A perspectiva do eixo Z (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com a parte positiva do eixo X um ângulo de 145° (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo Y , um ângulo de 125° (que é outro ângulo obtuso).

Os dados permitiram-nos representar a abscissa do ponto Q (4 cm) sobre o eixo X (em verdadeira grandeza), bem como o seu afastamento (3 cm) sobre o eixo Y (também em verdadeira grandeza), o que nos permitiu representar, de imediato, Q_1 (a projeção horizontal do ponto Q). Note que o eixo X e o eixo Y estão contidos no *plano axonométrico* pelo que não apresentam qualquer deformação. Em seguida, desenhou-se h_ϕ , o traço horizontal do plano ϕ (o plano frontal que contém o pentágono) – h_ϕ passa por Q_1 , pois o plano ϕ é um plano projetante horizontal.

Por fim, representou-se, ainda, a perspectiva do traço lateral do plano ϕ (p_ϕ), que é paralelo à perspetiva do eixo Z .

Resolução:

O plano que contém o pentágono $[ABCDE]$ (um plano frontal) não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que o pentágono $[ABCDE]$ **não se projeta em verdadeira grandeza** (a perspetiva do pentágono não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o pentágono está contido num plano frontal (de frente), que é paralelo ao *plano coordenado frontal* (o plano XZ), sabe-se que o pentágono se projeta em verdadeira grandeza no *plano coordenado XZ* – o pentágono $[ABCDE]$ e a sua projeção frontal (a sua projeção no *plano coordenado XZ*) são duas figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do **rebatimento do plano coordenado XZ** (o plano no qual o pentágono se projeta em verdadeira grandeza).

Rebatimento do plano XZ e construção da projeção frontal do pentágono $[ABCDE]$, em verdadeira grandeza:

Ao rebater o plano XZ sobre o *plano axonométrico*, a charneira do rebatimento (reta e) é o eixo X , que se identificou imediatamente. O eixo Z rebatido (o eixo Z_r) fica coincidente com o eixo Y , facto que se assinalou devidamente – $Y \equiv Z_r$. O eixo Z_r é o eixo Z rebatido pelo rebatimento do plano XZ .

No plano XZ rebatido, representou-se a projeção frontal do ponto Q , em rebatimento, em função da sua cota. Assim, Q_{2r} é a projeção frontal do ponto Q (em rebatimento), situa-se na sua linha de chamada (que passa por Q_1 e é perpendicular ao eixo X), 4 cm (a cota do ponto Q) acima do eixo X .

A partir de Q_{2r} , foi possível efetuar a construção da **projeção frontal do pentágono**, em verdadeira grandeza, de acordo com os dados. Assim, com o compasso, fazendo centro em Q_{2r} e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a circunferência circunscrita à projeção frontal do pentágono. Em seguida, efetuou-se a construção da projeção frontal do pentágono, em verdadeira grandeza e de acordo com os dados – o lado $[AB]$ é vertical e é o lado de maior abscissa da figura, pelo que o segmento $[A_2, B_2]$ é paralelo ao eixo Z_r e é o lado mais afastado do eixo Z_r (para que seja o lado de maior abscissa do pentágono).

Para determinar a perspetiva do pentágono $[ABCDE]$ é necessário inverter o rebatimento, o que se processa com o recurso à **direção de afinidade** (de acordo com o efetuado no exercício 266. – ver exercício 266. e respetivo relatório).

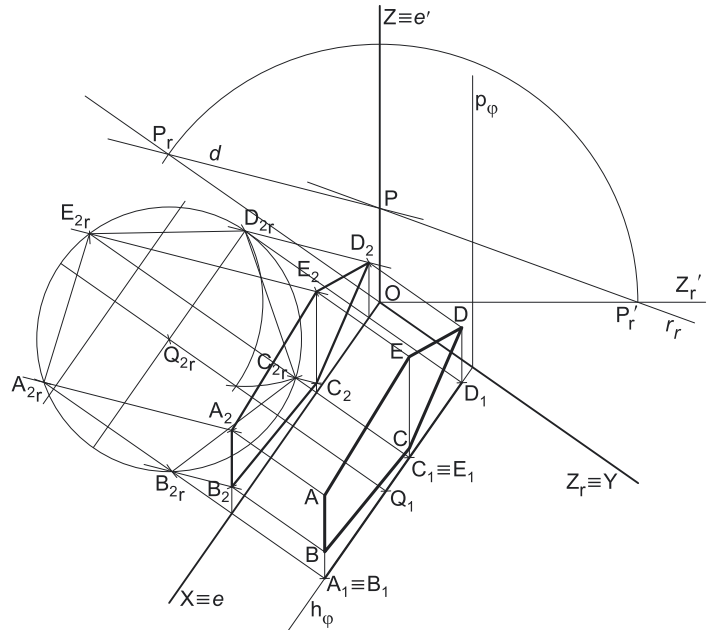
Determinação da direção de afinidade:

Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano coordenado XZ (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano XZ com a sua perspetiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo Z , pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade**.

Sobre o eixo Z_r , representou-se um ponto P_r – o ponto P é um ponto qualquer do eixo Z , com uma determinada cota ($\overline{OP_r}$ é a cota desse ponto P , em verdadeira grandeza, pelo rebatimento do plano XZ).

Em seguida, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo Z para o *plano axonométrico* (o plano XY), para se determinar a perspetiva do ponto P e, dessa forma, ser possível relacionar o rebatimento do plano XZ com a deformação inerente à perspetiva. Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo Z (a reta e'), que é a própria perspetiva do eixo Z . O eixo Z rebatido (o eixo Z_r') fica perpendicular à perspetiva do eixo Z . O ponto O é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio).

A partir do ponto O , sobre o eixo Z_r' (e no sentido positivo do eixo), mediu-se $\overline{OP_r'}$ (que é a cota do ponto P), em verdadeira grandeza, obtendo-se o ponto P_r' – tenha em conta que se tem necessariamente $\overline{OP_r'} = \overline{OP_r}$.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por P_r' conduziu-se a reta r_r , com a inclinação das projetantes (um ângulo de 70°) – a reta r_r é a reta projetante do ponto P , em rebatimento. O ponto de interseção da reta r_r com a perspectiva do eixo Z é a perspectiva do ponto P (é o vértice do ângulo entre a reta r_r e a perspectiva do eixo Z). OP é a perspectiva de $OP_r' = OP_r'$.

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano XZ com a sua perspectiva – assim, a reta que passa por P_r e pela perspectiva do ponto P (a reta d) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano XZ).

Inversão do rebatimento do plano coordenado XZ e determinação da perspectiva do pentágono:

As projeções do ponto A (a projeção frontal e a projeção horizontal) são dois extremos da linha de chamada do ponto A – a sua linha de chamada é uma linha quebrada aberta, que tem um extremo em A_1 , outro extremo em A_2 e um vértice no eixo X . A parte da linha de chamada do ponto A que está contida no plano XZ é um segmento que tem um extremo no eixo X e o outro extremo em A_2 – em rebatimento, essa parte da linha de chamada é o segmento de reta perpendicular ao eixo X e com um extremo em A_{2r} . A perspectiva desse segmento tem o mesmo extremo no eixo X (que é um ponto da charneira e, por isso, é fixo) e é paralela à perspectiva do eixo YZ .

Assim, desenhou-se a reta suporte da perspectiva da linha de chamada do ponto A . Em seguida, por A_{2r} conduziu-se uma reta paralela à reta d (a **direção de afinidade**) – o ponto em que esta interseja a perspectiva da linha de chamada do ponto A é A_2 (a perspectiva da projeção frontal do ponto A).

Em seguida, por A_1 (a perspectiva da projeção horizontal do ponto A) conduziu-se a perspectiva da reta projetante horizontal do ponto A , que é vertical (paralela à perspectiva do eixo Z). Depois, por A_2 (a projeção frontal do ponto A), conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal do ponto A (que é paralela ao eixo Y) – o ponto de concorrência das perspectivas das duas retas projetantes é a perspectiva propriamente dita do ponto A .

A determinação das perspectivas dos restantes vértices do pentágono (os pontos B , C , D e E) efetuou-se a partir da repetição do procedimento exposto (para a determinação das perspectivas do ponto A), aplicado a cada uma das situações.

Por fim, desenharam-se as perspectivas do pentágono. O pentágono $[ABCDE]$ é a perspectiva propriamente dita do pentágono. O pentágono $[A_2B_2C_2D_2E_2]$ é a perspectiva da projeção horizontal do pentágono. O segmento de reta $[A_2E_2]$ é a perspectiva da projeção horizontal do pentágono (que se situa sobre h_{φ} , pois o plano φ é projetante horizontal).

Note que não se determinaram as perspectivas das projeções laterais dos pontos, por estas não serem necessárias.

Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo X , eixo Y e eixo Z) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do pentágono representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspectivas das projeções do pentágono, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte**. As perspectivas dos traços (horizontal e lateral) do plano φ (o plano que contém a figura), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso da projeção horizontal do triângulo, em rebatimento, do eixo Z_r' , da reta r_r , da direção de afinidade d e, ainda dos traçados referentes à inversão do rebatimento do plano XZ), representaram-se a **leve**.

294.

Dados:

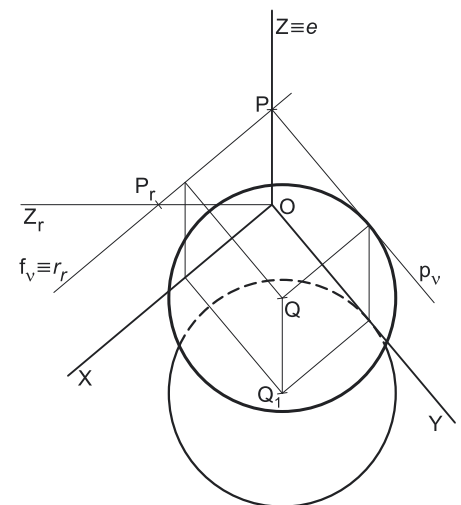
Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados*. A perspectiva do eixo Z representa-se, convencionalmente, na vertical. Trata-se de uma **perspectiva militar** (ou **planométrica**), pelo que o *plano axonométrico* é o plano XY – assim, o eixo X e o eixo Y fazem, entre si, um ângulo de 90° . A perspectiva do eixo Z (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com a parte positiva do eixo X um ângulo de 130° (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo Y , um ângulo de 140° (que é outro ângulo obtuso).

Os dados permitiram-nos representar a abscissa do ponto Q (3 cm) sobre o eixo X (em verdadeira grandeza), bem como o seu afastamento (4 cm) sobre o eixo Y (também em verdadeira grandeza), o que nos permitiu representar, de imediato, Q_1 (a projeção horizontal do ponto Q). Note que o eixo X e o eixo Y estão contidos no *plano axonométrico* pelo que não apresentam qualquer deformação.

Resolução:

O plano que contém o círculo (um plano horizontal) é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que o círculo **projeta-se em verdadeira grandeza** (a perspectiva do círculo está em verdadeira grandeza) – o círculo, a sua perspectiva e a sua projeção horizontal são figuras geometricamente iguais.

Assim, com o compasso, fazendo centro em Q_1 (a projeção horizontal do ponto Q) e com 3 cm de raio, desenhou-se a circunferência que delimita a projeção horizontal do círculo (e que é tangente ao eixo Y). Para determinar a perspectiva do círculo é necessário, em primeiro lugar, determinar a perspectiva do ponto Q (o seu centro). Para tal é necessário determinar previamente o coeficiente de deformação que afeta o eixo Z , de forma a ser possível determinar a perspectiva da cota do ponto Q (a única coordenada do ponto que apresenta deformação).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Determinação gráfica do coeficiente de deformação e determinação da perspectiva propriamente dita do ponto Q:

A **cota** do ponto **Q**, porque se mede no eixo **Z**, está afetada pela deformação inerente à projeção do eixo. Para determinar a deformação, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo **Z** para o *plano axonométrico* (o plano **XY**). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a própria perspectiva do eixo **Z**. O eixo **Z** rebatido (o eixo **Z_r**) fica perpendicular à perspectiva do eixo **Z**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio).

A partir do ponto **O**, sobre o eixo **Z_r** (e no sentido positivo do eixo), mediu-se a **cota** do ponto **Q** em verdadeira grandeza (3 cm), obtendo-se um ponto (que não se identificou) – por esse ponto conduziu-se uma reta **r_r**, com a inclinação das projetantes (um ângulo de 50°). A reta **r_r** é a reta projetante desse ponto, em rebatimento. O ponto de interseção da reta **r_r** com a perspectiva do eixo **Z** é o vértice do ângulo entre a reta **r_r** e a perspectiva do eixo **Z** e é o ponto que nos dá a perspectiva da **cota** do ponto **Q** (sobre a perspectiva do eixo **Z**).

Por esse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano **v** (o plano que contém o círculo) – **f_v** é a perspectiva do traço frontal do plano **v** (é paralelo ao eixo **X**) e **p_v** é a perspectiva do traço lateral do plano **v** (é paralelo ao eixo **Y**).

As projeções do ponto **Q** (a projeção frontal e a projeção horizontal) são dois extremos da linha de chamada do ponto **Q**, que é uma linha quebrada aberta, com um extremo em **Q₁**, outro extremo em **Q₂** e um vértice no eixo **X**. A parte da linha de chamada do ponto **Q** que está contida no plano **XZ** é paralela ao eixo **Z** pelo que, em perspectiva, essa parte da linha de chamada é também paralela à perspectiva do eixo **Z**. Assim, a partir do ponto do eixo **Z** que pertence à linha de chamada do ponto **Q** desenhou-se a perspectiva da parte que se situa no plano **XZ** (e que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), o que nos permitiu determinar **Q₂** (a perspectiva da projeção frontal do ponto **Q**), sobre a perspectiva de **f_v** (pois o plano **v** é um plano projetante frontal).

Em seguida, por **Q₁** (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **Q**) conduziu-se a perspectiva da reta projetante horizontal do ponto **Q**, que é vertical (paralela à perspectiva do eixo **Z**). Depois, por **Q₂** (a projeção frontal do ponto **Q**), conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal do ponto **Q** (que é paralela ao eixo **Y**) – o ponto de concorrência das perspectivas das duas retas projetantes é a perspectiva propriamente dita do ponto **Q**.

Note que não se determinou a perspectiva da projeção lateral do ponto **Q**, por não ser necessária.

Determinação das perspectivas do círculo:

Atendendo a que o plano **v** (o plano que contém o círculo) é paralelo ao plano de projeção (*o plano axonométrico*), e como atrás se referiu, o círculo projeta-se em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* (o plano **XY**). Assim, com o compasso, fazendo centro em **Q** (a perspectiva propriamente dita do ponto **Q**) e com 3 cm de raio, desenhou-se a perspectiva propriamente dita do círculo, em verdadeira grandeza. Note que a perspectiva do círculo é tangente a **p_v** (a perspectiva do traço lateral do plano **v**).

Por fim, identificou-se a parte invisível da projeção horizontal do círculo, atendendo às invisibilidades verificadas, mas não se representaram as perspectivas das projeções frontal e lateral do círculo, por não serem necessárias.

Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do círculo representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). A perspectiva da projeção horizontal do círculo, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representou-se a **médio-forte**. As perspectivas dos traços (frontal e lateral) do plano **v** (o plano que contém a figura), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do eixo **Z_r**, e da reta **r_r**), representaram-se a **leve**.

295.

Dados:

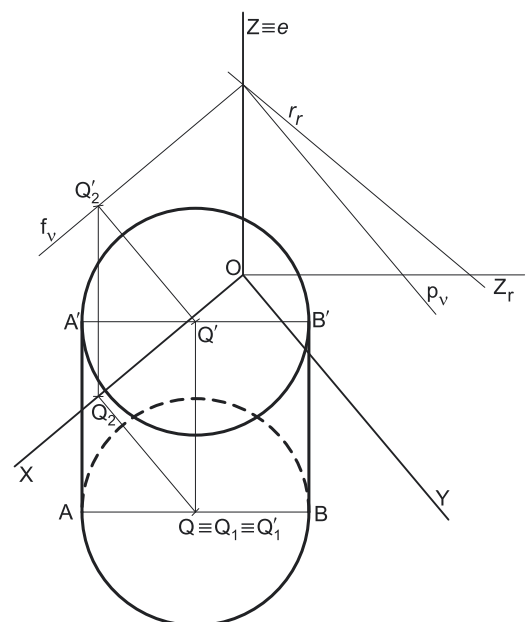
Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três *eixos coordenados*. A perspectiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. Trata-se de uma **perspectiva militar** (ou **planométrica**), pelo que o *plano axonométrico* é o plano **XY** – assim, o eixo **X** e o eixo **Y** fazem, entre si, um ângulo de 90°. A perspectiva do eixo **Z** (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com a parte positiva do eixo **X** um ângulo de 130° (que é um ângulo obtuso) e, com a parte positiva do eixo **Y**, um ângulo de 140° (que é outro ângulo obtuso).

Os dados permitiram-nos representar a abscissa do ponto **Q** (5 cm) sobre o eixo **X** (em verdadeira grandeza), bem como o afastamento do ponto **Q** (4 cm) sobre o eixo **Y** (também em verdadeira grandeza), o que nos permitiu representar, de imediato, **Q₁** (a projeção horizontal do ponto **Q**). Note que o eixo **X** e o eixo **Y** estão contidos no *plano axonométrico* pelo que não apresentam qualquer deformação. Por outro lado, atendendo a que o ponto **Q** tem cota nula (está contido no plano **XY**), tem-se imediatamente **Q ≡ Q₁ ≡ Q₁**.

Resolução:

A base inferior do cilindro está contida no *plano coordenado XY*, que é o próprio plano de projeção (*o plano axonométrico*), pelo que o círculo (a base inferior do sólido) **está em verdadeira grandeza** – o círculo é a sua própria perspectiva. Assim, com o compasso, fazendo centro em **Q** (o próprio ponto **Q**) e com 3 cm de raio, desenhou-se a circunferência que delimita a base inferior do cilindro.

A base superior do cilindro está contida num plano (um plano horizontal) que é paralelo ao plano de projeção (*o plano axonométrico*), pelo que o círculo (a base superior do sólido) **projeta-se em verdadeira grandeza** – o círculo, a sua projeção horizontal e a sua perspectiva são figuras geometricamente iguais.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Assim, com o compasso, fazendo centro em **Q** (a perspectiva propriamente dita do ponto **Q**) e com 3 cm de raio, desenhou-se a circunferência que delimita a base inferior do cilindro. Por outro lado, porque se trata de um **cilindro de revolução** (um **cilindro reto**), o seu eixo está contido numa reta ortogonal aos planos das bases (planos horizontais) – assim, o eixo do cilindro está contido numa reta vertical (uma reta projetante horizontal), pelo que se tem imediatamente $Q'_1 \equiv Q \equiv Q_1$.

O plano que contém a base inferior do sólido (o plano **XY**) tem cota nula e o cilindro tem 6 cm de altura. Uma vez que a altura de um cilindro é a distância entre os planos das duas bases, o plano v (o plano que contém a base superior do sólido) tem 6 cm de cota ($0 + 6 = 6$).

Assim, para determinar a perspectiva do cilindro é necessário, em primeiro lugar, determinar a perspectiva do ponto **Q'** (o centro da base superior), para o que é necessário determinar previamente o coeficiente de deformação que afeta o eixo **Z**, de forma a ser possível determinar a perspectiva da cota daquele ponto (a cota é a única coordenada do ponto **Q'** que apresenta deformação).

*Determinação gráfica do coeficiente de deformação e determinação da perspectiva propriamente dita do ponto **Q'**:*

A **cota** do ponto **Q'**, porque se mede no eixo **Z**, está afetada pela deformação inerente à projeção do eixo. Para determinar a deformação, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo **Z** para o *plano axonométrico* (o plano **XY**). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta **e**), que é a própria perspectiva do eixo **Z**. O eixo **Z** rebatido (o eixo **Z_r**) fica perpendicular à perspectiva do eixo **Z**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio).

A partir do ponto **O**, sobre o eixo **Z_r** (e no sentido positivo do eixo), mediu-se a **cota** do ponto **Q'** em verdadeira grandeza (6 cm), obtendo-se um ponto (que não se identificou) – por esse ponto conduziu-se uma reta **r_r**, com a inclinação das projetantes (um ângulo de 50°). A reta **r_r** é a reta projetante desse ponto, em rebatimento. O ponto de interseção da reta **r_r** com a perspectiva do eixo **Z** é o vértice do ângulo entre a reta **r_r** e a perspectiva do eixo **Z** e é o ponto que nos dá a perspectiva da **cota** do ponto **Q'** (sobre a perspectiva do eixo **Z**).

Por esse ponto conduziram-se as perspectivas dos traços do plano v (o plano horizontal que contém a base superior do cilindro) – **f_v** é a perspectiva do traço frontal do plano v (é paralelo ao eixo **X**) e **p_v** é a perspectiva do traço lateral do plano v (é paralelo ao eixo **Y**).

As projeções do ponto **Q'** (a projeção frontal e a projeção horizontal) são dois extremos da linha de chamada do ponto **Q'**, que é uma linha quebrada aberta, com um extremo em **Q'₁**, outro extremo em **Q'₂** e um vértice no eixo **X**. A parte da linha de chamada do ponto **Q'** que está contida no plano **XZ** é paralela ao eixo **Z** pelo que, em perspectiva, essa parte da linha de chamada é também paralela à perspectiva do eixo **Z**. Assim, a partir do ponto do eixo **X** que pertence à linha de chamada do ponto **Q'** desenhou-se a perspectiva da parte que se situa no plano **XZ** (e que é paralela à perspectiva do eixo **Z**), o que nos permitiu determinar **Q'₂** (a perspectiva da projeção frontal do ponto **Q'**), sobre a perspectiva de **f_v** (pois o plano v é um plano projetante frontal).

Em seguida, por **Q'₁** (a projeção horizontal do ponto **Q'**) conduziu-se a perspectiva da reta projetante horizontal do ponto **Q'**, que é vertical (paralela à perspectiva do eixo **Z**). Depois, por **Q'₂** (a perspectiva da projeção frontal do ponto **Q'**), conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal do ponto **Q** (que é paralela ao eixo **Y**) – o ponto de concorrência das perspectivas das duas retas projetantes é a perspectiva propriamente dita do ponto **Q'**.

Note que não se determinaram as perspectivas das projeções laterais do ponto **Q** e do ponto **Q'**, por não serem necessárias.

Determinação da perspectiva do cilindro:

Atendendo a que o plano v (o plano que contém a base superior do cilindro) é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), e como atrás se referiu, a base superior projeta-se em verdadeira grandeza no *plano axonométrico* (o plano **XY**). Assim, com o compasso, fazendo centro em **Q'** (a perspectiva propriamente dita do ponto **Q'**) e com 3 cm de raio, desenhou-se a perspectiva propriamente dita da base superior do cilindro, em verdadeira grandeza.

A perspectiva do cilindro é limitada pelas geratrizes do contorno aparente da perspectiva do sólido, que se determinam com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (as circunferências que delimitam as duas bases do cilindro) que são paralelas a uma reta dada (a perspectiva do eixo do cilindro).

Assim, desenharam-se os diâmetros das duas circunferências que são perpendiculares ao segmento **[QQ']** (a perspectiva do eixo do sólido), o que nos permitiu determinar os pontos de tangência – os pontos **A** e **B** (da base inferior) e os pontos **A'** e **B'** (da base superior).

Após a determinação dos pontos **A**, **B**, **A'** e **B'**, desenharam-se as geratrizes do contorno aparente da perspectiva do cilindro (as geratrizes **[AA']** e **[BB']**) e concluiu-se o desenho da perspectiva do sólido, assinalando convenientemente as invisibilidades – a semicircunferência **AB** de menor afastamento (da base inferior) é invisível. A base superior é visível na sua totalidade.

Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do cilindro representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspectivas dos traços (frontal e lateral) do plano v (o plano que contém a base superior do cilindro), no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do eixo **Z_r**, da reta **r_r**, e, ainda, dos diâmetros que nos permitiram determinar as geratrizes do contorno aparente da perspectiva do sólido) representaram-se a **leve**.

296.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo Z representa-se, convencionalmente, na vertical. Trata-se de uma **perspetiva militar** (ou **planométrica**), pelo que o *plano axonométrico* é o plano XY – assim, o eixo X e o eixo Y fazem, entre si, um ângulo de 90° . A perspectiva do eixo Z (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz ângulos de 135° com as partes positivas dos outros dois eixos (o eixo X e o eixo Y).

Tendo em conta que as coordenadas do ponto A são $(0; 0; 0)$, o ponto A é o próprio ponto O (a origem do referencial), facto que se assinalou imediatamente.

Resolução:

São dadas três vistas do objeto (as suas projeções horizontal, frontal e lateral) a partir das quais se depreende que o objeto tem as suas arestas paralelas aos eixos coordenados. Tendo em conta que o *plano axonométrico* é o *plano coordenado horizontal* (o plano XY), daquelas três projeções, a única que está em verdadeira grandeza é a projeção horizontal. Assim, a partir do ponto A , e atendendo a uma das arestas da face inferior está necessariamente contida no eixo X , reproduziu-se a projeção horizontal do sólido, em verdadeira grandeza, a partir da projeção horizontal fornecida no enunciado.

Em seguida, há que representar, pelo menos, uma outra projeção do objeto, de forma a ser possível a determinação da sua perspetiva. Tendo em conta que o objeto tem uma «rampa», será conveniente que a outra projeção a representar seja a projeção na qual se percebe a rampa, de forma inequívoca, ou seja, a sua projeção lateral.

Acontece que a projeção lateral está contida no plano YZ , que não é paralelo ao *plano axonométrico* (o plano de projeção), pelo que a projeção lateral do objeto não está em verdadeira grandeza, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Esse processo geométrico auxiliar deverá ser o rebatimento do plano YZ .

Rebatimento do plano YZ e construção da projeção lateral do sólido, em rebatimento:

Ao rebater o plano YZ sobre o *plano axonométrico*, a charneira do rebatimento (reta e) é o eixo Y , que se identificou imediatamente. O eixo Z rebatido (o eixo Z_r) fica coincidente com o eixo X , facto que se assinalou devidamente – $X \equiv Z_r$. O eixo Z_r é o eixo Z rebatido pelo rebatimento do plano YZ .

No plano YZ rebatido, reproduziu-se a projeção lateral do objeto, em rebatimento, a partir da projeção lateral fornecida no enunciado.

Para determinar a perspetiva do objeto é necessário inverter o rebatimento, o que se processa com o recurso à **direção de afinidade**.

Determinação da direção de afinidade:

Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano coordenado YZ (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano YZ com a sua perspetiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo Z , pois só assim será possível determinar a **direção de afinidade**.

Sobre o eixo Z_r representou-se um ponto P_r – o ponto P é um ponto qualquer do eixo Z , com uma determinada cota ($\overline{OP_r}$ é a cota desse ponto P , em verdadeira grandeza, pelo rebatimento do plano YZ).

Em seguida, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo Z para o *plano axonométrico* (o plano XY), para se determinar a perspetiva do ponto P e, dessa forma, ser possível relacionar o rebatimento do plano YZ com a deformação inerente à perspetiva. Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo Z (a reta e'), que é a própria perspetiva do eixo Z . O eixo Z rebatido (o eixo Z_r') fica perpendicular à perspetiva do eixo Z . O ponto O é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio).

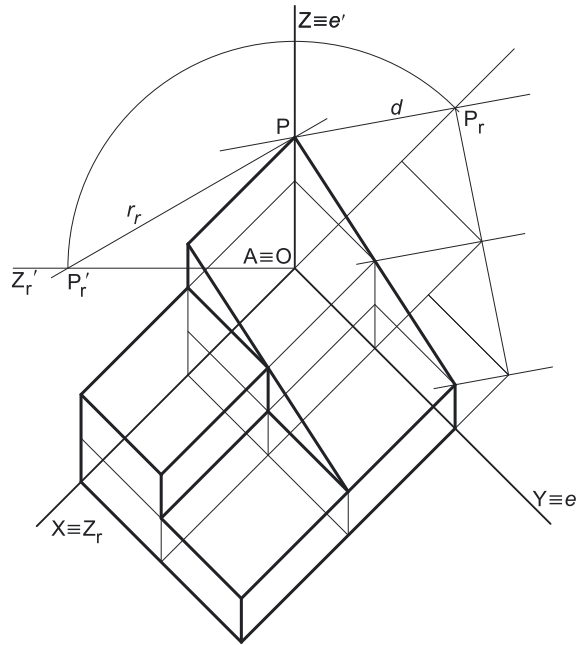
A partir do ponto O , sobre o eixo Z_r' (e no sentido positivo do eixo), mediu-se $\overline{OP_r'}$ (que é a cota do ponto P), em verdadeira grandeza, obtendo-se o ponto P_r' – tenha em conta que se tem necessariamente $\overline{OP_r'} = \overline{OP_r}$.

Por P_r' conduziu-se a reta r_r , com a inclinação das projetantes (um ângulo de 70°) – a reta r_r é a reta projetante do ponto P , em rebatimento. O ponto de interseção da reta r_r com a perspetiva do eixo Z é a perspetiva do ponto P (é o vértice do ângulo entre a reta r_r e a perspetiva do eixo Z). \overline{OP} é a perspetiva de $\overline{OP_r'} = \overline{OP_r}$.

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano YZ com a sua perspetiva – assim, a reta que passa por P_r e pela perspetiva do ponto P (a reta d) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano YZ).

Inversão do rebatimento do plano coordenado YZ e determinação da perspetiva da projeção lateral do objeto:

Todas as linhas da projeção lateral do sólido (em rebatimento) que são paralelas ao eixo Z_r , em perspetiva são necessariamente paralelas à perspetiva do eixo Z . Assim, a partir dos seus extremos no eixo Y , desenharam-se as retas suporte dessas linhas (arestas), paralelamente à perspetiva do eixo Z .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, pelos seus extremos de maior cota conduziram-se retas paralelas à direção de afinidade d , o que nos permitiu determinar as perspectivas daqueles vértices, sobre as retas suporte das arestas a que pertencem. Este procedimento permiti-nos desenhar a perspectiva da projeção lateral do objeto, com a deformação inerente à perspectiva.

Determinação da perspectiva do objeto:

Para inverter o rebatimento de um dado vértice do objeto, conduziu-se, pela sua projeção horizontal, a perspectiva da sua reta projetante horizontal (que é paralela à perspectiva do eixo Z). Em seguida, pela perspectiva da projeção lateral desse mesmo vértice, conduziu-se a perspectiva da sua reta projetante lateral (que é paralela ao eixo X) – o ponto de concorrência das duas retas projetantes é a perspectiva propriamente dita desse vértice.

O procedimento exposto repetiu-se para cada um dos vértices do sólido, o que nos permitiu determinar as suas perspectivas. Por fim, a partir das perspectivas da totalidade dos vértices do sólido, desenhou-se a sua perspectiva, atendendo às invisibilidades. Note que apenas existem arestas a separar faces distintas – tendo em conta que uma aresta é o segmento de reta segundo o qual se interseam duas faces distintas (que estão contidas em planos distintos), na superfície de uma única face, porque está contida num único plano, não existe qualquer aresta «no meio» da face.

Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo X , eixo Y e eixo Z) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do objeto representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso da projeção lateral do objeto, em rebatimento, do eixo Z_r' , da reta r_r , da direção de afinidade d e, ainda dos traçados referentes à inversão do rebatimento do plano YZ), representaram-se a **leve**.

297.

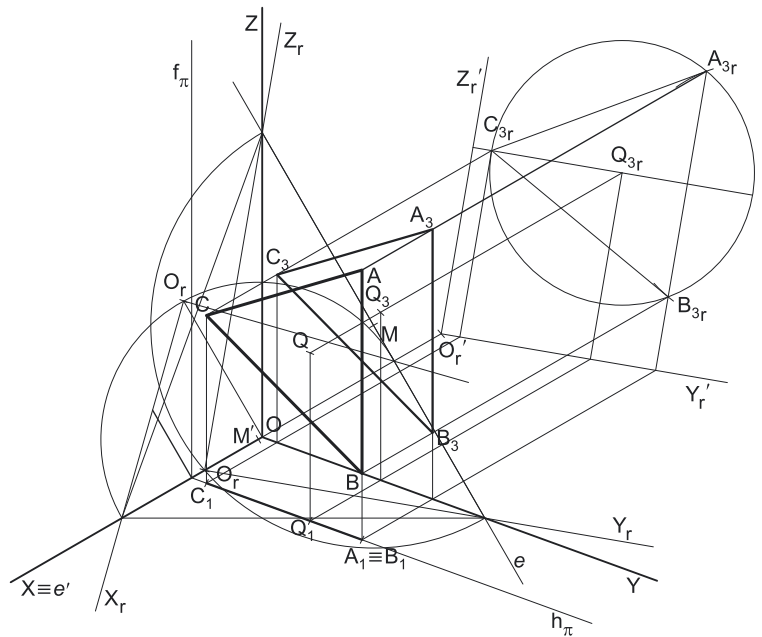
Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo Z representa-se, convencionalmente, na vertical. Tendo em conta que a perspectiva do eixo X faz um ângulo de 120° com a perspectiva do eixo Z e um ângulo de 130° com a perspectiva do eixo Y , as perspectivas destes dois eixos (o eixo Z e o eixo Y) fazem, entre si, um ângulo de 110° ($120^\circ + 130^\circ + 110^\circ = 360^\circ$). Em seguida, desenhou-se o *triângulo fundamental*, cujos vértices não se identificaram (recorde que as dimensões do triângulo são arbitrárias).

Resolução:

O plano que contém o triângulo $[ABC]$ (o plano de perfil) não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que o triângulo $[ABC]$ não se projeta em verdadeira grandeza (a perspectiva do triângulo não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o triângulo está contido num plano de perfil, que é paralelo ao *plano coordenado lateral* (o plano YZ), sabe-se que o triângulo se projeta em verdadeira grandeza no *plano coordenado YZ* – o triângulo $[ABC]$ e a sua projeção lateral (a sua projeção no *plano coordenado YZ*) são duas figuras geometricamente iguais. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do **rebatimento do plano coordenado YZ** (o plano no qual o triângulo se projeta em verdadeira grandeza).



O rebatimento do *plano coordenado YZ* pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes**. Optou-se por recorrer ao **método dos cortes**.

Rebatimento do plano coordenado YZ :

Assim, em primeiro lugar identificou-se a charneira do rebatimento (reta e), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado YZ*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta e), que é a reta suporte do *triângulo fundamental* que se opõe à perspectiva do eixo X .

O rebatimento do *plano coordenado YZ* processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da *pirâmide axonométrica* que está contida no plano YZ . Nesse sentido, determinou-se o ponto M , o ponto médio da aresta da base da *pirâmide axonométrica* que está contida na charneira e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 256, e respetivo **relatório**). Em seguida, determinou-se O_r (o ponto O rebatido), sobre a semicircunferência e na perpendicular à charneira que passa por O (que é a própria perspectiva do eixo X). O eixo Y_r fica definido por O_r e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é um ponto fixo). O eixo Z_r fica definido por O_r e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é outro ponto fixo). O eixo Y_r e o eixo Z_r são perpendiculares entre si no ponto O_r .

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **YZ** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspectiva do eixo **X**. O ponto O_r' é o ponto **O** rebatido após a translação efetuada. O eixo Y_r' passa por O_r' e é paralelo ao eixo Y_r . O eixo Z_r' passa por O_r' e é paralelo ao eixo Z_r .

Construção da projeção frontal do triângulo, em verdadeira grandeza:

No plano **YZ** rebatido e transladado, sobre o eixo Y_r' , representou-se o **afastamento** do ponto **Q** (4 cm, em verdadeira grandeza e a partir de O_r') e sobre o eixo Z_r' representou-se a **cota** do ponto **Q** (5 cm, em verdadeira grandeza e a partir de O_r'), o que nos permitiu representar, de imediato, Q_{3r} , que é a projeção lateral do ponto **Q**, em rebatimento.

A partir de Q_{3r} , foi possível efetuar a construção da **projeção frontal do triângulo**, em verdadeira grandeza, de acordo com os dados. Assim, com o compasso, fazendo centro em Q_{3r} e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a circunferência circunscrita à projeção lateral do triângulo. Em seguida, efetuou-se a construção da projeção lateral do triângulo, em verdadeira grandeza e de acordo com os dados – o lado **[AB]** é vertical, pelo que o segmento $[A_3B_3]$ é paralelo ao eixo Z_r' . Por outro lado, o ponto **C** é o vértice de menor afastamento do polígono, pelo que C_{3r} (a projeção lateral do ponto **C**, em rebatimento) é o vértice do triângulo $[A_3B_3C_3]$ que se situa mais próximo do eixo Z_r' .

O triângulo $[A_3B_3C_3]$ é a projeção lateral do triângulo **[ABC]**, em verdadeira grandeza (em rebatimento). Para determinar a perspectiva do triângulo **[ABC]** é necessário inverter o rebatimento.

Representação do plano que contém o triângulo [ABC]:

No entanto, é necessário determinar a perspectiva da abscissa do plano π (o plano de perfil que contém o polígono), que se mede sobre a perspectiva do eixo **X**. Uma vez que se trata de uma trimetria, o eixo **X** sofre uma redução diferente da redução dos outros dois eixos, pelo que é necessário efetuar o rebatimento do eixo **X**, para determinar a perspectiva da abscissa do plano π .

O rebatimento do eixo **X** pode processar-se por qualquer um dos três processos estudados – o **rebatimento do plano projetante** do eixo **X**, o **rebatimento de um plano coordenado** (que contenha o eixo **X**) ou, ainda, o **método dos cortes**. Optou-se pelo **rebatimento do plano projetante** do eixo **X**, o que se processou de acordo com o efetuado no exercício **237**. (ver exercício **237**. e respetivo **relatório**).

Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta e'), que é a perspectiva do eixo **X** – a reta de interseção do plano a rebater (o plano projetante do eixo **X**) com o plano para o qual se processa o rebatimento (o *plano axonométrico*).

O rebatimento do plano projetante do eixo **X** processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo no ponto **O**, em que um dos lados é a aresta lateral da *pirâmide axonométrica* que está contida no eixo **X**. Nesse sentido, determinou-se o ponto M' , o ponto médio da hipotenusa desse triângulo e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir o triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício **237**. e respetivo **relatório**). Em seguida, conduziu-se uma perpendicular à charneira (reta e') e determinou-se O_r (o ponto **O** rebatido) no ponto em que aquela perpendicular à charneira intersesta a semicircunferência. O eixo X_r fica definido por O_r e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é um ponto fixo). A semirreta que passa por O_r e é perpendicular ao eixo X_r (no ponto O_r), e que não se identificou, corresponde à reta de interseção do plano projetante do eixo **X** com o *plano coordenado YZ*.

Em seguida, sobre o eixo X_r , a partir de O_r e no sentido positivo do eixo, mediram-se os 3 cm (a abscissa do plano que contém o triângulo) e transportou-se essa medida para a perspectiva do eixo **X**, com o recurso a uma perpendicular à charneira. Este procedimento permitiu-nos obter, sobre a perspectiva do eixo **X**, a perspectiva de um ponto com a abscissa do plano π .

Em seguida, desenharam-se as perspectivas dos traços do plano π – h_π é a perspectiva do traço horizontal do plano π (é paralelo à perspectiva do eixo **Y**) e f_π é a perspectiva do traço frontal do plano π (e que é paralelo à perspectiva do eixo **Z**).

Determinação da perspectiva do triângulo [ABC]:

Para inverter o rebatimento do ponto **A** transportou-se o seu afastamento para o eixo Y_r' (a partir de A_{3r} e perpendicularmente ao eixo Y_r') e, deste, para a perspectiva de h_π , com uma perpendicular à charneira – este procedimento permitiu-nos determinar A_1 (a perspectiva da projeção horizontal do ponto **A**), sobre a perspectiva do traço horizontal do plano π (que é um plano projetante horizontal). Por A_1 conduziu-se a perspectiva da linha de chamada do ponto **A**, que é vertical (e, por isso, paralela à perspectiva do eixo **Z**). Em seguida, conduziu-se, por A_{3r} , uma perpendicular à charneira (que corresponde ao plano ortogonal à charneira que contém o arco do rebatimento do ponto A_3) e determinou-se **A** (a perspectiva propriamente dita do ponto **A**) sobre a perspectiva da sua linha de chamada. Em seguida, determinou-se, ainda, a perspectiva da projeção lateral do ponto **A** – A_3 (que se situa no plano **YZ**).

A inversão do rebatimento dos pontos **B**, **C** e **Q** e a determinação das respetivas perspectivas processou-se de forma idêntica à exposta para o ponto **A**. A partir das perspectivas dos três vértices do triângulo **[ABC]**, desenhou-se a perspectiva da figura. Note que não se representaram as projeções frontais dos vértices do triângulo, por não serem necessárias. Por fim, desenharam-se as perspectivas da projeção horizontal e da projeção lateral da figura, atendendo às invisibilidades existentes.

Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspectiva do triângulo representou-se a **forte**, pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspectivas das projeções (horizontal e frontal) do triângulo, integrando o pedido de uma forma indireta, mas tendo uma importância secundária em relação à figura, representaram-se a **médio-forte**. As perspectivas dos traços (frontal e horizontal) do plano π (o plano que contém a figura), apesar de integrarem os dados, no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do rebatimento do *plano coordenado YZ*, da translação do plano **YZ** rebatido, da construção da projeção lateral do triângulo em rebatimento, do rebatimento do plano projetante do eixo **X** ou, ainda, das perpendiculares à charneira), representaram-se a **leve**.

298.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados que fazem, entre si, três ângulos de 120° . A perspectiva do eixo Z representa-se, convencionalmente, na vertical. Em seguida, desenhou-se o *triângulo fundamental*, cujos vértices não se identificaram (recorde que as dimensões do triângulo são arbitrárias).

Resolução:

O plano que contém a base da pirâmide (o *plano coordenado XY*) não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que o quadrado $[ABCD]$ (a base da pirâmide) **não se projeta em verdadeira grandeza** (a perspectiva do quadrado não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o quadrado está contido no *plano coordenado XY*, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do **rebatimento do plano coordenado XY** (o plano no qual o quadrado está em verdadeira grandeza). O rebatimento do *plano coordenado XY* pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes**.

Por outro lado, o ângulo que o eixo da pirâmide faz com o plano XY está contido num plano ortogonal ao plano XY e que contém o eixo da pirâmide (trata-se do ângulo entre uma reta e um plano), que é um plano frontal (de frente) – esse plano também não é paralelo ao *plano axonométrico* (o plano de projeção), pelo que o ângulo não se projeta em verdadeira grandeza no *plano axonométrico*, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

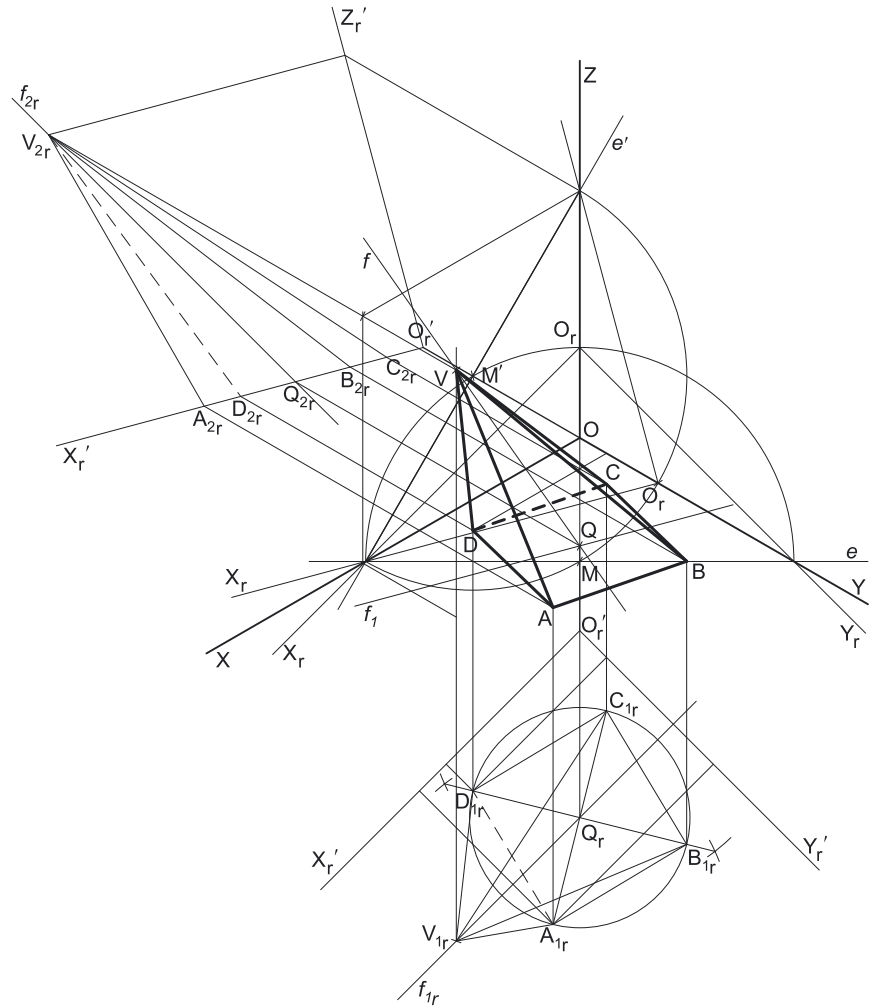
Tendo em conta que esse ângulo está contido num plano frontal (de frente), que é paralelo ao *plano coordenado frontal* (o plano XZ), sabe-se que o ângulo se projeta em verdadeira grandeza no *plano coordenado XZ* – o ângulo e a sua projeção frontal (a sua projeção no *plano coordenado XZ*) têm a mesma amplitude. Assim, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do **rebatimento do plano coordenado XZ** (o plano no qual o ângulo se projeta em verdadeira grandeza). O rebatimento do *plano coordenado XZ* pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes**.

Face ao exposto, há que rebater dois *planos coordenados* distintos, ou seja, há que efetuar dois rebatimentos. Exatamente por isso, e porque, nesta situação, é mais conveniente representar previamente a pirâmide em Dupla Projeção Ortogonal, em rebatimento, vamos recorrer ao **método dos cortes**. Assim, rebatendo os dois *planos coordenados* será possível representar a pirâmide pelas suas duas projeções.

Rebatimento do plano coordenado XY:

Assim, em primeiro lugar identificou-se a charneira do rebatimento (reta e), que é a reta de interseção do plano a rebater (o *plano coordenado XY*) com o *plano axonométrico* (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta e), que é a reta suporte do *triângulo fundamental* que se opõe à perspectiva do eixo Z .

O rebatimento do *plano coordenado XY* processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da *pirâmide axonométrica* que está contida no plano XY . Nesse sentido, determinou-se o ponto M , o ponto médio da aresta da base da *pirâmide axonométrica* que está contida na charneira e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 245. e respetivo **relatório**). Em seguida, determinou-se O_r (o ponto O rebatido), sobre a semicircunferência e na perpendicular à charneira que passa por O (que é a própria perspectiva do eixo Z). O eixo X_r fica definido por O_r e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é um ponto fixo). O eixo Y_r fica definido por O_r e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é outro ponto fixo). O eixo X_r e o eixo Z_r são perpendiculares entre si no ponto O_r .



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **XY** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspectiva do eixo **Z**. O ponto O_r' é o ponto **O** rebatido após a translação efetuada. O eixo X_r' passa por O_r' e é paralelo ao eixo X_r . O eixo Y_r' passa por O_r' e é paralelo ao eixo Y_r .

Rebatimento do plano coordenado **XZ**:

Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta e'), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano coordenado **XZ**) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta e'), que é a reta suporte do triângulo fundamental que se opõe à perspectiva do eixo **Y**.

O rebatimento do plano coordenado **XZ** processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da pirâmide axonométrica que está contida no plano **XZ**. Nesse sentido, determinou-se o ponto M' , o ponto médio da aresta da base da pirâmide axonométrica que está contida na charneira e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 257, e respetivo relatório). Em seguida, determinou-se O_r (o ponto **O** rebatido), sobre a semicircunferência e na perpendicular à charneira que passa por **O** (que é a própria perspectiva do eixo **Y**). O eixo X_r fica definido por O_r e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é um ponto fixo). O eixo Z_r fica definido por O_r e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é outro ponto fixo). O eixo X_r e o eixo Z_r são perpendiculares entre si no ponto O_r .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano **XZ** rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspectiva do eixo **Y**. O ponto O_r' é o ponto **O** rebatido após a translação efetuada. O eixo X_r' passa por O_r' e é paralelo ao eixo X_r . O eixo Z_r' passa por O_r' e é paralelo ao eixo Z_r .

Construção da projeção horizontal do quadrado, em verdadeira grandeza:

No plano **XY** rebatido e transladado, sobre o eixo X_r' , representou-se a **abscissa** do ponto **A** (6 cm, em verdadeira grandeza e a partir de O_r') e sobre o eixo Y_r' representou-se o **afastamento** do ponto **A** (5 cm, em verdadeira grandeza e a partir de O_r'), o que nos permitiu representar, de imediato, A_{1r} , que é a projeção horizontal do ponto **A**, em rebatimento.

No plano **XY** rebatido e transladado, sobre o eixo X_r' , representou-se a **abscissa** do ponto **C** (1 cm, em verdadeira grandeza e a partir de O_r') e sobre o eixo Y_r' representou-se o **afastamento** do ponto **C** (2 cm, em verdadeira grandeza e a partir de O_r'), o que nos permitiu representar, de imediato, C_{1r} , que é a projeção horizontal do ponto **C** em rebatimento.

A partir de A_{1r} e de C_{1r} , foi possível efetuar a construção da **projeção horizontal do quadrado**, em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar as projeções horizontais dos outros dois vértices do quadrado, em rebatimento – B_{1r} e D_{1r} . Tendo em conta que o enunciado não refere especificamente nenhuma posição para estes dois vértices, o facto de **B** ser o vértice de maior afastamento do quadrado foi uma decisão arbitrária. Note que se determinou, igualmente, o centro do quadrado, em rebatimento (Q_{1r}), com vista a ser possível construir a projeção horizontal da pirâmide, em rebatimento.

Representação da pirâmide em Dupla Projeção Ortogonal, em rebatimento:

Trata-se de uma pirâmide oblíqua, cujo eixo está contido numa reta frontal (de frente) que faz, com o plano **XY**, o ângulo dado no enunciado – considerou-se que o eixo da pirâmide está contido numa reta f . Por outro lado, a pirâmide tem 8 cm de altura e a altura de uma pirâmide é a distância do vértice ao plano da base. Tendo em conta que a base tem cota nula (está contida no plano **XY**), o vértice da pirâmide tem 8 cm de cota ($0 + 8 = 8$). Assim, o vértice da pirâmide é o ponto da reta f que tem 8 cm de cota.

Nesse sentido, conduziu-se, por Q_{1r} (a projeção horizontal do centro do quadrado, em rebatimento), f_{1r} , que é a projeção horizontal da reta f (em rebatimento). Para desenhar a projeção horizontal da pirâmide em rebatimento, é necessário, em primeiro lugar, determinar o ponto **V** (o vértice da pirâmide), o que tem de se processar a partir da sua projeção frontal.

Assim, transportaram-se as abscissas dos vértices da base da pirâmide (e do ponto **Q**) para o eixo X_r' (a partir de A_{1r} , B_{1r} , C_{1r} , D_{1r} e Q_{1r} e perpendicularmente ao eixo X_r') – as abscissas foram medidas com o compasso, a partir de O_r' e, em seguida, foram marcadas no eixo X_r' no rebatimento transladado do plano **XZ** (o plano coordenado frontal). Este procedimento permitiu-nos, no rebatimento do plano **XZ** (o plano coordenado frontal), obter as projeções frontais daqueles pontos em rebatimento – A_{2r} , B_{2r} , C_{2r} , D_{2r} e Q_{2r} (note que todos estes pontos têm cota nula, pois a base da pirâmide está contida no plano **XY**).

Em seguida, conduziu-se, por Q_{2r} (a projeção frontal do ponto **Q**, em rebatimento), a projeção frontal da reta f (a reta suporte do eixo da pirâmide), em rebatimento – f_{2r} . Esta faz, com o eixo X_r' , um ângulo de 60° de abertura para a esquerda, conforme o enunciado refere expressamente – f_{2r} está definida por um ponto (Q_{2r}) e por uma direção (a direção dada no enunciado). Por fim, determinou-se V_{2r} (a projeção frontal do vértice da pirâmide, em rebatimento), sobre f_{2r} e atendendo à sua cota (8 cm) – V_{2r} é o ponto de f_{2r} que dista 8 cm do eixo X_r' (no rebatimento do plano **XZ** – o plano coordenado frontal).

A partir das projeções frontais de todos os vértices da pirâmide (em rebatimento), foi possível desenhar a projeção frontal da pirâmide (em rebatimento), atendendo às invisibilidades observadas.

Em seguida, transportou-se a abscissa do ponto **V** para o eixo X_r' (a partir de V_{2r} e perpendicularmente ao eixo X_r') – a abscissa foi medida com o compasso, a partir de O_r' e, em seguida, foi marcada no eixo X_r' no rebatimento transladado do plano **XY** (o plano coordenado horizontal). Este procedimento permitiu-nos, no rebatimento do plano **XY** (o plano coordenado horizontal), obter a projeção horizontal do ponto **V** (em rebatimento), sobre a projeção horizontal da reta f (em rebatimento) – V_{1r} está sobre f_{1r} .

A partir das projeções horizontais de todos os vértices da pirâmide (em rebatimento), foi possível desenhar a projeção horizontal da pirâmide (em rebatimento), atendendo às invisibilidades observadas.

Determinação da perspectiva da pirâmide:

Para inverter o rebatimento do ponto **A** (por exemplo), a partir das suas duas projeções em rebatimento (a projeção horizontal e a projeção frontal), conduziu-se, por A_{2r} uma perpendicular à charneira do respetivo rebatimento (reta e') e, por A_{1r} , uma perpendicular à charneira do respetivo rebatimento (reta e) – o ponto de concorrência das duas retas é a perspectiva propriamente dita do ponto **A**.

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

A inversão do rebatimento dos outros quatro vértices da pirâmide (os pontos **B**, **C**, **D** e **V**) e, ainda, do ponto **Q**, bem como a determinação das respetivas perspetivas processou-se de forma idêntica à exposta para o ponto **A**. Note que não se representaram as perspetivas de nenhuma das projeções de qualquer dos pontos (projeção horizontal, projeção frontal e projeção lateral) pois, na realidade, não são necessárias.

Por fim, a partir das perspetivas dos cinco vértices da pirâmide, desenhou-se o contorno aparente da perspetiva do sólido, que é a linha fechada **[ABCVD]**. Todos os vértices da pirâmide integram o contorno aparente da perspetiva do sólido. No entanto, a aresta **[CD]**, da base, e invisível, pois separa duas faces invisíveis – a base **[ABCD]** a face lateral **[CDV]**.

Tendo em conta que as restantes faces laterais da pirâmide são visíveis (as faces laterais **[ABV]**, **[BCV]** e **[ADV]**), as arestas laterais **[AV]** e **[BV]** são visíveis.

Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspetiva da pirâmide representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso dos rebatimentos do *plano coordenado XY* e do *plano coordenado XZ*, das translações dos *planos coordenados* rebatidos, da construção das projeções horizontal e frontal da pirâmide em rebatimento ou, ainda, das perpendiculares à charneira), representaram-se a **leve**.

299.

Dados:

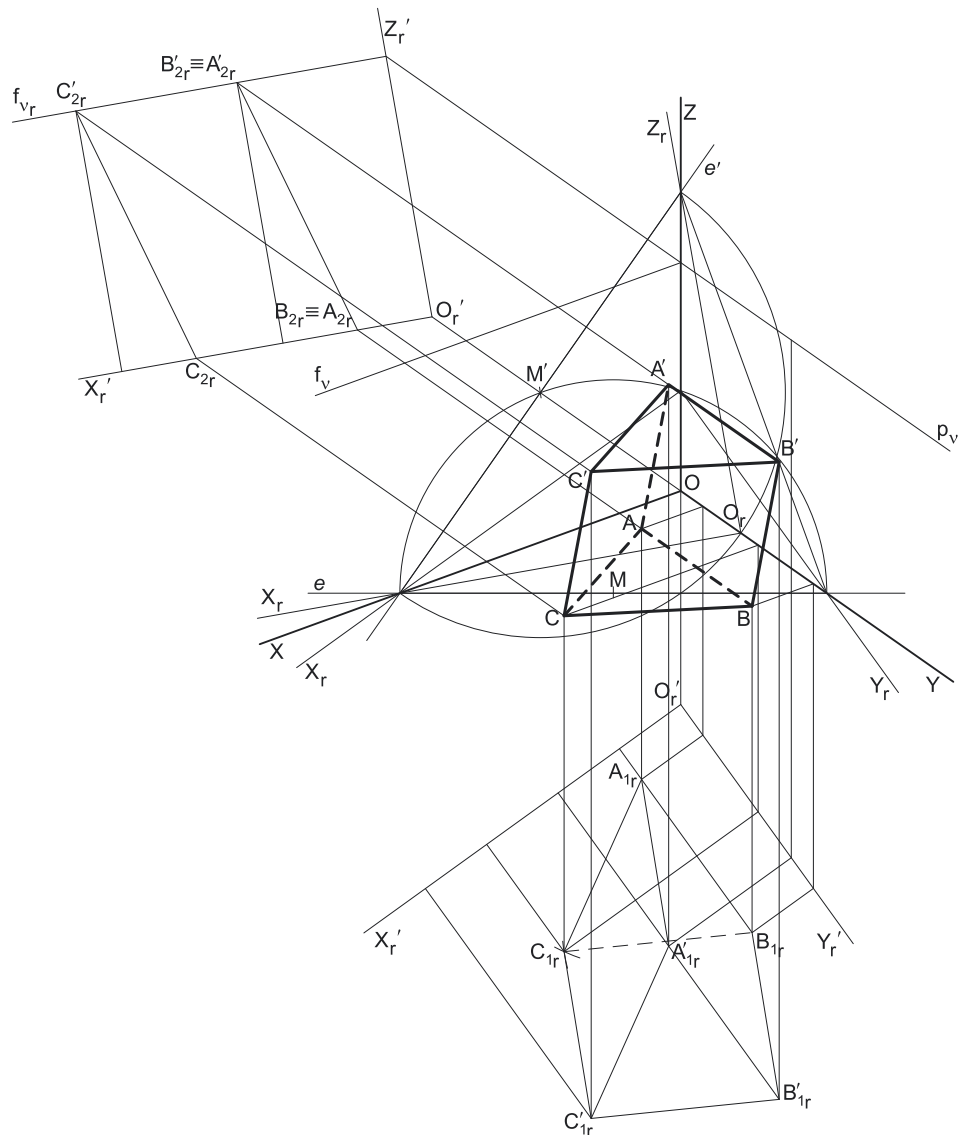
Em primeiro lugar, representaram-se as perspetivas dos três *eixos coordenados*. A perspetiva do eixo **Z** representa-se, convencionalmente, na vertical. A perspetiva do eixo **Y** (o eixo que sofre uma redução isolada) faz ângulos iguais (de 110°) com as perspetivas dos outros dois eixos. A soma dos ângulos que a perspetiva do eixo **Y** faz com as perspetivas dos outros dois eixos é 220° , pelo que as perspetivas dos outros dois eixos (o eixo **X** e o eixo **Z**) fazem, entre si, um ângulo de 140° ($360^\circ - 220^\circ = 140^\circ$). Em seguida, desenhou-se o *triângulo fundamental*, cujos vértices não se identificaram (recorde que as dimensões do triângulo são arbitrárias).

Resolução:

O plano que contém o triângulo **[ABC]** (o *plano coordenado XY*) não é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que o triângulo **[ABC]** **não se projeta em verdadeira grandeza** (a perspetiva do triângulo não está em verdadeira grandeza), pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar.

Tendo em conta que o triângulo está contido no *plano coordenado XY*, o processo geométrico auxiliar a recorrer é o do **rebatimento do plano coordenado XY** (o plano no qual o triângulo está em verdadeira grandeza). O rebatimento do *plano coordenado XY* pode efetuar-se de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes**.

Face a uma situação que se adivinha de grande complexidade, optou-se, a semelhança do exposto no relatório do exercício anterior, por representar previamente o sólido por duas das suas projeções, em rebatimento. Assim, para construir a projeção frontal do sólido (em rebatimento), é necessário efetuar o **rebatimento do plano coordenado XZ**, o que se pode efetuar de duas formas distintas – pelo **rebatimento dos planos coordenados** ou pelo **método dos cortes**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Face ao exposto, há que rebater dois *planos coordenados* distintos, ou seja, há que efetuar dois rebatimentos. Exatamente por isso, e porque, nesta situação, é mais conveniente representar previamente o prisma em Dupla Projeção Ortogonal, em rebatimento, vamos recorrer ao **método dos cortes**. Assim, rebatendo os dois *planos coordenados* será possível representar a pirâmide pelas suas duas projeções.

Rebatimento do plano coordenado XY:

Em primeiro lugar, identificou-se a charneira do rebatimento (reta e), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano coordenado XY) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta e), que é a reta suporte do triângulo fundamental que se opõe à perspetiva do eixo Z.

O rebatimento do plano coordenado XY processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da pirâmide axonométrica que está contida no plano XY. Nesse sentido, determinou-se o ponto M, o ponto médio da aresta da base da pirâmide axonométrica que está contida na charneira e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 245. e respetivo relatório). Em seguida, determinou-se O_r (o ponto O rebatido), sobre a semicircunferência e na perpendicular à charneira que passa por O (que é a própria perspetiva do eixo Z). O eixo X_r fica definido por O_r e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é um ponto fixo). O eixo Y_r fica definido por O_r e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é outro ponto fixo). O eixo X_r e o eixo Z_r são perpendiculares entre si no ponto O_r .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano XY rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspetiva do eixo Z. O ponto O_r' é o ponto O rebatido após a translação efetuada. O eixo X_r' passa por O_r' e é paralelo ao eixo X_r . O eixo Y_r' passa por O_r' e é paralelo ao eixo Y_r .

Rebatimento do plano coordenado XZ:

Assim, em primeiro lugar identificou-se a charneira do rebatimento (reta e'), que é a reta de interseção do plano a rebater (o plano coordenado XZ) com o plano axonométrico (o plano para o qual se processa o rebatimento). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta e'), que é a reta suporte do triângulo fundamental que se opõe à perspetiva do eixo Y.

O rebatimento do plano coordenado XZ processa-se através da construção em rebatimento (em verdadeira grandeza) do triângulo retângulo que é a face lateral da pirâmide axonométrica que está contida no plano XZ. Nesse sentido, determinou-se o ponto M' , o ponto médio da aresta da base da pirâmide axonométrica que está contida na charneira e desenhou-se a semicircunferência que nos permite construir aquele triângulo retângulo em verdadeira grandeza (ver exercício 257. e respetivo relatório). Em seguida, determinou-se O_r' (o ponto O rebatido), sobre a semicircunferência e na perpendicular à charneira que passa por O (que é a própria perspetiva do eixo Y). O eixo X_r' fica definido por O_r' e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é um ponto fixo). O eixo Z_r' fica definido por O_r' e pelo seu ponto de concorrência com a charneira (que é outro ponto fixo). O eixo X_r' e o eixo Z_r' são perpendiculares entre si no ponto O_r' .

Em seguida, efetuou-se a translação do plano XZ rebatido para fora da área do desenho, ao longo da direção do rebatimento (perpendicular à charneira do rebatimento) – ao longo da perspetiva do eixo Y. O ponto O_r' é o ponto O rebatido após a translação efetuada. O eixo X_r' passa por O_r' e é paralelo ao eixo X_r . O eixo Z_r' passa por O_r' e é paralelo ao eixo Z_r .

Construção da projeção horizontal do triângulo, em verdadeira grandeza:

No plano XY rebatido e transladado, sobre o eixo X_r' , representou-se a **abscissa** do ponto A (2 cm, em verdadeira grandeza e a partir de O_r') e sobre o eixo Y_r' representou-se o **afastamento** do ponto A (1 cm, em verdadeira grandeza e a partir de O_r'), o que nos permitiu representar, de imediato, A_{1r} , que é a projeção horizontal do ponto A, em rebatimento.

Atendendo a que o lado [AB] é paralelo ao eixo Y, em rebatimento o segmento $[A_{1r}B_{1r}]$ é necessariamente paralelo ao eixo Y_r' . Assim, por A_{1r} conduziu-se uma paralela ao eixo Y_r' , sobre a qual se mediram 5 cm (a medida do lado do triângulo), o que nos permitiu determinar B_{1r} (a projeção horizontal do ponto B, em rebatimento). A partir de A_{1r} e de B_{1r} , foi possível efetuar a construção da **projeção horizontal do triângulo**, em verdadeira grandeza, o que nos permitiu determinar a projeção horizontal do terceiro vértice do polígono, em rebatimento (C_{1r}), garantindo-se que o triângulo se situa no espaço do 1.º Triedro.

Em seguida, procedeu-se à representação da projeção horizontal do ponto A' , em rebatimento. Assim, no plano XY rebatido e transladado, sobre o eixo X_r' , representou-se a **abscissa** do ponto A' (4 cm, em verdadeira grandeza e a partir de O_r') e sobre o eixo Y_r' representou-se o **afastamento** do ponto A' (5 cm, em verdadeira grandeza e a partir de O_r'), o que nos permitiu representar, de imediato, A'_{1r} , que é a projeção horizontal do ponto A' , em rebatimento.

Representação do prisma em Dupla Projeção Ortogonal, em rebatimento:

Tendo em conta que as arestas da base superior do prisma (o triângulo $[A'B'C']$) são paralelas às arestas correspondentes da base inferior (o triângulo $[ABC]$), foi possível desenhar a projeção horizontal do triângulo $[A'B'C']$ (em rebatimento) e, assim, desenhar a projeção horizontal do prisma (em rebatimento), atendendo às invisibilidades verificadas.

Em seguida, no plano XZ rebatido e transladado, sobre o eixo X_r' , representou-se a **abscissa** do ponto A (2 cm, em verdadeira grandeza e a partir de O_r'), o que nos permitiu representar A_{2r} , sobre o eixo X_r' – A_{2r} é a projeção frontal do ponto A, em rebatimento (tenha em conta que o ponto A tem cota nula). O segmento de reta $[AB]$ é de topo (projetante frontal), pelo que se tem imediatamente $B_{2r} \equiv A_{2r}$ (B_{2r} é a projeção frontal do ponto B, em rebatimento).

Por outro lado, também no plano XZ rebatido e transladado, sobre o eixo X_r' , representou-se a **abscissa** do ponto A' (4 cm, em verdadeira grandeza e a partir de O_r') e sobre o eixo Z_r' representou-se a **cota** do ponto A (7 cm, em verdadeira grandeza e a partir de O_r'), o que nos permitiu representar, de imediato, A'_{2r} , que é a projeção frontal do ponto A' , em rebatimento. O segmento de reta $[A'B']$ é de topo (projetante frontal), pelo que se tem imediatamente $B'_{2r} \equiv A'_{2r}$ (B'_{2r} é a projeção frontal do ponto B' , em rebatimento).

(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Por A'_{2r} , conduziu-se f_{v_r} (o traço frontal do plano v , em rebatimento), paralelo ao eixo X_r' – o plano v é o plano horizontal (de nível) que contém a base superior do sólido.

Em seguida, no plano XY (o *plano coordenado horizontal*) rebatido e transladado, transportaram-se as abscissas do ponto C e do ponto C' para o eixo X_r' (a partir de C_{1r} e C'_{1r} , e perpendicularmente ao eixo X_r') – as abscissas foram medidas com o compasso, a partir de O_r' e, em seguida, foram marcadas no eixo X_r' no rebatimento transladado do plano XZ (o *plano coordenado frontal*). Este procedimento permitiu-nos, no rebatimento do plano XZ (o *plano coordenado frontal*), determinar as projeções frontais daqueles pontos em rebatimento – C_{2r} situa-se sobre o eixo X_r' (pois o ponto C tem cota nula) e C'_{2r} situa-se sobre f_{v_r} (pois o plano v é um plano projetante frontal).

Por fim, a partir das projeções frontais de todos os vértices do prisma (em rebatimento), foi possível desenhar a projeção frontal do prisma (em rebatimento), atendendo às invisibilidades observadas.

Determinação da perspectiva do prisma:

Para inverter o rebatimento do ponto A (por exemplo), a partir das suas duas projeções em rebatimento (a projeção horizontal e a projeção frontal), conduziu-se, por A_{2r} , uma perpendicular à charneira do respetivo rebatimento (reta e') e, por A_{1r} , uma perpendicular à charneira do respetivo rebatimento (reta e) – o ponto de concorrência das duas retas é a perspectiva propriamente dita do ponto A .

A inversão do rebatimento dos outros cinco vértices do prisma (os pontos B , C , A' , B' e C'), bem como a determinação das respetivas perspectivas processou-se de forma idêntica à exposta para o ponto A . Note que não se representaram as perspectivas de nenhuma das projeções de qualquer dos pontos (projeção horizontal, projeção frontal e projeção lateral) pois, na realidade, não são necessárias.

Em seguida, transportou-se, com o recurso a uma perpendicular à charneira, e a partir do eixo Z_r' , a cota do plano v , o plano horizontal (de nível) que contém a base superior do sólido, o que nos permitiu desenhar as perspectivas do traço frontal (f_v) e do traço lateral (p_v) daquele plano.

Por fim, a partir das perspectivas dos seis vértices do prisma, desenhou-se o contorno aparente da perspectiva do sólido, que é a linha fechada $[BCC'A'B']$. Existe um único vértice que não integra o contorno aparente da perspectiva do sólido – o vértice A .

O vértice A , por ser o vértice mais distante do observador, é **invisível**, bem como todas as arestas que nele convergem – as arestas $[AB]$ e $[AC]$ (da base $[ABC]$) e a aresta lateral $[AA']$. A base $[ABC]$ é invisível, bem como as faces laterais $[AA'B'B]$ e $[AA'C'C]$.

A base $[A'B'C']$ é visível, bem como a face lateral $[BB'C'C]$, pelo que a aresta $[B'C']$ da base superior é visível (pois separa duas faces visíveis).

Traçado:

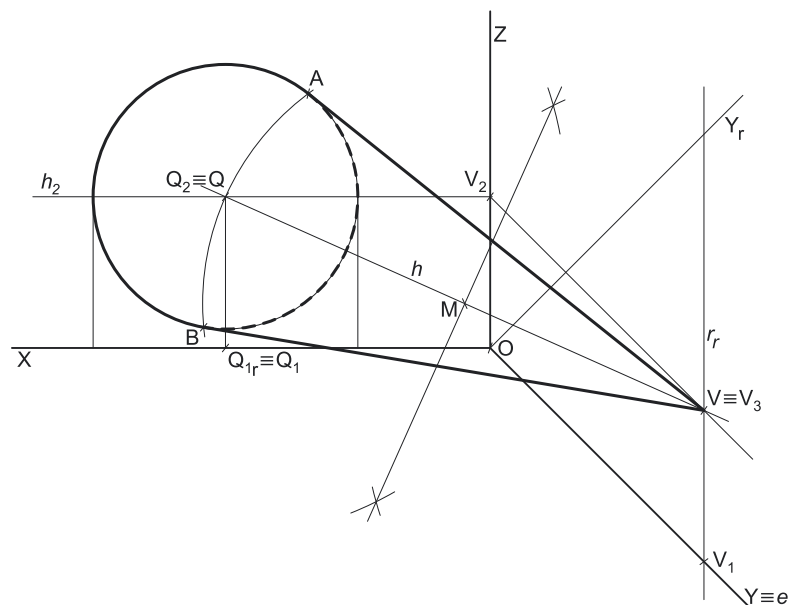
As perspectivas dos três eixos (eixo X , eixo Y e eixo Z) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. O triângulo fundamental representou-se a **leve** pois, no contexto do exercício, é meramente auxiliar. A perspectiva do prisma representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspectivas dos traços (frontal e lateral) do plano v (o plano que contém a base superior do sólido) representaram-se a **leve** pois, no contexto do exercício, são meramente auxiliares. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso dos rebatimentos do *plano coordenado XY* e do *plano coordenado XZ*, das translações dos *planos coordenados* rebatidos, da construção das projeções horizontal e frontal do prisma em rebatimento ou, ainda, das perpendiculares à charneira), representaram-se a **leve**.

300.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos *coordenados*. A perspectiva do eixo Z representa-se, convencionalmente, na vertical. Uma vez que os ângulos da direção das projetantes se referem ao eixo X e ao eixo Z , conclui-se que o *plano axonométrico* é o plano XZ – o eixo X e o eixo Z fazem, entre si, um ângulo de 90° . A perspectiva do eixo Y (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz, com as partes positivas dos outros dois eixos (o eixo X e o eixo Z) ângulos de 135° (que são ângulos obtusos).

Os dados permitiram-nos representar a abscissa do ponto Q (7 cm) sobre o eixo X (em verdadeira grandeza), bem como a cota do ponto Q (4 cm) sobre o eixo Z (também em verdadeira grandeza), o que nos permitiu representar, de imediato, Q_2 (a projeção frontal do ponto Q). Note que o eixo X e o eixo Z estão contidos no *plano axonométrico* pelo que não apresentam qualquer deformação. Por outro lado, o ponto Q tem afastamento nulo, pelo que o ponto Q está contido no próprio plano XZ (que é o *plano axonométrico*), pelo que se tem imediatamente $Q \equiv Q_2$ (o ponto Q está coincidente com a sua projeção frontal).



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Resolução:

A base do cone está contida no plano coordenado XZ , que é o próprio plano *axonométrico*, pelo que a base do cone **está em verdadeira grandeza**. Assim, com o compasso, fazendo centro no ponto Q e com 3,5 cm de raio, desenhou-se, em verdadeira grandeza, a circunferência que delimita a base do sólido.

O eixo do cone está contido numa reta horizontal (de nível), que se considerou ser a reta h . Nesse sentido, desenhou-se h_2 , a projeção frontal horizontal da reta h , passando por Q_2 (a projeção frontal do ponto Q) e paralela ao eixo X . O ponto V (o vértice do cone) tem abcissa nula, pelo que foi possível, de forma imediata, determinar V_2 (a projeção frontal do ponto V) – é o ponto de h_2 que se situa no eixo Z .

O cone tem 8 cm de altura e a altura de um cone é a distância do vértice ao plano da base. Tendo em conta que a base tem afastamento nulo (está contida no plano XZ), o vértice do cone tem 8 cm de afastamento ($0 + 8 = 8$). Para determinar a perspectiva do cone é necessário, em primeiro lugar, determinar a perspectiva do ponto V (o seu vértice). Para tal é necessário determinar previamente o coeficiente de deformação que afeta o eixo Y , de forma a ser possível determinar a perspectiva do afastamento do ponto V (a única coordenada do ponto que apresenta deformação).

Determinação gráfica do coeficiente de deformação e determinação da perspectiva propriamente dita do ponto V:

O **afastamento** do ponto V , porque se mede no eixo Y , está afetado pela deformação inerente à projeção do eixo. Para determinar a deformação, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo Y para o plano *axonométrico* (o plano XZ). Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento (reta e), que é a própria perspectiva do eixo Y . O eixo Y rebatido (o eixo Y_r) fica perpendicular à perspectiva do eixo Y . O ponto O é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio).

A partir do ponto O , sobre o eixo Y_r (e no sentido positivo do eixo), mediu-se o **afastamento** do ponto V em verdadeira grandeza (8 cm), obtendo-se um ponto (que não se identificou) – por esse ponto conduziu-se uma reta r_r , com a inclinação das projetantes (um ângulo de 45°). A reta r_r é a reta projetante desse ponto, em rebatimento. O ponto de interseção da reta r_r com a perspectiva do eixo Y é o vértice do ângulo entre a reta r_r e a perspectiva do eixo Y e é o ponto que nos dá a perspectiva do **afastamento** do ponto V (sobre a perspectiva do eixo Y).

Tendo em conta que o ponto V tem abcissa nula (é um ponto do plano YZ), o ponto determinado sobre a perspectiva do eixo Y é, imediatamente, a perspectiva da projeção horizontal do ponto V (V_1). Em seguida, por V_1 (a perspectiva da projeção horizontal do ponto V) conduziu-se a perspectiva da reta projetante horizontal do ponto V , que é vertical (paralela ao eixo Z) e que, na presente situação, fica coincidente com a reta r_r . Depois, por V_2 (a projeção frontal do ponto V), conduziu-se a perspectiva da reta projetante frontal do ponto V (que é paralela à perspectiva do eixo Y) – o ponto de concorrência das perspectivas das duas retas projetantes é a perspectiva propriamente dita do ponto V . Tendo em conta que o ponto V é um ponto com abcissa nula, tem-se imediatamente $V_3 \equiv V$.

Por fim, desenhou-se a perspectiva da reta h , a reta que contém o eixo do cone – a reta h está definida por dois pontos (os pontos Q e V).

Determinação da perspectiva do cone:

A perspectiva do cone é limitada pelas geratrizes do contorno aparente da perspectiva do sólido, que se determinam com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (a circunferência que delimita a base do cone) que passam por um ponto exterior (a perspectiva do ponto V).

Assim, determinou-se o ponto M , o ponto médio do segmento $[QV]$ (com o recurso à mediatriz do segmento) e, com o compasso, fazendo centro no ponto M e com raio até ao ponto Q , desenhou-se um arco de circunferência – os pontos em que o arco corta a circunferência são os pontos A e B . Os pontos A e B são os pontos em que as geratrizes do contorno aparente da perspectiva do cone são tangentes à base do sólido.

Após a determinação dos pontos A e B , desenharam-se as geratrizes do contorno aparente da perspectiva do cone (as geratrizes $[AV]$ e $[BV]$) e concluiu-se o desenho da perspectiva do sólido, assinalando convenientemente as invisibilidades – o arco menor AB (da circunferência que delimita a base) é invisível.

Traçado:

As perspectivas dos três eixos (eixo X , eixo Y e eixo Z) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspectiva do cone representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso do eixo Y_r , da reta r_r , da representação da reta h e, ainda, da construção que nos permitiu determinar as geratrizes do contorno aparente da perspectiva do sólido), representaram-se a **leve**.

301.

Dados:

Em primeiro lugar, representaram-se as perspectivas dos três eixos coordenados. A perspectiva do eixo Z representa-se, convencionalmente, na vertical. Trata-se de uma **perspetiva militar** (ou **planométrica**), pelo que o *plano axonométrico* é o plano XY – assim, o eixo X e o eixo Y fazem, entre si, um ângulo de 90° . A perspectiva do eixo Z (o eixo que não está contido no *plano axonométrico*) faz ângulos de 135° com as partes positivas dos outros dois eixos (o eixo X e o eixo Y).

Os dados permitiram-nos representar a abscissa do ponto Q (9 cm) sobre o eixo X (em verdadeira grandeza), bem como o seu afastamento (3 cm) sobre o eixo Y (também em verdadeira grandeza), o que nos permitiu representar, de imediato, Q_1 (a projeção horizontal do ponto Q). Por outro lado, atendendo a que o ponto Q tem cota nula (está contido no plano XY), tem-se imediatamente $Q \equiv Q_1 - Q_2$ (a projeção frontal do ponto Q) situa-se no eixo X .

De forma idêntica, foi também possível representar a abscissa do ponto Q' (3 cm) sobre o eixo X (em verdadeira grandeza), bem como o seu afastamento (6 cm) sobre o eixo Y (também em verdadeira grandeza), o que nos permitiu representar, de imediato, Q'_1 (a projeção horizontal do ponto Q').

Note que o eixo X e o eixo Y estão contidos no *plano axonométrico* pelo que não apresentam qualquer deformação.

Resolução:

A base inferior do cilindro está contida no *plano coordenado XY*, que é o próprio plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que o círculo (a base inferior do sólido) **está em verdadeira grandeza** – o círculo é a sua própria perspectiva. Assim, com o compasso, fazendo centro em Q (o próprio ponto Q) e com 3 cm de raio, desenhou-se a circunferência que delimita a base inferior do cilindro (que é tangente ao eixo X , pois o raio da base é igual ao afastamento do ponto Q).

A base superior do cilindro está contida num plano (um plano horizontal) que é paralelo ao plano de projeção (o *plano axonométrico*), pelo que o círculo (a base superior do sólido) **projeta-se em verdadeira grandeza** – o círculo, a sua projeção horizontal e a sua perspectiva são figuras geometricamente iguais. Assim, com o compasso, fazendo centro em Q'_1 (a projeção horizontal do ponto Q') e com 3 cm de raio, desenhou-se a circunferência que delimita a projeção horizontal da base superior do cilindro (que é tangente ao eixo Y , pois o raio da base é igual à abscissa do ponto Q').

Se bem que não seja absolutamente necessário, optou-se, nesta situação, por representar o cilindro em Dupla Projeção Ortogonal (pelas suas projeções horizontal e frontal), rebatendo o plano XZ sobre o plano XY (o *plano axonométrico*). Assim, antes de mais, concluiu-se a construção da projeção horizontal do cilindro, determinando as geratrizes do contorno aparente horizontal – estas determinam-se com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (as circunferências que delimitam as projeções horizontais das duas bases do cilindro) que são paralelas a uma reta dada (a projeção horizontal do eixo do cilindro – o segmento $[Q_1Q'_1]$). Para tal foi necessário desenhar os diâmetros das duas circunferências que são perpendiculares ao segmento $[Q_1Q'_1]$, o que nos permitiu determinar os pontos em que as geratrizes do **contorno aparente horizontal** do cilindro são tangentes às projeções horizontais das duas bases.

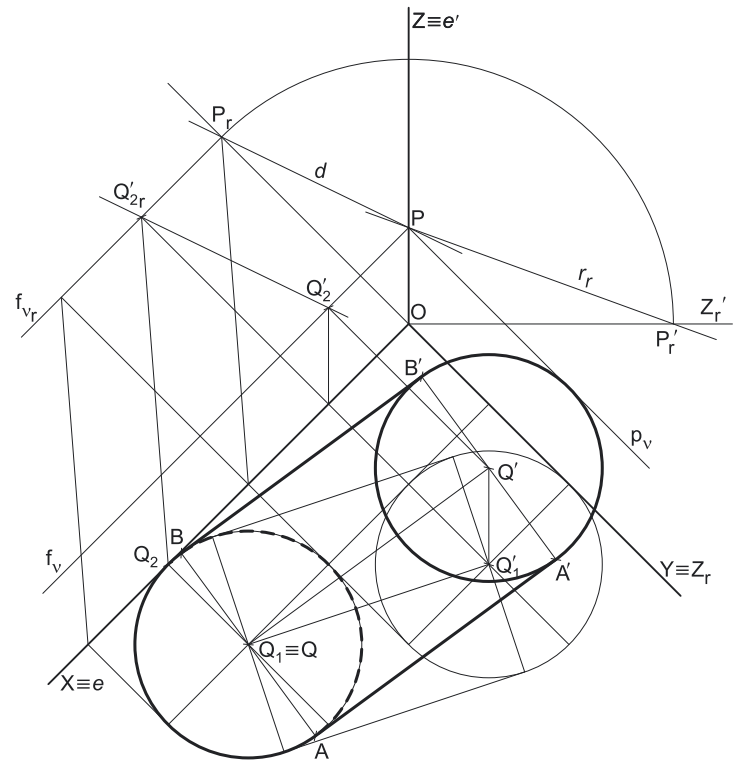
Rebatimento do plano XZ e construção da projeção frontal do cilindro, em rebatimento:

Ao rebater o plano XZ sobre o *plano axonométrico*, a charneira do rebatimento (reta e) é o eixo X , que se identificou imediatamente. O eixo Z rebatido (o eixo Z_r) fica coincidente com o eixo Y , facto que se assinalou devidamente – $Y \equiv Z_r$. O eixo Z_r é o eixo Z rebatido pelo rebatimento do plano XZ .

No plano XZ rebatido, representou-se a projeção frontal do ponto Q' , em rebatimento, em função da sua cota. Assim, Q'_{2r} é a projeção frontal do ponto Q' (em rebatimento), situa-se na sua linha de chamada (que passa por Q'_1 e é perpendicular ao eixo X), 7 cm (a cota do ponto Q') para cima do eixo X . Por Q'_{2r} conduziu-se f_{v_r} , paralelamente ao eixo X – f_{v_r} é o traço frontal do plano v (o plano horizontal que contém a base superior do cilindro) em rebatimento. Salienta-se que o plano v é um plano projetante frontal, pelo que f_{v_r} passa necessariamente por Q'_2 .

Em seguida, determinaram-se as projeções frontais (em rebatimento) das duas bases, com o recurso às linhas de chamada que são tangentes às projeções horizontais dos dois círculos, e concluiu-se a construção da projeção frontal do cilindro (em rebatimento).

Para determinar as perspectivas do ponto Q' e, conseqüentemente, desenhar a perspectiva do cilindro, é necessário inverter o rebatimento do plano XZ , o que se processa com o recurso à **direção de afinidade**.



(continua na página seguinte)

(continuação da página anterior)

Determinação da direção de afinidade:

Tendo em conta que a **direção de afinidade** é a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano coordenado **XZ** (nesta situação), a **direção de afinidade** é a direção que nos relaciona o rebatimento do plano **XZ** com a sua perspetiva. Assim, há que determinar o coeficiente de deformação que afeta o eixo **Z**, pois só assim, será possível determinar a **direção de afinidade**.

Sobre o eixo **Z_r** representou-se um ponto **P_r** – o ponto **P** é um ponto do eixo **Z** com a cota do ponto **Q'** ($\overline{OP_r}$ é a cota desse ponto **P**, em verdadeira grandeza, pelo rebatimento do plano **XZ**).

Em seguida, recorreu-se ao rebatimento do plano projetante do eixo **Z** para o plano axonométrico (o plano **XY**), para se determinar a perspetiva do ponto **P** e, dessa forma, ser possível relacionar o rebatimento do plano **XZ** com a deformação inerente à perspetiva. Nesse sentido, identificou-se a charneira do rebatimento do plano projetante do eixo **Z** (a reta **e'**), que é a própria perspetiva do eixo **Z**. O eixo **Z** rebatido (o eixo **Z_r'**) fica perpendicular à perspetiva do eixo **Z**. O ponto **O** é um ponto da charneira, pelo que é um ponto fixo (roda sobre si próprio).

A partir do ponto **O**, sobre o eixo **Z_r'** (e no sentido positivo do eixo), mediu-se $\overline{OP_r}$ (que é a cota do ponto **P**), em verdadeira grandeza, obtendo-se o ponto **P_r'** – tenha em conta que se tem necessariamente $\overline{OP_r'} = \overline{OP_r}$.

Por **P_r'** conduziu-se a reta **r_r**, com a inclinação das projetantes (um ângulo de 70°) – a reta **r_r** é a reta projetante do ponto **P**, em rebatimento. O ponto de interseção da reta **r_r** com a perspetiva do eixo **Z** é a perspetiva do ponto **P** (é o vértice do ângulo entre a reta **r_r** e a perspetiva do eixo **Z**). **OP** é a perspetiva de $\overline{OP_r'} = \overline{OP_r}$.

A **direção de afinidade** (nesta situação) relaciona o rebatimento do plano **XZ** com a sua perspetiva – assim, a reta que passa por **P_r** e pela perspetiva do ponto **P** (a reta **d**) é a **direção de afinidade** (a direção que nos permite inverter o rebatimento do plano **XZ**).

Inversão do rebatimento do plano coordenado XZ e determinação da perspetiva do ponto Q':

O ponto **P** é o ponto do eixo **Z** que tem a cota do ponto **Q'** (e do plano **v**). Assim, pela perspetiva do ponto **P** conduziram-se as perspetivas dos traços do plano **v** (o plano que contém a base superior do sólido) – **f_v** é a perspetiva do traço frontal do plano **v** (é paralelo ao eixo **X**) e **p_v** é a perspetiva do traço lateral do plano **v** (é paralelo ao eixo **Y**).

As projeções do ponto **Q'** (a projeção frontal e a projeção horizontal) são dois extremos da linha de chamada do ponto **Q'**, que é uma linha quebrada aberta, com um extremo em **Q'₁**, outro extremo em **Q'₂** e um vértice no eixo **X**. A parte da linha de chamada do ponto **Q'** que está contida no plano **XZ** é paralela ao eixo **Z** pelo que, em perspetiva, essa parte da linha de chamada é também paralela à perspetiva do eixo **Z**. Assim, a partir do ponto do eixo **X** que pertence à linha de chamada do ponto **Q'** desenhou-se a perspetiva da parte que se situa no plano **XZ** (e que é paralela à perspetiva do eixo **Z**), o que nos permitiu determinar **Q'₂** (a perspetiva da projeção frontal do ponto **Q'**), sobre a perspetiva de **f_v** (pois o plano **v** é um plano projetante frontal).

Note que a reta que passa por **Q'_{2r}** e pela perspetiva de **Q'₂** é paralela à direção de afinidade **d**.

Em seguida, por **Q'₁** (a projeção horizontal do ponto **Q'**) conduziu-se a perspetiva da reta projetante horizontal do ponto **Q'**, que é vertical (paralela à perspetiva do eixo **Z**). Depois, por **Q'₂** (a perspetiva da projeção frontal do ponto **Q'**), conduziu-se a perspetiva da reta projetante frontal do ponto **Q'** (que é paralela ao eixo **Y**) – o ponto de concorrência das perspetivas das duas retas projetantes é a perspetiva propriamente dita do ponto **Q'**.

Não se representaram as perspetivas das projeções laterais dos pontos **Q** e **Q'** (**Q₃** e **Q'₃**, respetivamente), por estas não serem necessárias.

Determinação da perspetiva do cilindro:

Atendendo a que o plano **v** (o plano que contém a base superior do cilindro) é paralelo ao plano de projeção (o plano axonométrico), e, como atrás se referiu, o círculo projeta-se em verdadeira grandeza no plano axonométrico (o plano **XY**). Assim, com o compasso, fazendo centro em **Q'** (a perspetiva propriamente dita do ponto **Q'**) e com 3 cm de raio, desenhou-se a perspetiva propriamente dita da base superior do cilindro, em verdadeira grandeza.

A perspetiva do cilindro é limitada pelas geratrizes do **contorno aparente da perspetiva** do sólido, que se determinam com o recurso ao processo rigoroso para a determinação das retas tangentes a uma circunferência (as circunferências que delimitam as bases do cilindro) que são paralelas a uma reta dada (a perspetiva do eixo do cilindro – a perspetiva do segmento **[QQ']**).

Assim, desenharam-se os diâmetros das duas circunferências que são perpendiculares ao segmento **[QQ']** (a perspetiva do eixo do sólido), o que nos permitiu determinar os pontos de tangência – os pontos **A** e **B** (da base inferior) e os pontos **A'** e **B'** (da base superior).

Após a determinação dos pontos **A**, **B**, **A'** e **B'**, desenharam-se as geratrizes do **contorno aparente da perspetiva** do cilindro (as geratrizes **[AA']** e **[BB']**) e concluiu-se o desenho da perspetiva do sólido, assinalando convenientemente as invisibilidades – a semicircunferência **AB** de menor abscissa (da base inferior) é invisível. A base superior do sólido é visível na sua totalidade.

Traçado:

As perspetivas dos três eixos (eixo **X**, eixo **Y** e eixo **Z**) representaram-se a **médio**, pois são as linhas estruturantes do exercício. A perspetiva do cilindro representou-se a **forte** (incluindo as invisibilidades), pois é o pedido (o objetivo do exercício). As perspetivas dos traços (frontal e lateral) do plano **v** (o plano que contém a base superior do cilindro), no contexto do exercício são meramente auxiliares, pelo que se representaram a **leve**. As restantes linhas, porque são linhas de chamada ou linhas auxiliares (caso da representação do cilindro em Dupla Projeção Ortogonal, dos traçados referentes ao rebatimento do plano **XZ**, do eixo **Z_r'**, da reta **r_r**, da determinação da direção de afinidade e, ainda, das construções que nos permitiram determinar as geratrizes dos contornos aparentes), representaram-se a **leve**.

